Καραγιάννης Β. Ιωάννης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Για τις Πανελλαδικές Εξετάσεις 2017

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έκδοση: Μαθηματικός Περιηγητής
blogs.sch.gr/iokaragi

Προκαταρτικά

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητή μαθήτρια, αγαπητέ μαθητή,

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου γράφτηκε αποκλειστικά για σένα για να να σε βοηθήσει στις Πανελλαδικές Εξετάσεις , ώστε μετά από τη συστηματική μελέτη του να είσαι έτοιμος να γράψεις άριστα. Για να γίνει αυτό απαιτείται η βαθιά κατανόηση των εννοιών και των θεωρημάτων-προτάσεων του σχολικού σου βιβλίου.

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου έχει την φιλοσοφία ότι το βασικό υλικό που πρέπει να μελετήσεις είναι αυτό του σχολικού σου βιβλίου και έπειτα του ψηφιακού βοηθήματος του Υπουργείου.

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου δείχνει τις βασικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις χωρίς να «χάνεσαι» μέσα σε τεχνάσματα και «χαώδη θέματα» που σε τίποτα δεν οφελούν.

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου θέλοντας να σε οδηγήσει στην απόλυτη επιτυχία σου προτείνει και επιπλέον θέματα για εξάσκηση και βαθύτερη σκέψη καθώς και συνδυαστικά θέματα.

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου θέλοντας να σου δείξει το δρόμο για την επιτυχία σου προτείνει διαγωνίσματα στο επίπεδο των Πανελλαδικών Εξετάσεων.

Σου εύχομαι επιτυχία

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Α

Γ΄ Λ Υ Κ Ε Ι Ο Υ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

(Α΄ΜΕΡΟΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ

Έννοια Συνάρτησης

Πεδίο Ορισμού Συνάρτησης

Γραφικές Παραστάσεις

Ισότητα συναρτήσεων-Πράξεις συναρτήσεων

Σύνθεση συναρτήσεων

Θωρία-Σχόλια-Μεθοδολογικές υποδείξεις-Παραδείγματα-Ασκήσεις σε κατηγορίες

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

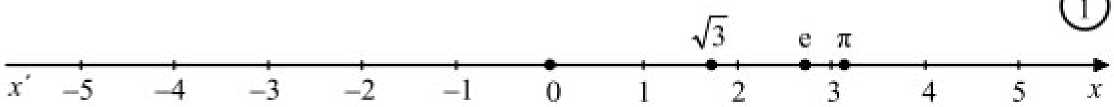
Σχολικό Έτος: 2016-2017

ΜΑΘΗΜΑ 1ο
Βασικές γνώσεις-Επαναλήψεις

Τα βασικά σύνολα είναι:

- Το σύνολο των φυσικών αριθμών **N** = {0, 1, 2, 3,.......},
- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών **Z** = {......., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3,.......},
- Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με **Q** και είναι όλοι οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$.
- Το σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνεται με τα σημεία ενός άξονα, *του άξονα των πραγματικών αριθμών*.

1

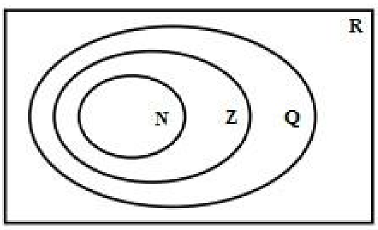


Για τα σύνολα N**,** Z**,** Q και R ισχύει:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Σχηματικά έχουμε:

2



Πράξεις και διάταξη στο R

Οι σπουδαιότερες ιδιότητες της διάταξης των πραγματικών αριθμών είναι οι:

1	Αν $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma$, τότε $\alpha \geq \gamma$
2	$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$
3	$\begin{cases} \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \geq \beta\gamma & \text{, όταν } \gamma > 0 \\ \text{ενώ} & \\ \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma & \text{, όταν } \gamma < 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \text{Αν } \alpha \geq \beta \text{ και } \gamma \geq \delta \text{, τότε } \alpha + \gamma \geq \beta + \delta \\ \text{Αν } \begin{pmatrix} \alpha \geq \beta \text{ και } \gamma \geq \delta \\ \text{και} \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{pmatrix} \text{, τότε } \alpha\gamma \geq \beta\delta. \end{cases}$
5	Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\nu \in \mathbf{N}^*$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu \geq \beta^\nu$
6	$\frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha \geq 0 \text{ και } \beta > 0)$
7	Αν $\alpha\beta > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}$

Διαστήματα πραγματικών αριθμών

Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ με $\alpha < \beta$, τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα α, β** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

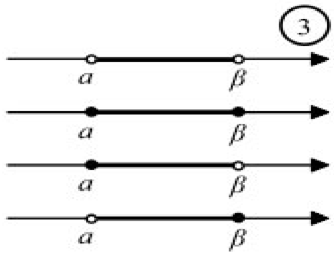
$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha < x < \beta\}$: **ανοικτό διάστημα**

$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$: **κλειστό διάστημα**

$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}$: **κλειστό-ανοικτό διάστημα**

$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}$: **ανοικτό-κλειστό διάστημα.**

(Σχ. 3)



Αν α ∊ **R**, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το α** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

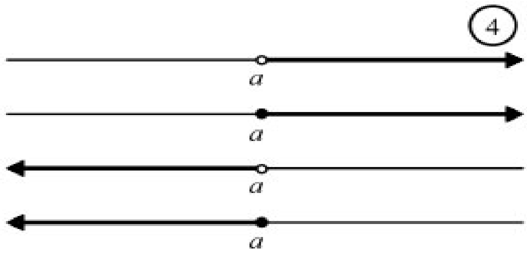
$$(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > \alpha\}$$

$$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq \alpha\}$$

$$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < \alpha\}$$

$$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq \alpha\}$$

(Σχ. 4)

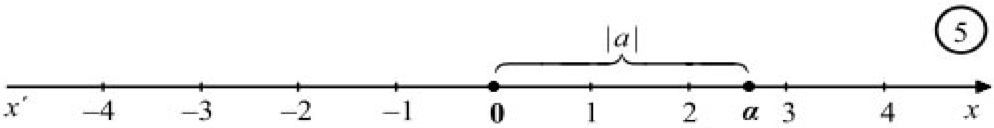


Υπό μορφή διαστήματος το σύνολο **R** το συμβολίζουμε με $(-\infty,+\infty)$. Τα σημεία ενός διαστήματος Δ, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται **εσωτερικά σημεία** του Δ.

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α, που συμβολίζεται με | α |, ορίζεται ως εξής:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu\ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$$



Οι βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής είναι οι εξής:

1	$\lvert\alpha\rvert^2 = \alpha^2$
2	$\sqrt{\alpha^2} = \lvert\alpha\rvert$
3	$\lvert\alpha \cdot \beta\rvert = \lvert\alpha\rvert \cdot \lvert\beta\rvert$

4	$\left\|\dfrac{\alpha}{\beta}\right\| = \dfrac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\ (\beta \neq 0)$
5	$\big\|\|\alpha\| - \|\beta\|\big\| \leq \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$
6	$\|x\| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta\ (\theta > 0)$
7	$\|x\| > \theta \Leftrightarrow (x > \theta \ ή\ x < -\theta)\ (\theta > 0)$
8	$\|x - x_0\| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$
9	$\|x - x_0\| > \delta \Leftrightarrow x > x_0 + \delta \ ή\ x < x_0 - \delta$

Α. Κατανοώ

1. Να γράψετε σε ποια σύνολα ανήκουν οι επόμενοι αριθμοί:

$$3,\ \ -4,\ \ \frac{1}{3},\ \ -\sqrt{2}$$

2. Αν $\alpha \geq 2$ και $\beta > -1$ να βρείτε σε ποιο διάστημα ανήκουν οι παραστάσεις:

$$2\alpha + 3\beta \text{ και } 5\alpha - 3\alpha$$

3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

1	$\|-3\| = \ldots$
2	$\left\|\dfrac{1}{2}\right\| = \ldots$
3	$\|\sqrt[3]{5}\| = \ldots$
4	$\|\alpha\| = \ldots$
5	$\|-\alpha\| = \ldots$
6	$\|\sqrt{\alpha}\| = \ldots$
7	$\|\alpha \cdot \beta\| = \ldots$
8	$\left\|\dfrac{\alpha}{\beta}\right\| = \ldots (\beta \neq 0)$
9	$\|\alpha^2\| = \ldots$

4. Να γράψετε σε μορφή διαστήματατος τις επόμενες ανισώσεις:

Ανίσωση	**Διάστημα**
$x \le -1$	
$x > 2$	
$-1 \le x < \frac{1}{3}$	
$-2 \le x \le 2$	
$-3 < x \le 8$	

5. Να γράψετε τα επόμενα διαστήματα σε μορφή ανισώσεων:

Διάστημα	**Ανίσωση**
$(-\infty, \ -1)$	
$[2, \ +\infty)$	
$(-3, 7]$	
$[0, \frac{2}{5}]$	
$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$	

Β. Εμπεδώνω

1. Να γράψετε τα παρακάτω σύνολα σε μορφή διαστήματος

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{x-1}{3} - 1 \le \frac{x-2}{2} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 1 - 2\left| x + \frac{1}{2} \right| > -1 \right\}$$

ΜΑΘΗΜΑ 2ο

Πεδίο Ορισμού Συνάρτησης

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω Α ένα υποσύνολο του **R**. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο x ∈ Α αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της** f **στο x** και συμβολίζεται με f(x).

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbf{R}$$
$$x \to f(x)$$

Χρήσιμες παρατηρήσεις

— Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

—Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f.

— Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα x ∈ Α, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y / y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ- Εύρεσης του πεδίου ορισμού μίας συνάρτησης

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού D_f μίας συνάρτησης f διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

1η περίπτωση:

Αν $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$, τότε λύνουμε την εξίσωση $B(x) = 0$ και εξαιρούμε από το $\mathbb{R}$ τα x που μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / B(x) \neq 0\}$$

Σχόλιο: Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $A(x),\ B(x)$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν δεν έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε και γι αυτές το πεδίο ορισμού τους και παίρνουμε την τομή αυτών με το σύνολο D_f.

$2^η$ περίπτωση:

Αν $f(x)=\sqrt[v]{A(x)}$, τότε λύνουμε την ανίσωση $A(x)\geq 0$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,A(x)\geq 0\}$$

Σχόλιο: Υποθέτουμε ότι οι συνάρτηση $A(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν δεν έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε και για την $A(x)$ το πεδίο ορισμού της και παίρνουμε την τομή αυτού με το σύνολο D_f.

$3^η$ περίπτωση:

Αν $f(x)=\ln A(x)$ ή $f(x)=\log A(x)$, τότε λύνουμε την ανίσωση $A(x)>0$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,A(x)>0\}$$

Σχόλιο: Υποθέτουμε ότι οι συνάρτηση $A(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν δεν έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε και για την $A(x)$ το πεδίο ορισμού της και παίρνουμε την τομή αυτού με το σύνολο D_f.

Προφανώς η εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης μπορεί να αποτελεί και συνδυασμό των παραπάνω περιπτώσεων.

Παραδείγματα- Ασκήσεις Λυμένες

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ **β)** $g(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-3x+4}$

ΛΥΣΗ ($1^η$ περίπτωση)

α) Πρέπει:

$$x^2-4\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 4\Leftrightarrow (x\neq 2\ \kappa\alpha\iota\ x\neq -2)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$$

β) Πρέπει:

$$x^2-3x+4\neq 0\Leftrightarrow (x\neq 2\ \kappa\alpha\iota\ x\neq 1)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_g=\mathbb{R}-\{1,\ 2\}$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt[3]{3x-1}$ **β)** $g(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

ΛΥΣΗ (2η περίπτωση)

α) Πρέπει:

$$3x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{3}$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\left[\frac{1}{3},\ +\infty\right)$$

β) Πρέπει:

$$x^2-4x+3\geq 0 \Leftrightarrow \left(x\leq 1 \text{ ή } x\geq 3\right)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_g=\left(-\infty,1\right]\cup\left[3,+\infty\right)$$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$ **β)** $g(x)=\log\left(x^3-x^2-2x+2\right)$

ΛΥΣΗ (3η περίπτωση)

α) Πρέπει:

$$x^2-1>0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left(x<-1 \;\kappa\alpha\iota\; x>1\right)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$$

β) Πρέπει:

$$x^3-x^2-2x+2>0 \Leftrightarrow x^2\left(x-1\right)-2\left(x-1\right)>0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2-2\right)>0$$

	$-\infty$ … $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ … 1	1 … $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ … $+\infty$
$\left(x-1\right)$	-	-	+	+
$\left(x^2-2\right)$	+	-	-	+
x^3-x^2-2x+2	-	+	-	+

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_g=\left(-\sqrt{2},1\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}+\ln\left(x^2-5x+4\right)$ **β)** $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}-\dfrac{1}{\ln(x^3-2x^2+x-2)}$

ΛΥΣΗ (συνδυαστική περίπτωση)

α) Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

$$x^2-9\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 0 \Leftrightarrow \left(x\neq 3 \;\kappa\alpha\iota\; x\neq -3\right) \;\kappa\alpha\iota$$
$$x^2-5x+4>0 \Leftrightarrow \left(x<1 \;\acute{\eta}\; x>4\right)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\left(-\infty,-3\right)\cup\left(-3,1\right)\cup\left(4,+\infty\right)$$

β) Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

$$x^2-1>0 \Leftrightarrow \left(x<-1 \text{ ή } x>1\right)$$
$$x^3-2x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x^2\left(x-2\right)+\left(x-2\right)>0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2+1\right)>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f=\left(2,+\infty\right)$$

Α. Κατανοώ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$ **Β)** $g(x)=\ln\left(x^2-3x-4\right)$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\sqrt{5x-15}$ **Β)** $g(x)=\sqrt[5]{x^2-25}$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\dfrac{x+2}{3x-1}$ **Β)** $g(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$

Ασκήσεις από το Σχολικό Βιβλίο

1/A. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων;

i) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$, ii) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$

iii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ iv) $f(x)=\ln(1-e^x)$

B. Εμπεδώνω

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

A) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-6x^2+11x-6}$ **B)** $g(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x^3-6x^2+11x-6}}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

A) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2-2x-2}}{\ln\left(x^3-8\right)}$ **B)** $g(x)=\dfrac{1}{\ln\left(\sqrt[4]{x^3+x^2-2x-2}+1\right)}$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

A) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\ln\left(\sqrt[3]{x^2-6x+5}\right)$ **B)** $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt[5]{x^2-4x+4}}-\dfrac{1}{\ln(x^4-2x^2+1)}$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

A) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}, & \alpha\nu\ x\neq 1\\ 0, & \alpha\nu\ x=1\end{cases}$ **B)** $g(x)=\begin{cases}x+1, & \alpha\nu\ x>0\\ x, & \alpha\nu\ -1<x<0\\ x-2, & \alpha\nu\ x<-1\end{cases}$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x)=\sqrt{e^x-1}+\sqrt{1-\ln x}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ g(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x)=\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1}+\frac{1}{\varepsilon\varphi x-1}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ g(x)=(x-2)^{x+2}$$

(Πεδία Ορισμού με παράμετρο)

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{(\lambda+1)x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-3},\ \text{για κάθε}\ \lambda\in\mathbb{R}$$

8. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων να είναι το $\mathbb{R}$

$$\alpha)\ f(x)=\ln\left(\lambda x^2+\lambda x+\lambda-1\right) \qquad \beta)\ g(x)=\sqrt{2x^2+x+\lambda-3}$$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{3-\log\left(x+a\right)},\ g(x)=\sqrt{f\left(f\left(\frac{11}{10}\right)\right)-\ln\left(x-f(2)\right)} \text{ με } a\in\mathbb{R} \text{ και } f\left(2\right)=\sqrt{3}$$

i) Να βρείτε την τιμή του α

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμου της συνάρτησης f

iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμου της συνάρτησης g

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x+a, & \alpha\nu\ \ -6\le x<-1 \\ x^2+\beta, & \alpha\nu\ \ -1<x<7 \end{cases}$$

με $f\left(-2\right)=5$ και $f\left(5\right)=24$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τις τιμές του α και του β.

iii) $f\left(-1\right),\ f\left(f\left(-3\right)\right)$

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$

(Συναρτησιακές σχέσεις)

11. Έστω μια συνάρτηση $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ με:

$$f\left(\frac{x}{e}\right)\le \ln x\le f\left(x\right)-1 \text{ για κάθε } x>0$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τις τιμές:

$$f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right),\ f\left(f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

12. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$2f(x)-f(1-x)=x^2+2x-1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)=f(x-2)$.

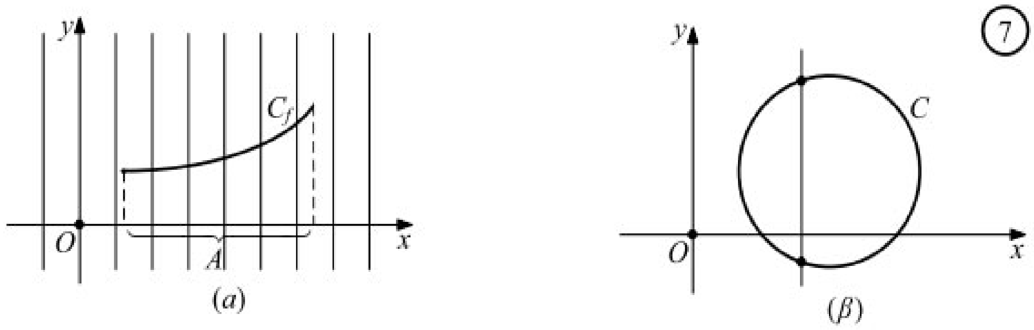
ΜΑΘΗΜΑ 3^{o}
Γραφικές Παραστάσεις

Γραφική παράσταση:

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Οxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων Μ(x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση, λοιπόν, y = f(x) επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, αφού υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες που έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική του παράσταση. (Σχ. 7β).

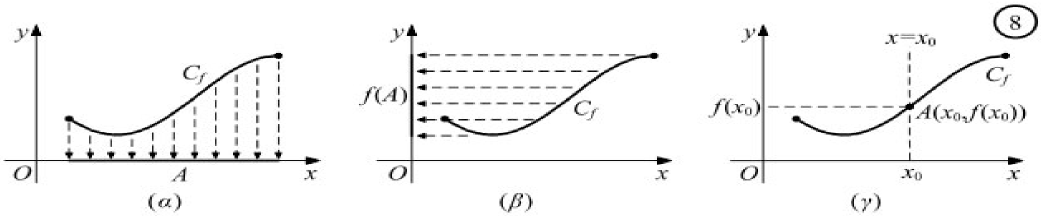


Οταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της C_f .

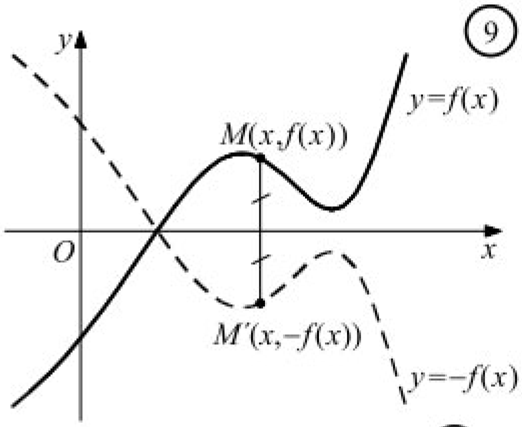
β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .

γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

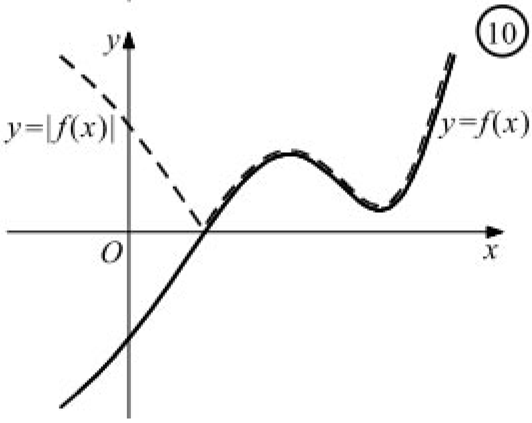


Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f , μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$ όπως στα επόμενα παραδείγματα:

α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία Μ΄(x,$-f$(x)) που είναι συμμετρικά των Μ(x, f(x)), ως προς τον άξονα x΄x. (Σχ. 9).

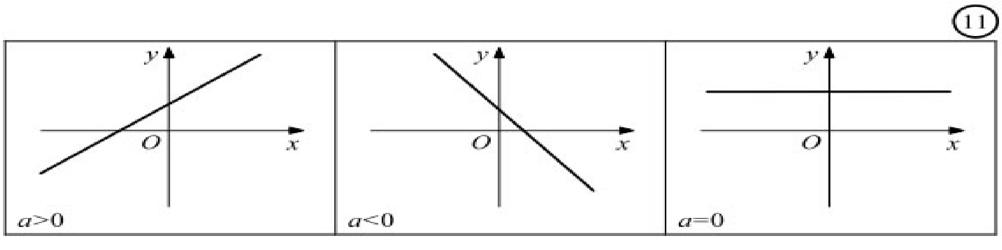


β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).

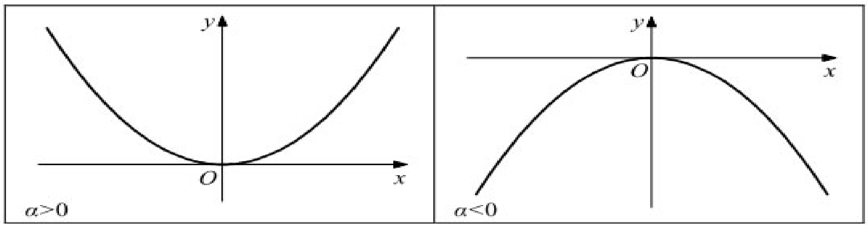


Μερικές βασικές συναρτήσεις

Η πολυωνυμική συνάρτηση f(x) = αx + β

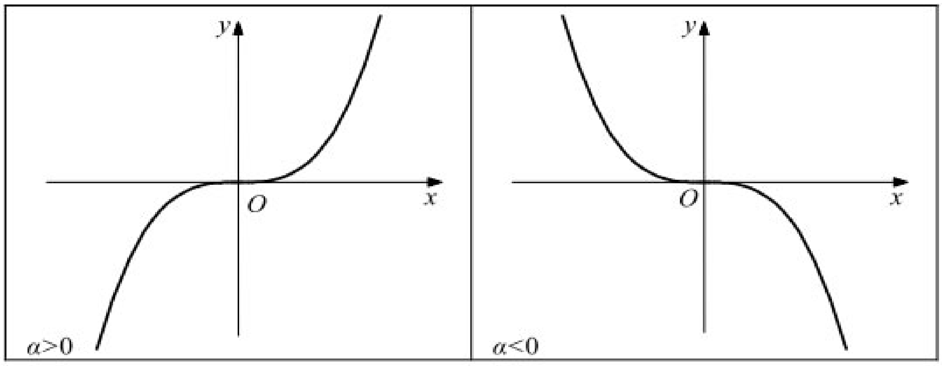


Η πολυωνυμική συνάρτηση f(x) = αx^2 , $\alpha \neq 0$.



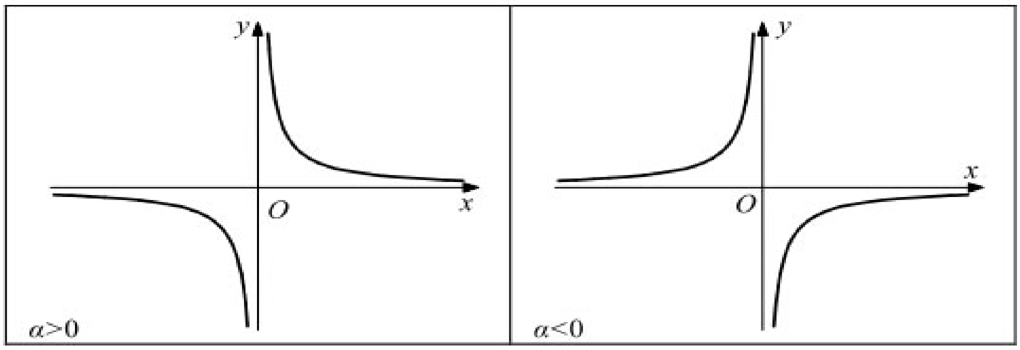
12

Η πολυωνυμική συνάρτηση f(x) = αx^3 , α ≠ 0 .



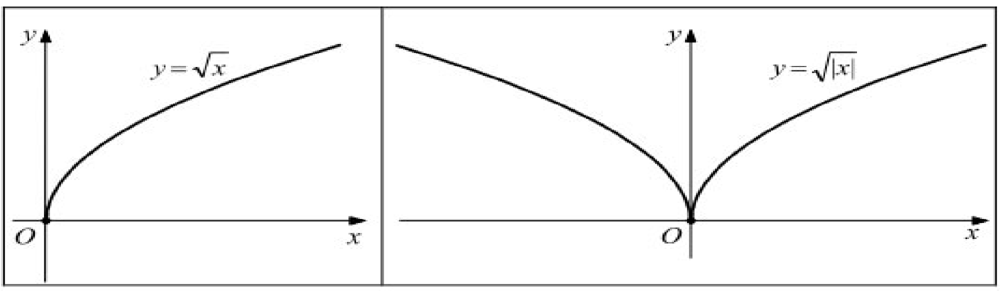
13

Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{a}{x}$**, α ≠ 0 .**



14

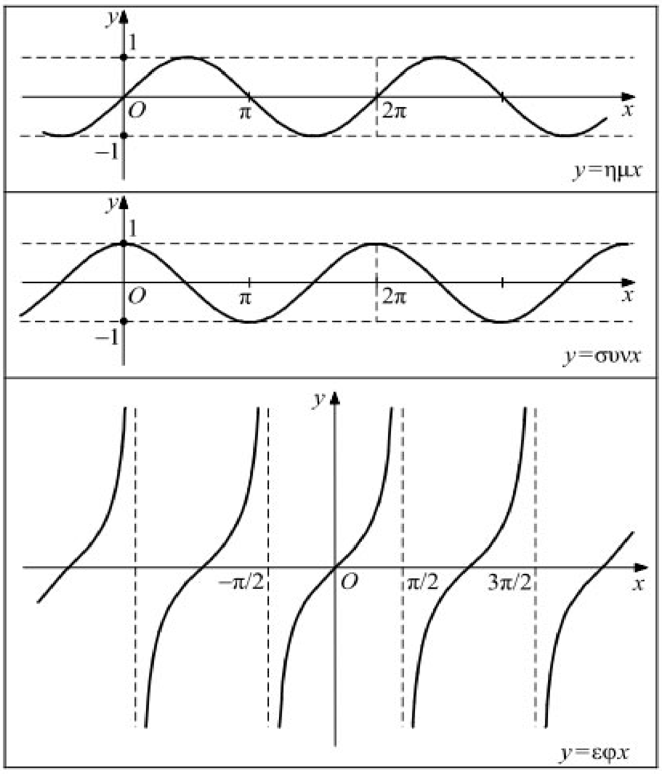
Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ **και** $g(x)=\sqrt{|x|}$ **.**



15

Επειδή $g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & αν\ x<0\\ \sqrt{x}, & αν x\ \geq 0\end{cases}$, η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{|x|}$ αποτελείται απο δύο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της $y=|x|$ και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα y΄y.

Οι τριγωνικές συναρτήσεις : f(x) = ημx, f(x) = συνx, f(x) = εφx



16

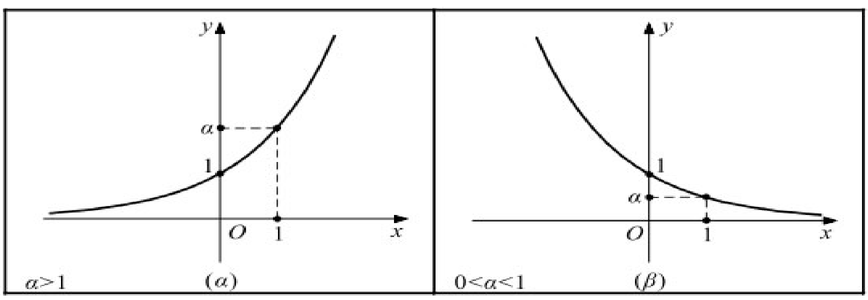
(α)

(β)

(γ)

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις f (x) = ημx και f (x) = συνx είναι περιοδικές με περίοδο Τ = 2π, ενώ η συνάρτηση f (x) = εφx είναι περιοδική με περίοδο Τ = π.

Η εκθετική συνάρτηση f(x) = α^{x}, 0 < α ≠1 .

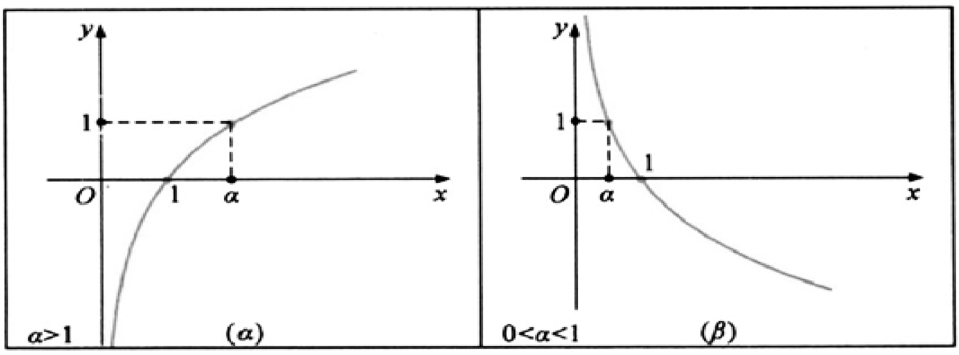


17

Υπενθυμίζουμε ότι:

1	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
	$(a \cdot \beta)^x = a^x \cdot \beta^y$
2	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{a^x}{\beta^x}$
3	$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$
4	$(a \cdot \beta)^x = a^x \cdot \beta^y$
5	$a^0 = 1$ ($a \neq 0$)
6	$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ $(\nu, \mu \in \mathbb{N}, \nu, \mu > 1)$
7	$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$ $(\nu \in \mathbb{N})$
8	Αν $a > 1$, τότε $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
9	Αν $0 < a < 1$, τότε $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

Η λογαριθμική συνάρτηση f(x) = log$_α$x, 0 < α ≠1 .



18

Υπενθυμίζουμε ότι:

1	$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
2	$\log_a a^x = x$
3	$\log_a a = 1$
4	$\log_a 1 = 0$
5	$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
6	$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
7	$\log_a x^{\kappa} = \kappa \log_a x$
8	$\alpha^x = e^{x \ln a}$
9	Αν $a > 1$, τότε $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$
10	Αν $0 < a < 1$, τότε $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν **ζητείται** να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε:

— Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **πάνω** από τον άξονα x΄x, τότε λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$.

— Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **κάτω** από τον άξονα x΄x, τότε λύνουμε την ανίσωση $f(x) < 0$.

— Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **πάνω** από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τότε λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

— Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **κάτω** από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τότε λύνουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

— Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, τότε λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Χρήσιμα:

— Αν μία συνάρτηση f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε σημαίνει ότι $f(0) = 0$

— Αν μία συνάρτηση f διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_o)$, τότε σημαίνει ότι $f(x_0) = y_o$

Α. Κατανοώ

Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο

6/Α. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} + 1$, ii) $f(x) = x|x|$,

iii) $f(x) = \begin{cases} -x+3 \;, & x < 1 \\ x+1 \;, & x \geq 1 \end{cases}$ iv) $f(x) = |\ln x|$.

και από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών της f σε καθεμιά περίπτωση.

Β. Εμπεδώνω

1. Να βρείτε τα κοινά σημεία ων συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = 2x$ **ii)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ και $g(x) = -\dfrac{1}{2x+2}$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \alpha\nu \ -2<x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \alpha\nu \ x>1 \end{cases}$$

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

ii) Με τη βοήθεια του (i) ερωτήματος , να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x}, & \alpha\nu \ x<-1 \\ -x+2, & \alpha\nu \ -1\le x\le 1 \\ \ln\dfrac{1}{x}, & \alpha\nu \ x>1 \end{cases}$$

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii) Με τη βοήθεια του (i) ερωτήματος , να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο

2/Α. Για ποιές τιμές του x ϵ **R** η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, όταν:

i) $f(x)=x^2-4x+3$, ii) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, iii) $f(x)=e^x-1$.

3/Α. Για ποιές τιμές του x ϵ **R** η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, όταν:

i) $f(x)=x^3+2x+1$ και $g(x)=x+1$

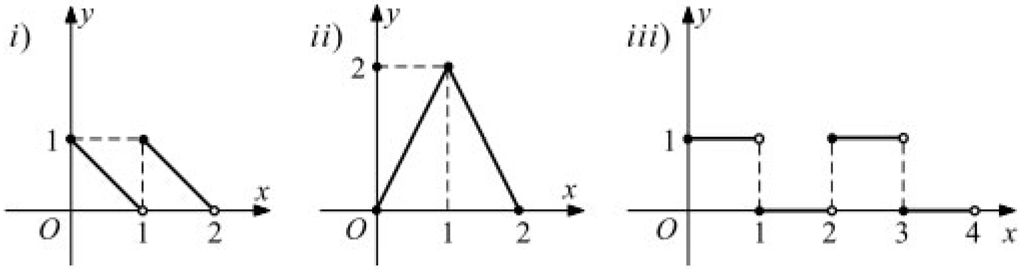
ii) $f(x)=x^3+x-2$ και $g(x)=x^2+x-2$.

5/Β. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x)=\dfrac{|x+1|+|x-1|}{2}$, ii) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x+|\eta\mu x|}{2}$, $x\in[0,2\pi]$.

Από τη γραφική παράσταση της f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της σε καθεμιά περίπτωση.

1/B. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι :



ΜΑΘΗΜΑ 4^{o}

Ισότητα συναρτήσεων-Πράξεις συναρτήσεων

Ισότητα συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1} \text{ και } g(x)=x$$

Παρατηρούμε ότι:

— οι συναρτήσεις f,g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο Α = **R** και

— για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$, αφού

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}=\frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x=g(x)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

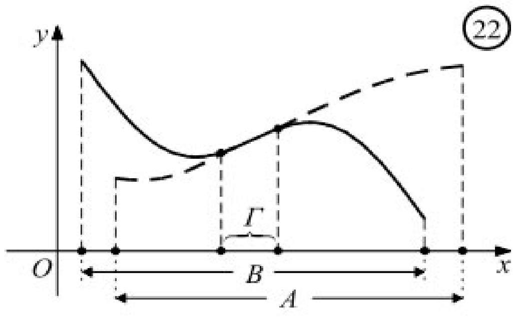
Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Έστω τώρα f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των Α και Β. Αν για κάθε x ϵ Γ ισχύει $f(x)=g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις **f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ**. (Σχ. 22)



Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ και $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$ που έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα $A=\mathbf{R}-\{1\}$ και $B=\mathbf{R}-\{0\}$ αντιστοίχως, είναι ίσες στο σύνολο $\Gamma=\mathbf{R}-\{0,1\}$, αφού για κάθε $x\in\Gamma$ ισχύει $f(x)=g(x)=x+1$.

Παράδειγματα-Ασκήσεις Λυμένες (Άσκηση από το σχολικό βιβλίο)

7/Α. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f\neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

i) $f(x)=\sqrt{x^2}$ και $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$

ii) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x}$ και $g(x)=1-\frac{1}{|x|}$

iii) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x)=\sqrt{x}+1$

ΛΥΣΗ

i) Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι αντίστοιχα:

$$D_f=\mathbb{R} \text{ και } D_g=[0,+\infty)$$

$$f(x)=\sqrt{x^2}=|x| \text{ και } g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$$

Επομένως $f(x)=g(x)$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

ii) Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι αντίστοιχα:

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1,0\} \text{ και } D_g=\mathbb{R}^*$$

Έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x(x+1)}=\frac{x-1}{x} \text{ και } g(x)=1-\frac{1}{|x|}=\frac{|x|-1}{|x|}=\begin{cases}\frac{x-1}{x}, & αν\ x>0\\ \frac{x+1}{x}, & αν\ x<0\end{cases}$$

Επομένως $f(x)=g(x)$, για κάθε $x>0$.

iii) Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι αντίστοιχα:

$$D_f=[0,1)\cup(1,+\infty) \text{ και } D_g=[0,+\infty)$$

Έχουμε:

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\sqrt{x}+1$$

Επομένως Επομένως $f(x)=g(x)$, για κάθε $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

Πράξεις με συναρτήσεις

Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x-2} \text{ και } g(x)=\sqrt{x-1}$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=[2,+\infty)$ και της g το $B=[1,+\infty)$. Στο κοινό πεδίο ορισμού τους $[1,+\infty)$ ορίζουμε τις συναρτήσεις:

Άθροισμα των f,g **:** $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}$

Διαφορά των f,g **:** $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1}$

Γινόμενο των f,g **:** $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-2)\cdot(x-1)}$

Ειδικά για το **πηλίκο των** f,g ορίζουμε στο κοινό πεδίο ορισμού:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0 \text{ ,δηλαδή } \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}},\ x>1$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ είναι η τομή Α ∩ Β των πεδίων ορισμού Α και Β των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το Α ∩ Β, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή g(x), δηλαδή το σύνολο:

$$\{x\,/\,x\in A \ \kappa\alpha\iota\ x\in B,\ \mu\varepsilon\ g(x)\neq 0\}=\{x\,/\,x\in A\cap B,\ \mu\varepsilon\ g(x)\neq 0\}$$

Παραδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1} \text{ και } g(x)=\sqrt{x-1}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g. Έχουμε:

$$x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow (x\neq 1 \;\kappa\alpha\iota\; x\neq -1)$$

Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Ακόμα, $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$, άρα $D_g=[1,+\infty)$

Επομένως για την εύρεση των συναρτήσεων $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$, εργαζόμαστε για κάθε $(1,+\infty)$. Έχουμε:

$$(f+g)(x)=\frac{1}{x^2-1}+\sqrt{x-1}=\frac{1+(x^2-1)\sqrt{x-1}}{x^2-1},\ x\in(1,+\infty)$$

$$(f-g)(x)=\frac{1}{x^2-1}-\sqrt{x-1}=\frac{1-(x^2-1)\sqrt{x-1}}{x^2-1},\ x\in(1,+\infty)$$

$$(f\cdot g)(x)=\frac{1}{x^2-1}\cdot\sqrt{x-1}=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1},\ x\in(1,+\infty)$$

Για τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ πρέπει επιπλέον να είναι $g(x)\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$, το οποίο ισχύει αν $x\in(1,+\infty)$. Οπότε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\frac{1}{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{(x^2-1)\cdot\sqrt{x-1}},x\in(1,+\infty)$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}x, & \alpha\nu\ x>0\\ -x+2, & \alpha\nu\ x\leq 0\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}-x+1, & \alpha\nu\ x\geq 0\\ x, & \alpha\nu\ x<0\end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$.

ΛΥΣΗ

Στην περίπτωση αυτή το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f,g είναι το $\mathbb{R}=(-\infty,0]\cup(0,+\infty)$.

Για $x>0$ έχουμε:

$$(f+g)(x)=x+(-x+1)=1$$

$$(f-g)(x)=x-(-x+1)=2x-1$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&=(-x+2)+x=2\\(f-g)(x)&=(-x+2)-x=-2x+2\end{aligned}$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=2,\ g(0)=1$ και άρα:

$$(f+g)(0)=2+1=3 \text{ και } (f-g)(0)=2-1=1$$

Επομένως:

$$(f+g)(x)=\begin{cases}2, & \alpha\nu\ x<0\\1, & \alpha\nu\ x>0\\3, & \alpha\nu\ x=0\end{cases} \quad \text{και} \qquad (f-g)(x)=\begin{cases}2x-1, & \alpha\nu\ x>0\\-2x+2, & \alpha\nu\ x<0\\1, & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$$

Α. Κατανοώ

Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο

8/Α. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=1+\frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x}{1-x}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$

9/Α. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ και } g(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Β. Εμπεδώνω

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & \alpha\nu\ x>0\\x-1, & \alpha\nu x<0\\1, & \alpha\nu\ x=0\end{cases} \text{ και } g(x)=\begin{cases}-x, & \alpha\nu\ x>0\\x+1, & \alpha\nu\ x<0\end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \alpha\nu\ x>1 \\ x^2-1, & \alpha\nu\ x<-1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} -x^2, & \alpha\nu\ x>0 \\ -x^2+1, & \alpha\nu\ x<0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$\left(f+g\right)(x)\cdot\left[\left(f+g\right)(x)-6\right]+25=2g(x)\left[1+f(x)\right], \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων $f,\ g$

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A=\left[f(x)\right]^5+\left[g(x)\right]^5+\left[f(x)\right]^6+8$$

ΜΑΘΗΜΑ 5ο
Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\sqrt{x-1}$. Η τιμή της φ στο x μπορεί να οριστεί σε δύο φάσεις ως εξής:

α) Στο x ∈ **R** αντιστοιχίζουμε τον αριθμό y = x−1 και στη συνέχεια

β) στο y = x−1 αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\sqrt{y}=\sqrt{x-1}$, εφόσον y = x−1 ≥ 0.

η $g(y)=\sqrt{y}$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο B = [0, +∞) (β΄ φάση).

Έτσι, η τιμή της φ στο x γράφεται τελικά:

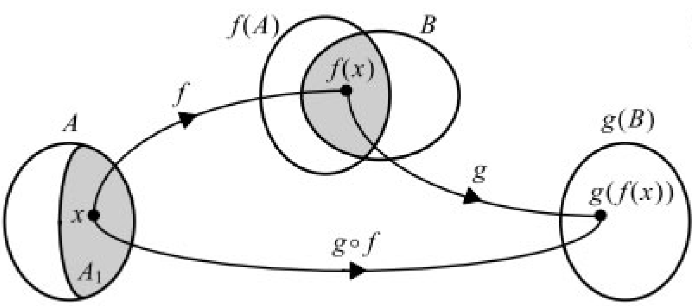
$\varphi(x)=g\left(f(x)\right)$

Η συνάρτηση φ λέγεται σύνθεση της f με την g και συμβολίζεται με gof. Το πεδίο ορισμού της φ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού Α της f, αλλά περιορίζεται στα $x \in A$ για τα οποία η τιμή $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού Β της g, δηλαδή είναι το σύνολο $A_1=[1,+\infty)$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με **gof**, τη συνάρτηση με τύπο

$$\left(gof\right)(x)=g(f\left(x\right)) \ .$$



24

Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο :

$$A_1=\left\{x \in A / \ f(x) \in B\right\}$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

Ερώτηση: Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της fog ;

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα ή ένωση διαστημάτων.**

ΣΧΟΛΙΑ

● Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε ότι $gof \neq fog$. Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές δ ε ν ε ί ν α ι υ π ο χ ρ ε ω τ ι κ ά ίσες.

● Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει:

$$ho(gof) = (hog)of$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g, h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

Παραδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες

1. Να προσδιορίσετε τη σύνθεση fog αν:

$$f(x) = e^x - 1 \text{ και } g(x) = \ln(x-1)$$

ΛΥΣΗ

Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g είναι αντίστοιχα $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = (1, +\infty)$. Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog} = \{x \in (1, +\infty) / g(x) \in \mathbb{R}\} = (1, +\infty).$$

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x-1)) = e^{\ln(x-1)} - 1 = (x-1) - 1 = x - 2$$

Σημαντική παρατήρηση: Για να βρούμε τη fog (ή τη gof) βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της fog (ή της gof) με $D_{fog} \neq \varnothing$ (ή $D_{gof} \neq \varnothing$) και έπειτα τον τύπο της. Δεν είναι σωστό (και ούτε πάντα το ίδιο) να βρούμε τον τελικό τύπο της fog (ή της gof) και από αυτόν να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού της fog (ή της gof).

2. Να προσδιορίσετε τη σύνθεση fog και την gof αν:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 1 \text{ και } g(x) = x + 2$$

ΛΥΣΗ

Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g είναι αντίστοιχα $D_f = [2, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in [2, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} / x + 2 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = \sqrt{x+2-2} + 1 = \sqrt{x} + 1$$

Το πεδίο ορισμού της gof είναι:

$$D_{gof} \neq \{x \in [2, +\infty) / f(x) \in \mathbb{R}\} = [2, +\infty)$$

Για κάθε $x \in [2, +\infty)$ έχουμε:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-2} + 1) = \sqrt{x-2} + 1 + 2 = \sqrt{x-2} + 3$$

3. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = (0, 2]$**.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x-4)$ **ii)** $f(e^{x-1})$ **iii)** $f(\ln x)$ **iv)** $f(x^2 - 4x + 4)$

ΛΥΣΗ

i) Πρέπει:

$$x-4\in(0,2]\Leftrightarrow 0<x-4\leq 2\Leftrightarrow 4<x\leq 6$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το $A_1=(4,6]$

ii) Πρέπει:

$$e^{x-1}\in(0,2]\Leftrightarrow 0<e^{x-1}\leq 2\Leftrightarrow e^{x-1}\leq 2\Leftrightarrow x-1\leq \ln 2\Leftrightarrow x\leq 1+\ln 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το $A_2=(-\infty,1+\ln 2]$

iii) Πρέπει:

$$\ln x\in(0,2]\Leftrightarrow 0<\ln x\leq 2\Leftrightarrow (\ln x>0 \ \kappa\alpha\iota \ \ln x\leq 2)\Leftrightarrow \left(x>1 \ \kappa\alpha\iota \ x\leq e^2\right)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το $A_3=\left(1,e^2\right]$

iv) Πρέπει:

$$x^2-4x+4\in(0,2]\Leftrightarrow 0<x^2-4x+4\leq 2\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4>0 \ \kappa\alpha\iota \ x^2-4x+4\leq 2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4>0 \ \kappa\alpha\iota \ x^2-4x+2\leq 0\right)\Leftrightarrow \left((x-2)^2>0 \ \kappa\alpha\iota \ x^2-4x+2\leq 0\right)\Leftrightarrow$$
$$\left(x\neq 2 \ \kappa\alpha\iota \ x\in\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]\right)=\left[2-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,2+\sqrt{2}\right]$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το $A_4=\left[2-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,2+\sqrt{2}\right]$

Α. Κατανοώ

Άσκηση από το σχολικό βιβλίο:

10/Α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση gof, αν

i) $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{x}$, ii) $f(x)=ημx$ και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

iii) $f(x)=\frac{\pi}{4}$ και $g(x)=εφx$.

11/Α. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις gof και fog.

Β. Εμπεδώνω

Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο:

7/Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) = x + 1 και g(x) = αx + 2. Για ποια τιμή του α ∈ **R** ισχύει

$fog = gof$;

12/Α. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν

i) $f(x)=ημ(x^2+1)$, ii) $f(x)=2ημ^2 3x+1$

iii) $f(x)=\ln(e^{2x}-1)$, iv) $f(x)=ημ^2(3x)$.

Προτεινόμενες:

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$(fof)(x)=2-x \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=1$ **ii)** $f(2-x)=2-f(x)$ **iii)** $f(0)+f(2)=0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$(fof)(x)=3x-2 \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=1$ **ii)** $f(x)=\frac{1}{3}[2+f(3x-2)]$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=e^x-1,\ g(x)=\ln(x-1),\ h(x)=x+1$$

Να βρεθεί η σύνθεση $fogoh$

ΜΑΘΗΜΑ 6ο

Ασκήσεις-Προβλήματα

(Επανάληψη)

Α. Από το σχολικό βιβλίο

6/Β. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει :

i) $(fog)(x) = x^2 + 2x + 2$, αν $g(x) = x + 1$

ii) $(fog)(x) = \sqrt{1 + x^2}$, αν $g(x) = -x^2$

iii) $(gof)(x) = |\text{συν}x|$, αν $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

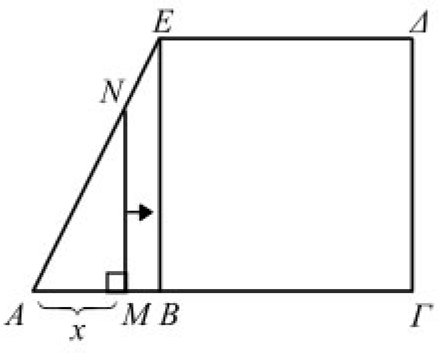
8/Β. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}, \quad \text{με} \quad \beta \neq -\alpha^2 \quad \text{και} \quad g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 .$$

α) f(f(x)) = x , για κάθε x ∈ **R**−{α} και

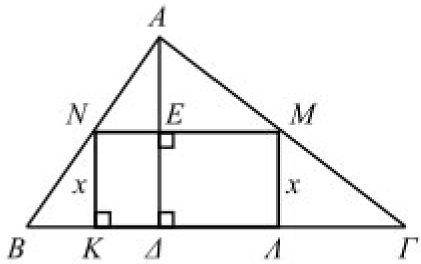
β) g(g(x)) = x, για κάθε x ∈ [0, 1].

3/Β. Στο επόμενο σχήμα είναι ΑΒ = 1, ΑΓ = 3 και ΓΔ =2. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του x = AM, όταν το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.



2/Β. Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης x cm και όγκο 628 cm^3. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4 δρχ. ανά cm^2, ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας 1,25 δρχ. ανά cm^2. Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του x. Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 cm, και ύψος 8 cm;

4/Β. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ βάσης ΒΓ = 10cm και ύψους ΑΔ = 5cm. Να εκφράσετε το εμβαδό Ε και την περίμετρο Ρ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.



ΕΡΓΑΣΙΑ:

4/Α. Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν οτι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις συναρτήσεις:

Α(x) = 2,89x + 70,64 (για τους άνδρες)   και Γ(x) = 2,75x + 71,48 (για τις γυναίκες)

όπου x σε εκατοστά, το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45 m.

α) Αν προέρχεται από άνδρα ποιο ήταν το ύψος του;

β) Αν προέρχεται από γυναίκα ποιο ήταν το ύψος της;

5/Α. Σύρμα μήκους ℓ = 20cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και (20 − x) cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x.

9/Β. Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός Ρ της πόλης είναι x εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $N = 10\sqrt{2(x^2 + x)}$ χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε t έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $\sqrt{t+4}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

i) Να εκφράσετε τον αριθμό Ν των αυτοκινήτων της πόλης ως συ-νάρτηση του t.

ii) Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα.;

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln x - 1 \text{ και } g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις fog και gof.

γ) Να βρείτε τα σημείο τομής των συναρτήσεων f και g (αν υπάρχουν).

δ) Να βρείτε τα σημείο τομής των f και g με τους άξονες.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} \text{ και } g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$$

α) Να εξετάσετε σε ποιο σύνολο οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

β) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x - 1 \text{ και } g(x) = \frac{1}{x - 1}$$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις fog και gof.

β) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης fog βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης gof βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων gof, f και g.

4. Δίνεναι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1) = 0$ **ii)** $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right),\ x > 0$ **iii)** $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y),\ x, y > 0$

5. Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,\ +\infty)$ με:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)\ \text{, για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(-1)=1$ **ii)** Η f είναι άρτια

Διαγώνισμα στην ενότητα 1

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

Α1. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

(Μονάδες 8)

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

(Μονάδες 7)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά ίσες

2. Ισχύει: $ho(fog)=(hof)og$

3. Αν A είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και B το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της $g\cdot f$ είναι $A\cap B$.

4. Αν δύο συναρτήσεις f,g έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα A και B με $A\subseteq B$, τότε το πεδίο ορισμού της $f+g$ είναι το B.

5. Αν δύο συναρτήσεις f,g έχουν πεδία ορισμού αντίστοιχα A και B, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι πάντα το $A\cap B$.

(Μονάδες 5Χ3=15)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{1}{\ln(x-1)+1} \text{ και } g(x)=\frac{x}{e^x-1}$$

Α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f,g

(Μονάδες 12)

Β. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\frac{f}{g}$

(Μονάδες 10)

Γ. Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και gof

(Μονάδες 18)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f\left(x\right)=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \text{ και } g(x)=\frac{x^2+x}{x^2-x}$$

Α. Να εξετάσετε σε ποιο σύνολο οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

Β. Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

(Μονάδες 12)

Γ. Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Α

Γ΄ Λ Υ Κ Ε Ι Ο Υ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

(Α΄ΜΕΡΟΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ

Μονοτονία συνάρτησης

Ακρότατα συνάρτησης

Συνάρτηση «1-1»

Αντίστροφη Συνάρτησης

Θωρία-Σχόλια-Μεθοδολογικές υποδείξεις-Παραδείγματα-Ασκήσεις σε κατηγορίες

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Σχολικό Έτος: 2016-2017

ΜΑΘΗΜΑ 7ο

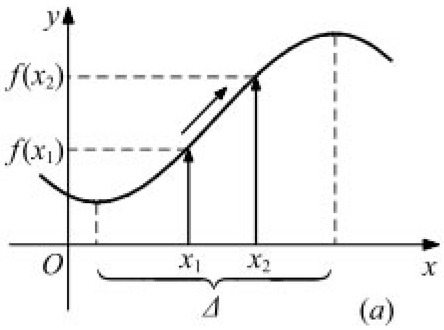
Μονοτονία συνάρτησης

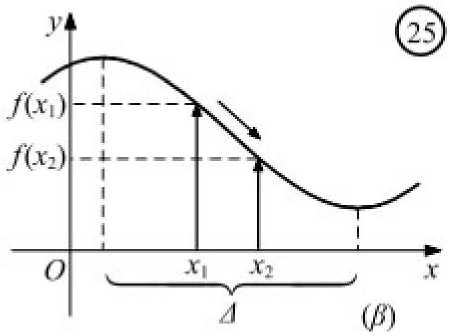
ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται :

● **γνησίως αύξουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)

● **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)



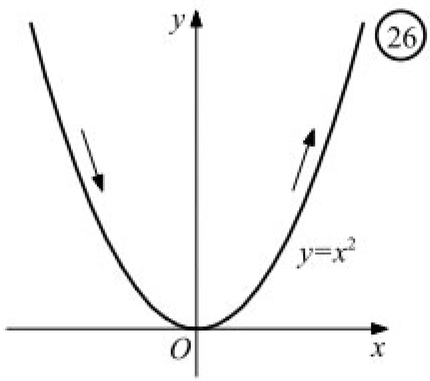


Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ, γράφουμε $f \uparrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \downarrow \Delta$).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$:

— είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, αφού για $0 \le x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^2 < x_2^2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$

— είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, αφού για $x_1 < x_2 \le 0$ έχουμε $0 \le -x_2 < -x_1$, οπότε $0 \le x_2^2 < x_1^2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$



Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ**. Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

<u>Σημείωση:</u> Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς:

● **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

● **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ: Πως αποδεικνύουμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη

Όταν ζητείται να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) τότε βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της Α και λέμε:

«Έστω $x_1, x_2 \in A \; \mu\varepsilon \; x_1 < x_2 \ldots$ και κατασκευάζουμε την ανισότητα $f(x_1) < f(x_2)$ (ή $f(x_1) > f(x_2)$ αντίστοιχα).

ΜΕΘΟΔΟΣ-«Δυσεπίλυτης» ανίσωσης

Για να λύσουμε μία ανίσωση της μορφής $f(g(x)) > f(h(x))$ ή $f(g(x)) < f(h(x))$ στο Δ αν γνωρίζουμε (ή έχουμε αποδείξει) ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ, τότε:

Α) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ έχουμε:

$$f(g(x)) > f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) > h(x)$$
$$f(g(x)) < f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) < h(x)$$

και λύνουμε μία ευκολότερη ανίσωση.

Β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ έχουμε:

$$f(g(x)) > f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) < h(x)$$
$$f(g(x)) < f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) > h(x)$$

και λύνουμε μία ευκολότερη ανίσωση.

Γ) Αν έχουμε να λύσουμε μία ανίσωση της μορφής $f(x) > a$ ή $f(x) < a$ στο A προσπαθούμε να βρούμε με παρατήρηση $\beta \in A$, τέτοιο ώστε $f(a) = \beta$ και έχουμε:

$$f(x) > a \Leftrightarrow f(x) > f(\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \beta, \alpha\nu \ \mathrm{f} \uparrow \\ x < \beta, a\nu \ \mathrm{f} \downarrow \end{cases} \text{ή}$$

$$f(x) < a \Leftrightarrow f(x) < f(\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \beta, \alpha\nu \ \mathrm{f} \uparrow \\ x > \beta, a\nu \ \mathrm{f} \downarrow \end{cases}$$

Παράδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες (Άσκηση από το σχολικό βιβλίο)

1/Α. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες

i) $f(x) = \sqrt{1-x}$ **ii)** $f(x) = 2\ln(x-2) - 1$ **iii)** $f(x) = 3e^{1-x} + 1$ **iv)** $f(x) = (x-1)^2 - 1$

ΛΥΣΗ

i) Πρέπει $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (-\infty, 1]$. Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f.

ii) Πρέπει $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = [2, +\infty)$. Έστω $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow 2\ln(x_1 - 2) < 2\ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\ln(x_1 - 2) - 1 < 2\ln(x_2 - 2) - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f.

iii) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Leftrightarrow 3e^{1-x_1} > 3e^{1-x_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3e^{1-x_1}+1 > 3e^{1-x_2}+1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iv) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ και έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2 \Leftrightarrow (x_1-1)^2 - 1 < (x_2-1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

— $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ και έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow (1-x_1)^2 > (1-x_2)^2 \Leftrightarrow (1-x_1)^2 - 1 > (1-x_2)^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow (x_1-1)^2 - 1 > (x_2-1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$.

4/A. Να δείξετε ότι:

i) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ii) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

iii) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ανάλογα συμπεράσματα διατυπώνονται, αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ.

Α. Κατανοώ

1. Να εξετάσετε την μονοτονία των συναρτήσεων:

i) $f(x) = -2e^{2-x} + 3$ **ii)** $g(x) = \sqrt[3]{1-2x} - 1$

2. Να εξετάσετε την μονοτονία των συναρτήσεων:

i) $f(x) = 2\log(3-x) + 1$ **ii)** $g(x) = 3\ln\left(\sqrt{x-2} + 1\right) - 1$

Β. Εμπεδώνω

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^5 + 3x^3 + x - 6$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $2x^5 + 3x^3 + x = 6$

iii) Να λύσετε την ανίσωση $2e^{5x} + 3e^{3x} + e^x < 6$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = a^x + x,\ a > 1$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$a^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} < 2 + \lambda - \lambda^2$$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 12e^{3-x} - 3x$$

i) Να μελετήσετε την ως προς τη μονοτονία.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 3$

iii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$12\left(e^{3-x^2} - e^{3-x}\right) < 3x\left(x-1\right)$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα, να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης fog.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\left(fog\right)(x^2 - 4x) \geq \left(fog\right)\left(x-4\right)$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + x + 1$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{x^2-1}-e^{x+2}>x-x^2+3$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+1\right)+x-2,\ x>-1$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln\left(\frac{x^4+2}{x^3+1}\right)>2x^3-x^4$$

7. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις , αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα:

i) $f\left(x^2-3x+1\right)>f\left(4x+1\right)$ **ii)** $f\left(2e^{3x}+4\right)<f\left(e^{3x}+5\right)$ **iii)** $f\left(\ln\left(x+1\right)+x^2\right)>f\left(x^2\right)$

ΜΑΘΗΜΑ 8^{ο}

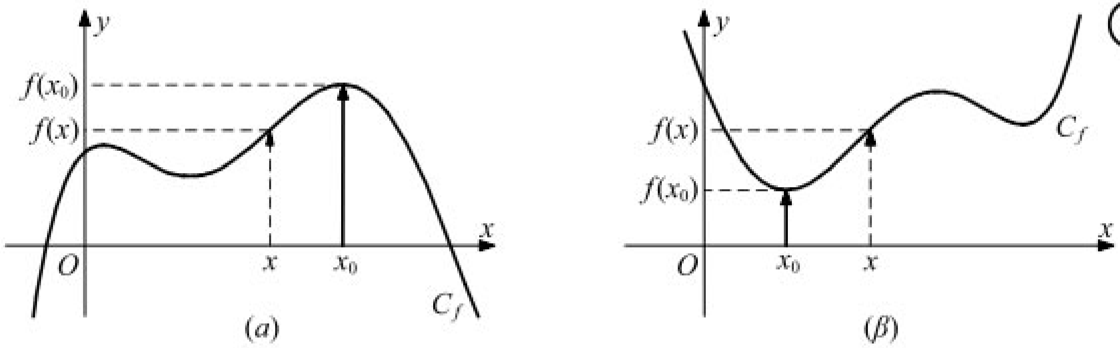
Ακρότατα συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. 27α)

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το το $f(x_0)$, όταν το $f(x_0)$ για κάθε x ϵ A (Σχ. 27β)



27

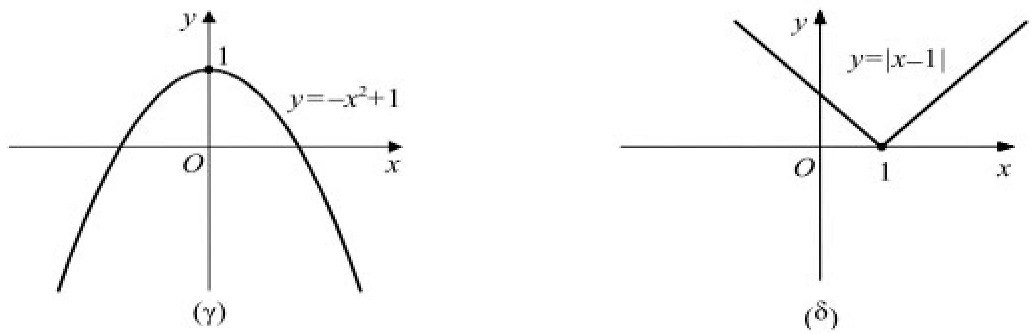
Για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση f (x) = − x^2 + 1 (Σχ. 28α) παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 = 0, το f (0) = 1 ,

αφού f (x) ≤ f (0) για κάθε x ϵ **R**.

— Η συνάρτηση f (x) = | x−1 | (Σχ. 28β) παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 = 1, το f (1) = 0,

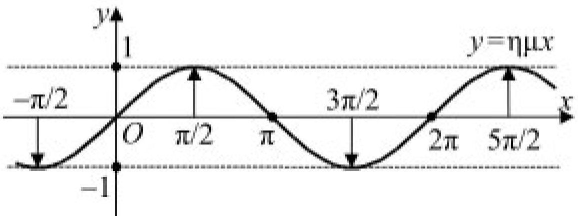
αφού f (x) ≥ f (1) για κάθε x ϵ **R**.



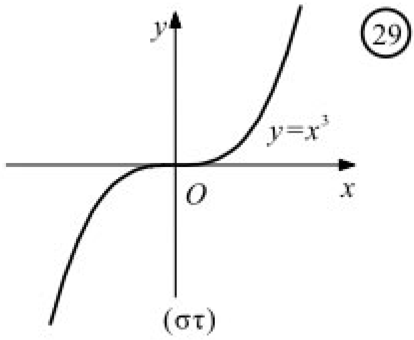
28

— Η συνάρτηση f(x) = ημx (Σχ. 29α) παρουσιάζει μέγιστο, το y = 1, σε καθένα από τα σημεία 2κπ + π/2, κ ∈ **Z** και ελάχιστο, το y = −1, σε καθένα από τα σημεία 2κπ − π/2, κ ∈ **Z**, αφού −1 ≤ ημx ≤ 1 για κάθε x ∈ **R**.

— Η συνάρτηση f (x) = x^3 (Σχ. 29β) δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο, αφού είναι γνησίως αύξουσα.



(ε)



(στ)

Άλλες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f .

Παράδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες

1. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή των συναρτήσεων:

i) $f(x)=1-|x+3|$ **ii)** $g(x)=\dfrac{1}{x^4+2}$

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

i) $f(x)=|x-5|+3$ **ii)**

Α. Κατανοώ

1. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή των συναρτήσεων:

i) $f(x)=2-|x+2|$ **ii)** $f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

i) $f(x) = |x+3| + 2$ **ii)** $g(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Β. Εμπεδώνω

1. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i) Αν η f έχει μέγιστο στο x_o και η g είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog έχει ελάχιστο στο x_o.

ii) Αν η f έχει ελάχιστο στο x_o και η g είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog έχει μέγιστο στο x_o.

2. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i) Αν η f έχει μέγιστο στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $-f$ έχει ελάχιστο στο x_o.

ii) Αν η f έχει ελάχιστο στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση κf με $\kappa < 0$ έχει μέγιστο στο x_o.

Οι ασκήσεις με τα ακρότατα λύνονται ευκολότερα με όσα θα μάθουμε στο 2ο Κεφάλαιο. Για το λόγο αυτό μας αρκεί να καταλάβουμε τις έννοιες τώρα.

ΜΑΘΗΜΑ 9^{ο}

Συνάρτηση «1−1»

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$«\text{Αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)»$$

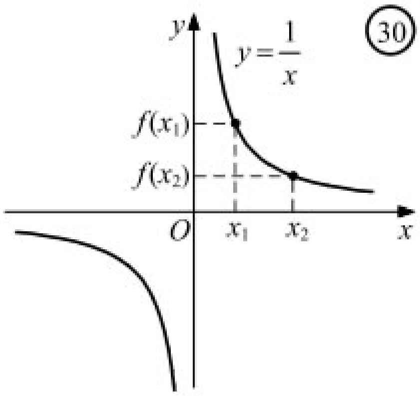
που σημαίνει ότι: "Τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες

Εναλλακτικά:

Μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1−1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$«\text{Αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2»$$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \neq 0$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.



ΣΧΟΛΙΑ

— Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν:

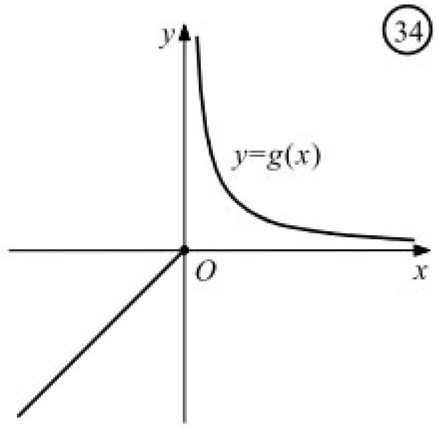
— Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

— Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

— Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση "1-1"

— Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases} x \;, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} \;, & x>0 \end{cases} \quad (\Sigma\chi.\ 34).$$



— Μια συνάρτηση που είναι άρτια στο A δεν είναι και «1-1» αφού ισχύει $f(x)=f(-x)$ για κάθε $x\in A$.

Παραδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες

1. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού τους:

i) $f(x)=1+e^{x-2}$ **ii)** $g(x)=2-\ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

ΛΥΣΗ

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 1+e^{x_1-2}=1+e^{x_2-2}\Leftrightarrow e^{x_1-2}=e^{x_2-2}\Leftrightarrow x_1-2=x_2-2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Επομένως η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$.

ii) Πρέπει αρχικά να έχουμε:

$$x\neq 1 \text{ και}$$

$$\frac{1}{x-1}>0\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$ είναι $D_g=(1,+\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $g(x_1) = g(x_2)$ έχουμε:

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 2 - \ln\left(\frac{1}{x_1 - 1}\right) = 2 - \ln\left(\frac{1}{x_2 - 1}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x_1 - 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{x_2 - 1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Επομένως η g είναι «1-1» στο $(1,+\infty)$.

2. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις δεν είναι «1-1»

i) $f(x) = 1 - |x+3|$ **ii)** $g(x) = \dfrac{3}{x^4 + 1}$

ΛΥΣΗ

Μπορούμε, εκτός από τη γενικότητα, να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις δεν είναι «1-1» βρίσκοντας ένα αντιπαράδειγμα, δηλαδή ένα ζεύγος $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 \neq x_2$ αλλά με ίσες εικόνες.

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g είναι το $\mathbb{R}$.

i) Αν $x_1 = -2, x_2 = -4$ έχουμε**:**

$$f(x_1) = f(-2) = 0 = f(-4) = f(x_2)$$

Επομένως η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν $x_2 = -x_1 \neq 0$ έχουμε: $g(x_1) = g(-x_1) = g(x_2)$

Επομένως η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$.

3. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $(fof)(x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$**.**

Να αποδείξετε ότι η f είναι:

i) περιττή **ii)** «1-1»

ΛΥΣΗ

i) Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή θα πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $x, -x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ-Πως αποδεικνύουμε ότι μία συνάρτηση f (δεν) είναι «1-1»

— Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f είναι «συνάρτηση 1-1» βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της Α (αν δεν δίνεται) και λέμε: «Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \ldots \Rightarrow x_1 = x_2$.

— Αν η παραπάνω διαδικασία οδηγεί σε αδιέξοδο, τότε μπορούμε να δοκιμάσουμε να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθινουσα).

— Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f **δεν** είναι «συνάρτηση 1-1» βρίσκουμε ένα τουλάχιστον αντιπαράδειγμα, δηλαδή δύο σημεία x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της f με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$.

— Αν ζητείται να εξετάσουμε αν μία συνάρτηση f είναι «συνάρτηση 1-1» βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της Α (αν δεν δίνεται) και λέμε: «Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Καταλήγουμε σε σχέση από την οποία αν δεν μπορούμε **οπωσδήποτε** να έχουμε **μόνο** $x_1 = x_2$, αλλά και κάτι εναλλακτικό, τότε η f δεν είναι «1-1» .

ΜΕΘΟΔΟΣ-Λύση «δυσεπίλυτης» εξίσωσης

Αν έχουμε να λύσουμε μία εξίσωση:

Α) Της μορφής $f(x) = a$ (1) με $a \in \mathbb{R}$, τότε αν η συνάρτηση f είναι «1-1» η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα. Ειδικότερα αν Α είναι το πεδίο ορισμού της f και $a \in f(A)$ η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μία λύση η οποία μορεί να βρεθεί με παρατήρηση ή να αποδειχθεί η ύπαρξη της, όπως θα μάθουμε παρακάτω. Αν $a \notin f(A)$, τότε η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο Α.

Β) Της μορφής $f(g(x)) = f(h(x))$ με την f να είναι «1-1» στο Α, τότε έχουμε να λύσουμε την ευκολότερη εξίσωση $g(x) = h(x)$.

Α. Κατανοώ

1. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού τους:

i) $f(x) = 2 - e^{x-1}$ **ii)** $g(x) = 1 - \ln\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$

2. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις δεν είναι «1-1»

i) $f(x) = 1 + |x-5|$ **ii)** $g(x) = \dfrac{3}{x^{10}+1}$

3. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι «1-1»

i) $f(x)=\begin{cases}3x-2, & αν\ x\le 0\\ x^2+1, & αν\ x\ge 3\end{cases}$ **ii)** $g(x)=\begin{cases}x+2, & αν\ x<3\\ x^2+1, & αν\ x>0\end{cases}$

Β. Εμπεδώνω

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $e^x=1-x^7$ **ii)** $\ln(x-1)=2-x$ **iii)** $e^x+2=\sqrt{8+\sqrt{1-x}}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{2015}+x^{2017},\ x\in\mathbb{R}$

i) Να βρείτε το $f(1)$

ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι «1-1»

iii) Να λύσετε την εξίσωση $x^{2015}+x^{2017}=2$

3. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $(fof)(x)+f^3(x)=2x+3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι «1-1»

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(2x^3+x\right)-f\left(4-x\right)=0$

4. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η σνάρτηση $g(x)=f\left(x^{2015}\right)-f\left(x^{2014}\right)-2016$ δεν είναι «1-1».

ii) Να λύσετε στο $(1,+\infty)$ την ανίσωση:

$$\left(x^2-2014x\right)\cdot\left(g(x)+2016\right)>0$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις, αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι «1-1»

i) $f\left(x^2-3x+1\right)=f\left(4x+1\right)$ **ii)** $f\left(2e^{3x}+4\right)=f\left(e^{3x}+5\right)$ **iii)** $f\left(\ln(x+1)+x^2\right)=f\left(x^2\right)$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)+x-2,\ x>-1$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\ln\left(\frac{x^4+2}{x^3+1}\right)=2x^3-x^4$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=e^x+x+1$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

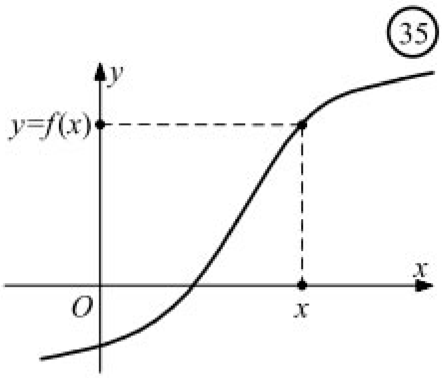
ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2-1}-e^{x+2}=x-x^2+3$$

ΜΑΘΗΜΑ 10^{ο}

Αντίστροφη συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της Α για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.



Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$g : f(A) \to \mathbf{R}$$

με την οποία κάθε y ∊ $f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό x ∊ A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

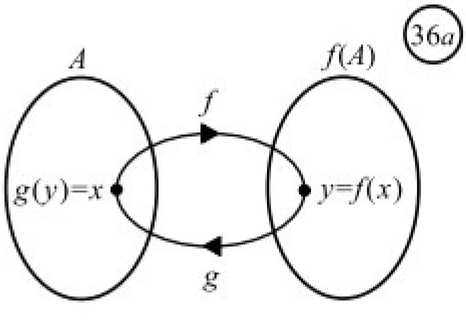
— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού Α της f και

— ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε



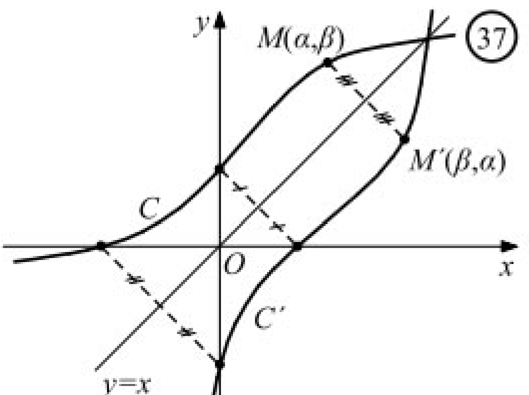
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x, x \in A \text{ και } f\left(f^{-1}(y)\right) = y, y \in f\left(A\right)$$

Λόγω του παραπάνω συμπεράσματος έχουμε:

Αν ένα σημείο Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο Μ΄(α,β) θα ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.



Έτσι, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = α^x$ και $g(x) = \log_α x$, $0< α \neq 1$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x.

Προφανώς ισχύει $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

ΜΕΘΟΔΟΣ-Εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης και του συνόλου τιμών της f

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$

Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f

— Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της Α (αν δεν δίνεται). Κατόπιν αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f που δόθηκε είναι «1-1» στο Α και επομένως υπάρχει η αντίστροφη της f^{-1} στο Α.

— Θέτουμε: $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x [με $x = f^{-1}(x)$], θέτοντας όλους τους περιορισμούς που προκύπτουν ως προς y και με $x \in A$. Τέλος εναλλάσουμε τα x, y και έχουμε τον τύπο της f^{-1} με το πεδίο ορισμού της (δηλαδή το σύνολο τιμών της f).

— Με την παραπάνω διαδικασία και θέτοντας όλους τους περιορισμούς ως προς y βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f (ή $D_{f^{-1}} = f\left(D_f\right)$).

ΒΑΣΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ

Αν λύνοντας την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς $x \in A$ διαπιστώσουμε ότι έχει:

— Το πολύ μία ρίζα στο Α για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ή

— Μία ακριβώς ρίζα στο Α για κάθε $y \in \mathbb{R}$

, τότε η συνάρτηση f είναι «1-1».

ΜΕΘΟΔΟΣ-Λύση εξισώσεων $f^{-1}\left(x\right) = x$ και $f\left(x\right) = x$

— Οι εξισώσεις $f^{-1}\left(x\right) = f(x)$, $f^{-1}\left(x\right) = x$ και $f\left(x\right) = x$ είναι ισοδύναμες μόνο όταν η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα**. Ο ισχυρισμός αυτός, όταν χρησιμοποιείται, χρειάζεται απόδειξη αφού δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Στην περίπτωση αυτή λύνουμε την πιο εύκολη από τις δύο εξισώσεις.

— Δηλαδή τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$ της f και f^{-1}, όταν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$, μόνο όταν η f είναι γνησίως αύξουσα.

— Στη λύση εξισώσεων που περιέχουν όρους της μορφής $f^{-1}\left(g(x)\right)$ πρέπει να απαιτούμε η $g(x) \in f\left(D_f\right)$, δηλαδή η $g(x)$ να ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ (που μπορεί να χρησιμοποιείται στις ασκήσεις αφού πρώτα αποδειχθεί).

«Αν $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο Α, τότε η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στο $f(A)$.»

Απόδειξη:

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α. Έστω $y_1,y_2\in f(A)$ με $y_1<y_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. Έστω ότι υπάρχουν $y_1,y_2\in f(A)$ με $y_1<y_2$ τέτοια, ώστε $f^{-1}(y_1)\geq f^{-1}(y_2)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε διαδοχικά:

$f^{-1}(y_1)\geq f^{-1}(y_2)\Rightarrow f\left(f^{-1}(y_1)\right)\geq f\left(f^{-1}(y_2)\right)\Rightarrow y_1\geq y_2$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ και άρα η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η περίπτωση που η $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Α (τότε και η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(A)$.

Η πρόταση αυτή ενδεχομένως να μας χρειαστεί όταν μας ζητείται η μονοτονία της f στο Α και είναι δύσκολη (ή και αδύνατη) η κατασκευή με τις ανισότητες. Τότε πιθανόν η εύρεση της μονοτονίας της αντίστροφης στο $f(A)$ να είναι ευκολότερη .

ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ (που μπορεί να χρησιμοποιείται στις ασκήσεις αφού πρώτα αποδειχθεί).

«Αν $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και οι γραφικές παραστάσεις C_f, $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f,f^{-1} τέμνονται , *τότε τα κοινά τους σημεία βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$.*

Απόδειξη

Έστω ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, $C_{f^{-1}}$ *των συναρτήσεων* f,f^{-1} τέμνονται στο σημείο $M(\kappa,\lambda)$ το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία $y=x$, δηλαδή $\kappa\neq\lambda$. Ακόμα έχουμε $f(\kappa)=\lambda$ (1) , $f^{-1}(\kappa)=\lambda\Leftrightarrow f(\lambda)=\kappa$ (2), αφού το σημείο Μ είναι κοινό σημείο της C_f, $C_{f^{-1}}$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Αν $\kappa > \lambda$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$\kappa > \lambda \Rightarrow f(\kappa) > f(\lambda) \Rightarrow \lambda > \kappa$, που είναι άτοπο.

Αν $\kappa < \lambda \Rightarrow f(\kappa) < f(\lambda) \Rightarrow \lambda < \kappa$, που είναι άτοπο.

Επομένως $\kappa = \lambda$ και άρα το κοινό σημείο Μ των C_f, $C_{f^{-1}}$ ανήκει στην ευθεία $y = x$.

Άρα αν μας ζητείται να βρούμε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ (Ι) (αν έχουμε βρει την $f^{-1}(x)$). Αν όμως έχουμε (ή μπορούμε να αποδείξουμε) ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της ,τότε μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = x$, ($x \in D_f \cap D_{f^{-1}}$) που πιθανόν να είναι πιο εύκολη από την (Ι) για να βρούμε τα κοινά σημεία των$C_f, C_{f^{-1}}$ χωρίς να βρούμε την f^{-1} (Άσκηση 5 στα επόμενα).

Παράδείγματα-Ασκήσεις Λυμένες

2/Α. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

i) $f(x) = 3x - 2$ **ii)** $f(x) = x^2 + 1$ **iii)** $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$ **iv)** $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

v) $f(x) = \ln(1-x)$ **vi)** $f(x) = e^{-x} + 1$ **vii)** $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ **viii)** $f(x) = |x-1|$

ΛΥΣΗ

Θα εξετάσουμε αρχικά ποιες από αυτές τις συναρτήσεις είναι «1-1».

i) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x^2 + 1$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3x - 2 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3} \text{ ή } y = \frac{x+2}{3}.$$

Επομένως η αντίστροφή της είναι:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3},\ x \in \mathbb{R}$$

ii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=x^2+1$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^{\ 2}+1=x_2^{\ 2}+1\Leftrightarrow x_1^{\ 2}=x_2^{\ 2}\Leftrightarrow \left(x_1=x_2\ ή\ x_1=-x_2\right)$$

Επομένως η f δεν είναι «1-1» και άρα δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση (θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι «1-1» με ένα αντιπαράδειγμα όπως π.χ $f(2)=f(-2)=5$

iii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)+1$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}&f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \left(x_1-1\right)\left(x_1-2\right)+1=\left(x_2-1\right)\left(x_2-2\right)+1\\&\Leftrightarrow x_1^{\ 2}-2x_1-x_1+2=x_2^{\ 2}-2x_2-x_2+2\Leftrightarrow x_1^{\ 2}-3x_1=x_2^{\ 2}-3x_2\\&\Leftrightarrow x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-3(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left(x_1+x_2-3\right)=0\Leftrightarrow\left(x_1=x_2\ ή\ x_1+x_2=3\right)\end{aligned}$$

Επομένως η f δεν είναι «1-1» και άρα δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση (θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι «1-1» με ένα αντιπαράδειγμα όπως π.χ $f(1)=f(2)=1$).

iv) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$ είναι το $\left(-\infty,1\right]$. Έστω $x_1,x_2\in\left(-\infty,1\right]$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x_1}=\sqrt[3]{1-x_2}\Leftrightarrow 1-x_1=1-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση:

$$f(x)=y\Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x}=y\Leftrightarrow 1-x=y^3\Leftrightarrow x=1-y^3\ \text{ή}\ \ y=1-x^3$$

Πρέπει όμως :

$$x=1-y^3\in\left(-\infty,1\right]\Leftrightarrow 1-y^3\le 1\Leftrightarrow -y^3\le 0\Leftrightarrow y^3\ge 0\Leftrightarrow y\ge 0$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x)=1-x^3, x\in\left[0,+\infty\right)$.

v) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\ln(x-1)$ είναι το $D_f=(1,+\infty)$. Έστω $x_1,x_2\in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \ln(x_1-1)=\ln(x_2-1)\Leftrightarrow x_1-1=x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση:

$$f(x)=y\Leftrightarrow \ln(x-1)=y\Leftrightarrow x-1=e^y\Leftrightarrow x=e^y+1 \text{ ή } y=e^x+1$$

Πρέπει όμως :

$$x=e^y+1\in(1,+\infty)\Leftrightarrow e^y+1>1\Leftrightarrow e^y>0\Leftrightarrow y\in\mathbb{R}$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x)=e^x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

vi) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=e^{-x}+1$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow e^{-x_1}+1=e^{-x_2}+1\Leftrightarrow e^{-x_1}=e^{-x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση:

$$f(x)=y\Leftrightarrow e^{-x}+1=y\Leftrightarrow e^{-x}=y-1\Leftrightarrow -x=\ln(y-1)\Leftrightarrow x=-\ln(y-1),\text{ με } y-1>0\Leftrightarrow y>1$$

$$\text{ή } y=\ln\left(\frac{1}{x-1}\right),\ x>1\ .$$

Επομένως η αντίστροφή της είναι:

$$f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1}{x-1}\right),\ x>1$$

vii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow\left(e^{x_1}-1\right)\cdot\left(e^{x_2}+1\right)=\left(e^{x_1}+1\right)\cdot\left(e^{x_2}-1\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{x_1+x_2}+e^{x_1}-e^{x_2}-1=e^{x_1+x_2}+e^{x_2}-e^{x_1}-1\Leftrightarrow 2e^{x_1}=2e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1», οπότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση:

$$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{e^x-1}{e^x+1}=y\Leftrightarrow\left(e^x-1\right)\cdot y=e^x+1\Leftrightarrow e^xy-y=e^x+1\Leftrightarrow e^xy-e^x=1+y\Leftrightarrow$$
ή
$$\Leftrightarrow e^x=\frac{y+1}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

$$y=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Πρέπει:

$$\frac{y+1}{y-1}>0\Leftrightarrow(y+1)\cdot(y-1)>0\Leftrightarrow(y<-1\text{ ή }y>1)$$

Επομένως η αντίστροφη της είναι:

$$f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

viii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=|x-1|$ είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:΄

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow|x_1-1|=|x_2-1|\Leftrightarrow\left(x_1-1=x_2-1\text{ ή }x_1-1=1-x_2\right)\Leftrightarrow\left(x_1=x_2\text{ ή }x_1+x_2=2\right)$$

Επομένως η f δεν είναι «1-1» και άρα δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(ae^x+1\right)$, $a\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $A\left(2\ln 2,\ 2\ln 3\right)$.

i) Να βρείτε την τιμή του α.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη .

iii) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}(\ln 7)$.

ΛΥΣΗ

i) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από το σημείο Α πρέπει:

$$f(2\ln 2) = 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(ae^{\ln 4}+1\right) = 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln(4a+1) = \ln 9 \Leftrightarrow 4a+1 = 9 \Leftrightarrow a = 2$$

ii) $D_f = \mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \ln\left(2e^{x_1}+1\right) = \ln\left(2e^{x_2}+1\right) \Leftrightarrow 2e^{x_1}+1 = 2e^{x_2}+1 \Leftrightarrow 2e^{x_1} = 2e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη.

iii) Θέτουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(2e^x+1\right) \Leftrightarrow 2e^x+1 = e^y \Leftrightarrow e^x = \frac{e^y-1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e^y-1}{2}\right)$$

Πρέπει:

$$\frac{e^y-1}{2} > 0 \Leftrightarrow e^y-1 > 0 \Leftrightarrow e^y > 1 \Leftrightarrow y > 0$$

Άρα $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{2}\right)$, $x > 0$.

iv) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (αυτό θα μπορούσαμε να το έχουμε ήδη αποδείξει στο (ii) ερώτημα και να εξασφαλίζαμε το «1-1»). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε διαδοχικά:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1} < 2e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1}+1 < 2e^{x_2}+1 \Leftrightarrow \ln\left(2e^{x_1}+1\right) < \ln\left(2e^{x_2}+1\right) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επειδή $f^{-1}(\ln 7) = \ln\left(\frac{e^{\ln 7}-1}{2}\right) = \ln 3$ η ανίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 7) \Leftrightarrow \ln\left(2e^x+1\right) < \ln 3 \Leftrightarrow 2e^x+1 < 3 \Leftrightarrow 2e^x < 2 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x - \ln(x-2)$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της f.

iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της f^{-1} με την ευθεία $y=3$.

ΛΥΣΗ

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(2,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \ln\frac{x_1}{x_1-2}=\ln\frac{x_2}{x_2-2}\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1-2}=\frac{x_2}{x_2-2}\Leftrightarrow x_1x_2-2x_1=x_1x_2-2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

ii) Θέτουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\ln\frac{x}{x-2}\Leftrightarrow \frac{x}{x-2}=e^y\Leftrightarrow (x-2)e^y=x\Leftrightarrow xe^y-x=2e^y\Leftrightarrow x\left(e^y-1\right)=2e^y\Leftrightarrow x=\frac{2e^y}{e^y-1}$$

Πρέπει:

$$e^y-1\neq 0\Leftrightarrow y\neq 0$$
$$x>2\Leftrightarrow \frac{2e^y}{e^y-1}>2\Leftrightarrow \frac{2e^y}{e^y-1}-2>0\Leftrightarrow \frac{2}{e^y-1}>0\Leftrightarrow e^y-1>0\Leftrightarrow e^y>1\Leftrightarrow y>0$$

Άρα:

$$f^{-1}(x)=\frac{2e^x}{e^x-1},\ x>0$$

iii) Έχουμε:

$$f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x-1}=3\Leftrightarrow 2e^x=3e^x-3\Leftrightarrow e^x=3\Leftrightarrow x=\ln 3$$

Επομένως το κοινό σημείο είναι $A\left(\ln 3, f^{-1}(\ln 3)\right)$ ή το $A(\ln 3,3)$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-2}$ και $g(x)=\sqrt{x^2-4}$. Να βρεθεί η συνάρτηση $(gof)^{-1}(x)$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = [2,+\infty)$ και η g το $D_g = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$.

Η gof έχει πεδίο ορισμού το:

$$D_{gof} = \{x \in [2,+\infty) / f(x) \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)\} = \{x \geq 2 / f(x) \leq -2 \text{ ή } f(x) \geq 2\}$$

Έχουμε:

$$f(x) \leq -2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \leq -2 \text{ το οποίο προφανώς ισχύει ή}$$
$$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow x-2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 6$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της gof είναι:

$$D_{gof} = \{x \in [2,+\infty) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x \geq 6\} = [6,+\infty).$$

Για κάθε $(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x-2}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x-2}\right)^2 - 4} = \sqrt{x-6}$

Έστω $(gof)(x) = h(x) = \sqrt{x-6}$. Θα βρούμε την αντίστροφη της $h(x)$, δηλαδή την $(gof)^{-1}$.

Έχουμε:

$h(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-6} = y \Leftrightarrow x-6 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2+6$, με $y \geq 0$ και $y^2+6 \geq 6 \Leftrightarrow y^2 \geq 0$ (αληθής για κάθε $y \in \mathbb{R}$)

Επομένως $y = x^2+6$ ή $(gof)^{-1}(x) = x^2+6,\ x \geq 0$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x,\ x \in \mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$

iii) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των γραφικων παραστάσεων της f και f^{-1}

ΛΥΣΗ

i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \ (1)$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \ (2)$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \ (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) , (2), (3) έχουμε $x_1^5 + x_1^3 + x_1 < x_2^5 + x_2^3 + x_2$ ή ισοδύναμα $f(x_1) < f(x_2)$.Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο f (άρα και «1-1» οπότε υπάρχει η f^{-1}) η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ θα είναι ισοδύναμη με την $f(x) = x$, δηλαδή έχουμε:

$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x = x \Leftrightarrow x^5 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

iii) Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και f^{-1}, αν υπάρχουν, θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$, δηλαδή θα αποτελούν λύση της εξίσωσης $f(x) = x$ (επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα). Επομένως είναι το σημείο $O(0, f(0))$ ή το $O(0,0)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x, x > 0$¨.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$.

Σημαντική παρατήρηση για τη λύση ανισώσεων της μορφής $f^{-1}(\varphi(x)) >< \omega(x)$ (1)

— Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού D_φ, D_ω των συναρτήσεων φ και ω.
— Βρίσκουμε το $f(A)$.
— Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$\omega(x) \notin A$ και εξετάζουμε αν υπάρχουν λύσεις της (1) ή

$\omega(x) \in A$ και τότε έχουμε:

$$f^{-1}(\varphi(x)) > \omega(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) > f(\omega(x)), & \text{αν η } f \text{ είναι γν. αύξουσα} \\ \varphi(x) < f(\omega(x)), & \text{αν η } f \text{ είναι γν. φθίνουσα} \end{cases}$$

και λύνουμε την ανίσωση που προκύπτει (που πιθανόν είναι ευκολότερη) στην οποία δεν εμφανίζεται η f^{-1}.

ΛΥΣΗ

i) $D_f=(0,+\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη (άρα θα είναι και «1-1» επομένως θα αντιστρέφεται).

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2 \ (1)$$
$$x_1<x_2 \ (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$$\ln x_1+x_1<\ln x_2+x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα αντιστρέφεται.

ii) Έχουμε:

$$Αν\ x\le 0, τότε\ f^{-1}(x)\in(0,+\infty)\Rightarrow f^{-1}(x)>0 \text{ που είναι αληθής}$$
$$Αν\ x<0, τότε\ f^{-1}(x)>x\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x>f(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>x+\ln x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln x<0\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x<1\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<1$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,0]\cup(0,1)=(-\infty,1)$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+2f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε την αντίστροφή της (**προσέξτε το σημείο αυτό στη λύση**).

ΛΥΣΗ

i) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ (1). Είναι $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1» και επομένως η f αντιστρέφεται.

ii) Αφού η δοθείσα σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και έχουμε:

$$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3 + 2f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x = f^{-1}(x) \text{ (3)}$$

Άρα η συνάρτηση $f^{-1}(x) = x^3 + 2x, x \in \mathbb{R}$ (I) είναι η αντίστροφη της f; Όχι διότι η σχέση (3) ισχύει μόνο για κάθε $x \in f(A)$ και όχι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (είναι πιθανή αντίστροφη της f).

Άρα οφείλουμε να αποδείξουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $g(x) = x^3 + 2x$ να αποτελεί την αντίστροφη της f.

Αν $y_o \in \mathbb{R}$, τότε αν $x_0 = 2y_0 + y_0^3$ έχουμε διαδοχικά:

$$f^3(x_0) + 2f(x_0) = x_0 = 2y_0 + y_0^3$$
$$f^3(x_0) + 2f(x_0) - 2y_0 - y_0^3 = 0 \Leftrightarrow \left(f(x_0) - y_0\right)\left(f^2(x_0) + f(x_0)y_0 + y_0^2 + 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) = y_0$$

Επομένως $f^{-1}(x) = x^3 + 2x, x \in \mathbb{R}$ (I) είναι η αντίστροφη της f.

Α. Κατανοώ

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

i) $f(x) = -2x + 3$ **ii)** $f(x) = -2x + 3$ **iii)** $f(x) = (x-3)(x-5) - 7$ **iv)** $f(x) = \sqrt[5]{3-x}$

v) $f(x) = \ln(3+5x)$ **vi)** $f(x) = e^{-3x} - 5$ **vii)** $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ **viii)** $f(x) = |3x+1|$

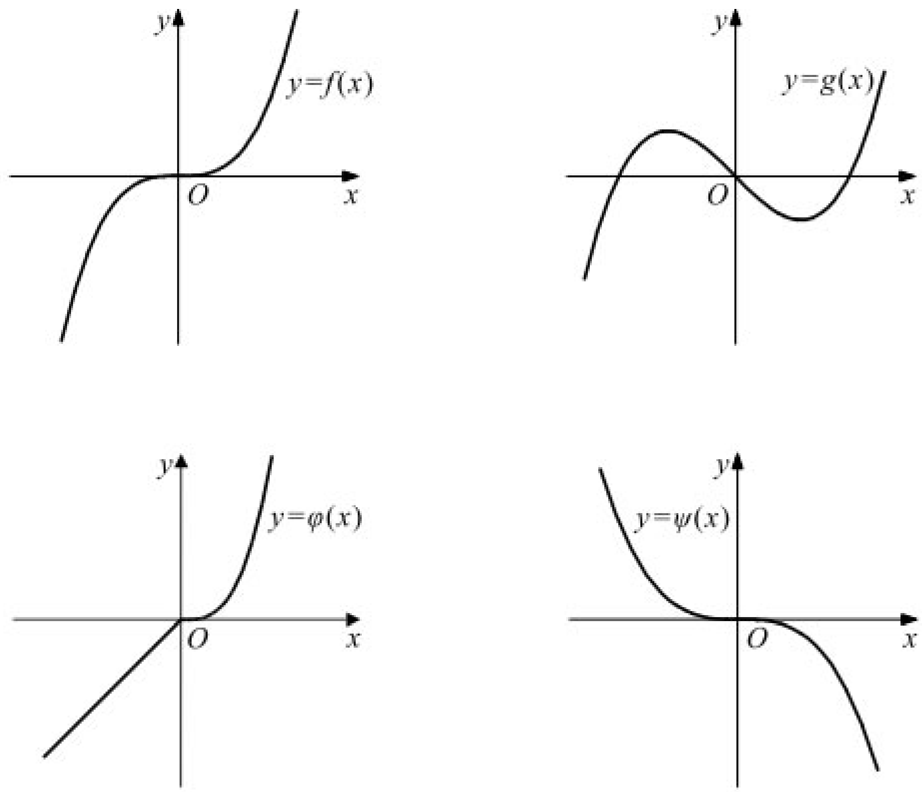
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών των επόμενων συναρτήσεων

i) $f(x) = \ln\left(x^3 - 1\right) + 2$ **ii)** $g(x) = e^{x^3-1} + 2$

Β. Εμπεδώνω

3 (Άσκηση από το σχολικό βιβλίο)

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, φ και ψ.



Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f, g, φ, ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\ln x-2, & αν\ 0<x<1\\ \sqrt{x-1}, & αν\ x\geq 1\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2)=10$ και $(fof)(x)=3x-5$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστέψιμη

ii) Να βρείτε το $f^{-1}(2)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}\left((|x|-2)-5\right)\right)=2$$

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της

ii) Η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα

5. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3(x)+2f(x)=12e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»

iv) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(|x|-3\right)=e^{2\ln 2}+\ln\frac{1}{e^2}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{a-e^x}{1+e^x}$, $a\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 3,\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

i) Να βρείτε την τιμή του α

ii) Να αποειξετε ότι η f είναι «1-1»

iii) Να βρείτε την f^{-1}

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+1,\ g(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1»

ii) Να βρείτε την f^{-1}

iii) Να βρείτε την gof^{-1}

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3(x)+2f(x)+x=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

iii) Να βρείτε την f^{-1}

9. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της , να αποδείξετε ότι και η αντίστροφή της f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στο πεδίο ορισμού της.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3\left(x\right)-3f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)=3x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

11. Δίνονται οι αντιστρέψιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=4x+2$ και $g(x)=2f^{-1}(x)+1$. Να βρείτε την συνάρτηση g^{-1}.

ΜΑΘΗΜΑ 11^{o}

Γενική επανάληψη

Προετοιμάζομαι για τις εξετάσεις

Α. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

2. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x **.**

3. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

4. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}

5. Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}\left(f(x)\right) = x,\ x \in A$ και $f\left(f^{-1}(y)\right) = y,\ y \in f(A)$

6. Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε υπάρχουν σημεία της με την ίδια τεταγμένη.

7. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

8. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x.

9. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

10. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

11. Κάθε συνάρτηση, που είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, είναι και 1-1 .

12. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

13. Δύο συναρτήσεις που έχουν τον ίδιο τύπο εναι πάντα ίσες.

14. Οι συναρτήσεις fof^{-1} και $f^{-1}of$, όταν ορίζονται, είναι πάντα ίσες.

Β. Ερωτήσεις Πολλαπλής επιλογής

Στις επόμενες προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \cdot g$ είναι:

α. Το $\mathbb{R}$ **β.** Το Β **γ.** Το $A \cup B$ **δ.** $A \cap B$

2. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ είναι:

α. $A \cap B$ β. $\{x \in A \cap B \,/\, g(x) \neq 0\}$ **γ.** $\{x \in A \cap B \,/\, f(x) \neq 0\}$ **δ.** Το Α

3. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης gof

α. $\{x \in A \,/\, f(x) \in B\}$ **β.** $\{x \in B \,/\, f(x) \in A\}$ **γ.** $A \cap B$ **δ.** $A \cup B$

4. Η εξίσωση y = f(x) επαληθεύεται

α. μόνο από τα σημεία της C_f **β.** Από όλα τα σημεία του επιπέδου xOy

γ. Μόνο από τα σημεία με $x > 0$ **δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

5. Η συνάρτηση $f(x) = -x^4$ είναι :

α. Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **β.** Γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

γ. «1-1» **δ.** Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 0]$

Γ. Ασκήσεις Λυμένες

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 2x}$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y.

Δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = \dfrac{2016^3 - 4 \cdot 2014}{2016^2 + 2 \cdot 2014}$

ΛΥΣΗ

Α. Για το πεδίο ορισμού της $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+2x}$ έχουμε:

$$x^2+2x\neq 0 \Leftrightarrow x(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq 0 \ \kappa\alpha\iota\ x+2\neq 0)\Leftrightarrow (x\neq 0 \ \kappa\alpha\iota\ x\neq -2)$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{-2,0\}$$

Επομένως $D_f=\mathbb{R}-\{-2,0\}$

Β. Για κάθε $x\in D_f$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2+2x}=\frac{x(x^2-4)}{x(x+2)}=\frac{x(x+2)(x-2)}{x(x+2)}=x-2$$

Γ. Η C_f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$. Για τον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^3-4x}{x^2+2x}=0\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow x(x^2-4)=0\Leftrightarrow (x=0 \ \acute{\eta}\ x=2\ \acute{\eta}\ x=-2)$$

Επομένως τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(2,0)$.

Δ. Έχουμε:

$$\Pi=\frac{2016^3-4\cdot 2014}{2016^2+2\cdot 2014}=f(2016)=2016-2=2014$$

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Β. Να απλοποιήσετε τη συνάρτηση $h(x)=[f(x)]^2\cdot(4-x^2)$.

Γ. Αν $h(x)=\dfrac{2+x}{x-4}$, $x\neq 4$ να αποδείξετε ότι η h είναι «1-1» και να βρείτε την αντίστροφή της.

ΛΥΣΗ

Α. Πρέπει:

$$-x^2+6x-8>0\Leftrightarrow 2<x<4$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=(2,4)$

Β. Έχουμε:

$$h(x)=[f(x)]^2\cdot(4-x^2)=\frac{1}{-x^2+6x-8}\cdot(4-x^2)=\frac{1}{(2-x)(x-4)}\cdot(2-x)(2+x)=\frac{x+2}{x-4}$$

Γ. Έστω $x_1,\ x_2\neq 4$ με $h(x_1)=h(x_2)$

$$h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow\frac{x_1+2}{x_1-4}=\frac{x_2+2}{x_2-4}\Leftrightarrow x_1x_2-4x_1+2x_2-8=x_1x_2-4x_2+2x_1-8\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6x_1=-6x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση h είναι «1-1» και επομένως υπάρχει η αντίστροφή της. Έχουμε:

$$y=h(x)\Leftrightarrow y=\frac{x+2}{x-4}\Leftrightarrow y(x-4)=x+2\Leftrightarrow yx-x=4y+2\Leftrightarrow x=\frac{4y+2}{y-1},y\neq 1$$

Ακόμα πρέπει $x\neq 4\Leftrightarrow\frac{4y+2}{y-1}\neq 4\Leftrightarrow 2\neq -4$, που είναι αληθής.

Άρα η αντίστροφη της h είναι η $h^{-1}(x)=\frac{4x+2}{x-1},x\neq 1$.

ΘΕΜΑ 3$^{\text{O}}$

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\frac{4\mathrm{x}^2-1}{2\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+1}$ *και* $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\frac{1}{2}$.

Α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g

Β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y

Γ. Να απλοποιήσετε το τύπο της συνάρτησης f .

Δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

ΛΥΣΗ

Α. Πρέπει:

$$2x^2-3x+1\neq 0\Leftrightarrow\left(x\neq 1,x\neq\frac{1}{2}\right)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=\mathbb{R}-\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}$

Για τη g είναι $D_g=\mathbb{R}$

Β. Το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0,-1)$, αφού $f(0)=-1$

Για τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-1}{2x^2-3x+1}=0 \Leftrightarrow 4x^2-1=0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{2},\ x=-\frac{1}{2}\right)$$

Επομένως είναι $B\left(\frac{1}{2},0\right), \Gamma\left(-\frac{1}{2},0\right)$

Η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{2}$ έχει κοινό σημείο μόνο με τον άξονα $y'y$, το $\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Γ. Για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}-\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{4x^2-1}{2x^2-3x+1}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{(x-1)(2x-1)}=\frac{2x+1}{x-1}$$

Δ. Τα κοινά σημεία των C_f, C_g προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{4x^2-1}{2x^2-3x+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 8x^2-2=2x^2-3x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^2+3x-3=0\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0\Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{2}, x=-1\right)$$

Επομένως τα κοινά τους σημεία είναι $K\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \Lambda\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 4^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\lambda x+\kappa$, $x\in\mathbb{R}$

Α. Να βρείτε τα κ και λ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ να διέρχεται από τα σημεία Α(-1,-3) και Β($-\frac{1}{2}$,-2)

Β. Για $\kappa=-1, \lambda=2$, να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση φ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ. Να βρείτε την αντίστροφη της φ.

ΛΥΣΗ

Α. Για να διέρχεται η συνάρτηση φ από τα σημεία A(-1,-3) και B($-\frac{1}{2}$,-2) πρέπει να ισχύει:

$$\varphi(-1) = -3 \Leftrightarrow -\lambda + \kappa = -3 \ (1)$$
$$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \lambda + \kappa = -2 \Leftrightarrow -\lambda + 2\kappa = -4 \ (2)$$

Από τη λύση του συστήματος (1) και (2) προκύπτει $\kappa = -1, \lambda = 2$

Β. Για $\kappa = -1, \lambda = 2$ η συνάρτηση γίνεται $\varphi(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$. Αφού $\varphi(0) = -1$ η φ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{K}(0,-1)$ και τον άξονα $y'y$ όταν $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, δηλαδή στο σημείο $\Lambda\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Γ. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η φ είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

Έχουμε:

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα υπάρχει η αντίστροφη φ^{-1} της φ και έχουμε:

$$y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}, y \in \mathbb{R}$$

Επομένως $\varphi^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}, x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 5^x + 3^x - 1$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να λύσετε την εξίσωση :

$$5^{x^2-x} - 3^{x+1} = 5^{x+1} - 3^{x^2-x}$$

iii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$5^{x^2+x+1} - 5^{x+3} > 3^{x+3} - 3^{x^2+x+1}$$

ΛΥΣΗ

i) Θα εξετάσουμε την μονοτονία της f (αφού δεν είναι εύκολη η χρήση του ορισμού της «1-1» συνάρτησης).

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 5^{x_1} < 5^{x_2} \quad (1)$$
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$5^{x_1} + 3^{x_1} < 5^{x_2} + 3^{x_2} \Rightarrow 5^{x_1} + 3^{x_1} - 1 < 5^{x_2} + 3^{x_2} - 1 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα και «1-1».

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$5^{x^2-x} - 3^{x+1} = 5^{x+1} - 3^{x^2-x} \Leftrightarrow 5^{x^2-x} + 3^{x^2-x} = 5^{x+1} + 3^{x+1} \Leftrightarrow$$
$$f\left(x^2 - x\right) = f\left(x+1\right) \Leftrightarrow x^2 - x = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

iii) Έχουμε διαδοχικά:

$$5^{x^2+x+1} - 5^{x+3} > 3^{x+3} - 3^{x^2+x+1} \Leftrightarrow 5^{x^2+x+1} + 3^{x^2+x+1} > 5^{x+3} + 3^{x+3} \Leftrightarrow 5^{x^2+x+1} + 3^{x^2+x+1} + 1 > 5 \Leftrightarrow 5^{x+3} + 3^{x+3} + 1$$
$$\Leftrightarrow f\left(x^2 + x + 1\right) > f\left(x+3\right) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \left(x < -\sqrt{2} \text{ ή } x > \sqrt{2}\right)$$

Δ. Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{(2x^2 + 7x - 15)(4x - 4)}{8x - 12}$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

Β. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

Γ. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{f(3)} + \sqrt[3]{8f(4)}}{\sqrt{f(2)} - 3} = -5(\sqrt{7} + 3)$

ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2x^2+3x+1$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f (x)

Β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η f έχει:

Β.1. θετικές τιμές

Β.2. αρνητικές τιμές

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$

ΘΕΜ 3^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3\left(x\right)+3f\left(x\right)=14e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Α. Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι «1-1».

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\left|x\right|-5\right)=e^{2\ln 2}+\ln\dfrac{1}{e^2}$.

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την fog να ορίζεται και να είναι «1-1»

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1-1».

Β. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g\left(f\left(\left|\ln x\right|\right)+1\right)=g\left(x+2\right)$, να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=e^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 5^{Ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R} \text{ και } \left(fof\right)(x)+\left(gof\right)(x)=5x-2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Β. Να βρείτε την αντίστροφη της f σταρτήσει των g,f.

ΘΕΜΑ 6^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=x^{2015}+x^{2017}+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι η φ είναι «1-1».

Β. Να λύσετε την ανίσωση $\varphi(\varphi(x))<-1$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\varphi(\varphi(x))=-1$.

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(ae^{x}+1\right),\ a\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(2\ln 2, 2\ln 3\right)$.

Α. Να βρείτε το α.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Γ. Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} της f.

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x\right)<f^{-1}\left(\ln 7\right)$

ΘΕΜΑ 8Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική παράστασή της C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(3,2\right), B\left(5,9\right)$.

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Β. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(2+f^{-1}(x^2+x)\right)=9$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(f^{-1}(x^2-8x)-2\right)<2$

ΘΕΜΑ 9Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(2)=10 \text{ και } \left(fof\right)(x)=3x-5 \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

Β. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(f^{-1}\left(|x|-2\right)-5\right)=2$

ΘΕΜΑ 10Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^3+2x$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Β. Να βρείτε το $f^{-1}(3)$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(f\left(x^2-5\right)+15\right)=2$

ΘΕΜΑ 11^{O}

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\ln\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

iii) Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} της f καθώς και το σύνολο τιμών της f.

iv) Να λύσετε την εξίσωση**:**

$$\ln\left(\frac{\left(e^{a^{3}-2a^{2}+1}-1\right)\cdot\left(e^{a^{2}+1}+1\right)}{\left(e^{a^{3}-2a^{2}+1}+1\right)\cdot\left(e^{a^{2}+1}-1\right)}\right)=0$$

ΘΕΜΑ 12^{O}

Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=e^{x}+1$ και $g(x)=1-\ln x$

i) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως μονότονες στο πεδίο ορισμού τους.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ και τα διαστήματα στα οποία η C_g βρίσεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης $f-g$ με την ευθεία $y=e$.

iv) Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και $f^{-1}og$

v) Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(\dfrac{a^{2016}-a}{1-a}\right)<0$

ΘΕΜΑ 13^{O}

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f^{3}\left(x\right)+2f^{2}\left(x\right)+3f\left(x\right)=2x+1,\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii) Να βρείτε την αντίστροφη της f.

ΘΕΜΑ 14$^{\text{Ο}}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{\alpha}{x}+\alpha$ με $x>0$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$, τότε:

Α. Να αποδείξετε οτι $\alpha=-1$.

Β. Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln\left(2x^2+2\right)-\frac{1}{x^2+3}>\ln\left(x^2+3\right)-\frac{1}{2x^2+2}$$

ΘΕΜΑ 15$^{\text{Ο}}$

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f\left(f(x)\right)=x,\ f(3)=1,\ g(x)=e^{f(x)}+e^x$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\left(gof\right)(x)=e^x+e$.

Διαγώνισμα θεωρίας (30΄)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι ονομάζουμε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ;

Β. Τι ονομάζουμε συνάρτηση «1-1» στο πεδίο ορισμού της;

Γ. Να δώσετε ένα παράδειγμα συνάρτησης «1-1» που δεν είναι γνησίως μονότονη.

Δ. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f;

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

2. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

3. Κάθε συνάρτηση, που είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, είναι και 1-1 .

4. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν για κάθε x ∈ A ισχύει $f(x) = g(x)$.

5. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

Β. Στις επόμενες προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \cdot g$ είναι:

α. Το $\mathbb{R}$ **β.** Το Β **γ.** Το $A \cup B$ **δ.** $A \cap B$

2. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ είναι:

α. $A \cap B$ β. $\{x \in A \cap B \,/\, g(x) \neq 0\}$ **γ.** $\{x \in A \cap B \,/\, f(x) \neq 0\}$ **δ.** Το Α

3. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης gof

α. $\{x \in A \,/\, f(x) \in B\}$ **β.** $\{x \in B \,/\, f(x) \in A\}$ **γ.** $A \cap B$ **δ.** $A \cup B$

4. Η εξίσωση y = f(x) επαληθεύεται

α. μόνο από τα σημεία της C_f **β.** Από όλα τα σημεία του επιπέδου xOy

γ. Μόνο από τα σημεία με $x > 0$ **δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

5. Η συνάρτηση $f(x) = -x^4$ είναι :

α. Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. Γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

γ. «1-1»

δ. Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 0]$

Επαναληπτικό Διαγώνισμα στις Συναρτήσεις

Θέμα Α

A.1 Πότε μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 ;

(Μονάδες 8)

A.2 Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

(Μονάδες 7)

A.3 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(Μονάδες 5Χ2=10)

1. Μια συνάρτηση f που είναι «1-1» σε ένα διάστημα Δ είναι πάντα γνησίως μονότονη στο Δ.

2. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$, τότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f.

3. Αν μία συνάρτηση είναι «1-1» τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

4. Αν για μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ ισχύει $-2015 \leq f(x) < 2015$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή το 2015 και ελάχιστη τιμή το -2015.

5. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄ των αξόνων x΄x και y΄y.

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση g : (0, ∞) →R που είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,-2)$. Αν για την συνάρτηση f ισχύει:

$$f(x) = \ln x - g(x) \text{ για κάθε } x > 0$$

B.1 Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 10)

B.2 Να λύσετε την ανίσωση:

$$2\ln x < 2 + g(x^2) \text{ στο } (0, +\infty) .$$

(Μονάδες 15)

Θέμα Γ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f\left(1+f(x)\right)=2x-6+f(x)\ (1),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

i) Η f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 8)

ii) $f(3)=2$

(Μονάδες 7)

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(1+f\left(x^2+x+1\right)\right)=f\left(1+f(3)\right)$$

(Μονάδες 10)

Θέμα Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f\left(x-y\right)=f(x)\cdot f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

Δ.1 Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ ή $f(0)=1$.

(Μονάδες 7)

Δ.2 Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να βρείτε την συνάρτηση f.

(Μονάδες 8)

Δ. 3 Αν $f(0)\neq 0$, τότε:

Δ. 3. 1 Να αποδείξετε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Δ. 3. 2 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Α

Γ΄ Λ Υ Κ Ε Ι Ο Υ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

(Α΄ΜΕΡΟΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Σχολικό Έτος: 2016-2017

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες των ορίων

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

ΜΑΘΗΜΑ 12ο
Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$,

Εισαγωγή

Η έννοια του ορίου γεννήθηκε στην προσπάθεια των μαθηματικών να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως:

— Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;

— Τι ονομάζουμε εφαπτομένη μιας καμπύλης σε ένα σημείο της;

— Τι ονομάζουμε εμβαδό ενός μικτόγραμμου χωρίου;

Στις παραγράφους που ακολουθούν, αρχικά προσεγγίζουμε την έννοια του ορίου "διαισθητικά", στη συνέχεια διατυπώνουμε τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ορίου και μερικές βάσικές ιδιότητές του και τέλος, εισάγουμε την έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης.

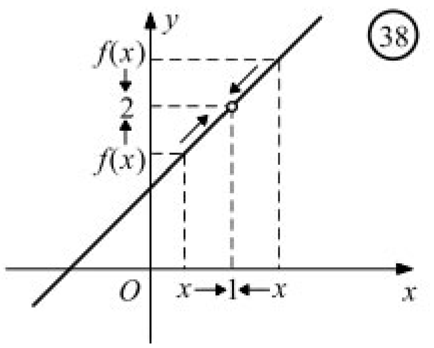
Η έννοια του ορίου

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο D_f = **R**−{1} και γράφεται:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \qquad x \neq 1.$$



Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία y =x + 1 με εξαίρεση το σημείο Α(1,2) (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:

"Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x΄x, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το f(x), κινούμενο πάνω στον άξονα y΄y, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές f(x) είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για

όλα τα $x \neq 1$ που είναι αρκούντως κοντά στο 1".

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε;

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

και διαβάζουμε:

"το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο 1, είναι 2".

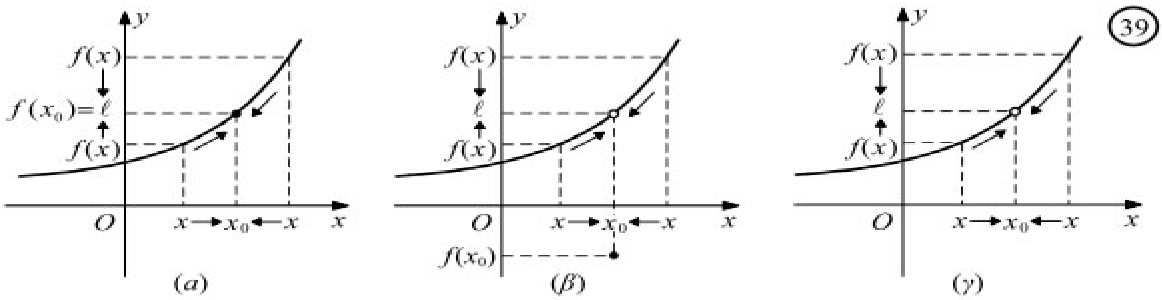
Γενικά:

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

και διαβάζουμε:

"το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ" ή "το όριο της f(x) στο x_0 είναι ℓ ".



ΣΧΟΛΙΟ

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής:

$$(a, x_0) \cup (x_o, \beta) \text{ ή } (a, x_0) \text{ ή } (x_o, \beta)$$

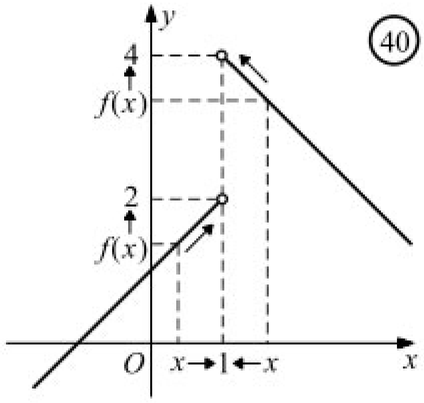
— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

Έστω, τώρα, η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases},$$

της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.



Παρατηρούμε ότι:

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από αριστερά (x<1), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2 .$$

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από δεξιά (x>1), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θελουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=4 .$$

Γενικά:

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$$

και διαβάζουμε:

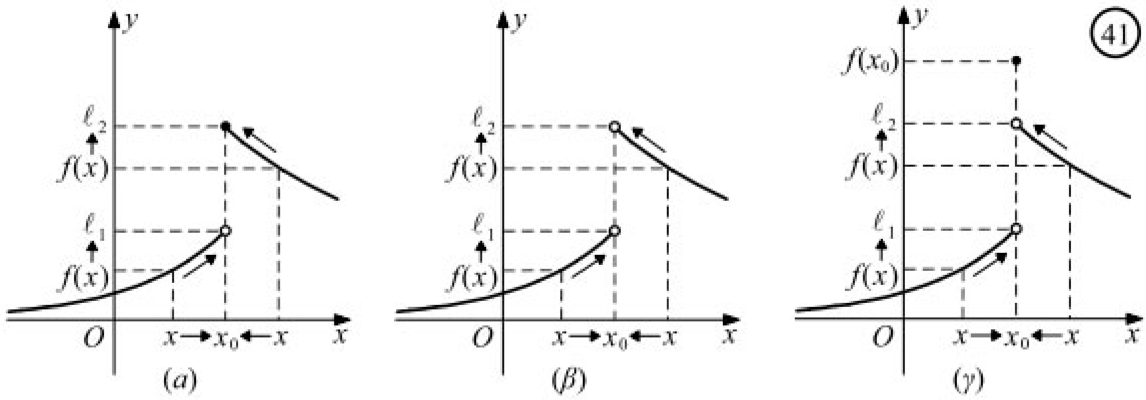
"το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1".

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$

και διαβάζουμε:

"το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2".



Τους αριθμούς $l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και $l_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

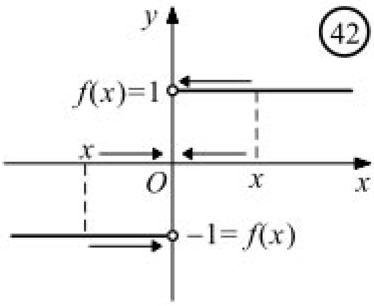
Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (Σχ. 42) δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$, αφού:

— για $x < 0$ είναι $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$, οπότε $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$,

— για $x > 0$ είναι $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$, οπότε $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$,



και έτσι:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

● Στα προηγούμενα γνωρίσαμε την έννοια του ορίου διαισθητικά. Είδαμε ότι, όταν γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, εννοούμε ότι οι τιμές f(x) βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο ℓ, για όλα τα x ≠ x_0 τα οποία βρίσκονται "αρκούντως κοντά στο x_0". Για να διατυπώσουμε, τώρα, τα παραπάνω σε μαθηματική γλώσσα εργαζόμαστε ως εξής

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0, τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται, όπως είδαμε, με $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)$, θα εννοούμε ότι υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι ίσο με ℓ.

Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$(\alpha) \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (f(x)-\ell) = 0$$

$$(\beta) \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \ell$$

Αποδεικνύεται ότι :

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_o, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$$

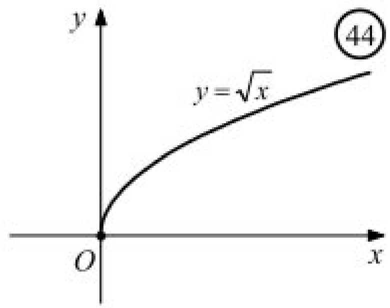
Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0,β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής

● (α, x_0), τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad (\Sigma\chi.\ 44)$$

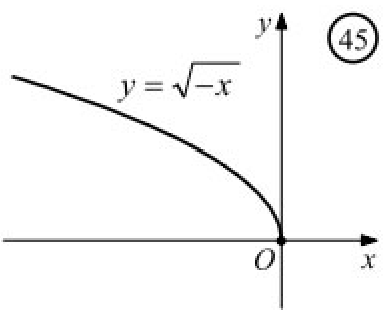


● Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0,β), τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{-x} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0 \quad (\Sigma\chi.\ 45)$$



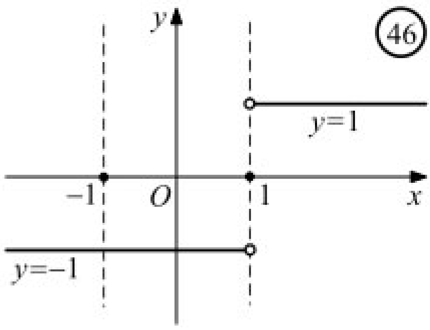
ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

Έτσι για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0=0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1,0)\cup(0,1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$



ΣΥΜΒΑΣΗ

Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα Ρ θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_o,\beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα Ρ.

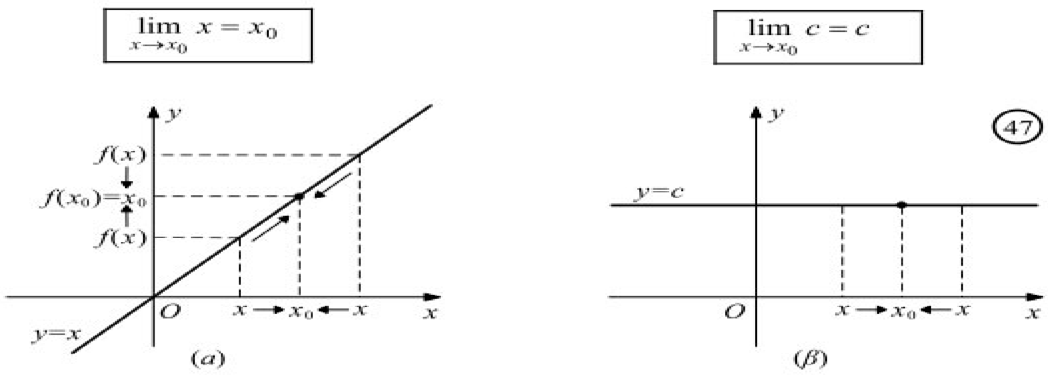
β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα Ρ, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα Ρ, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ είναι θετική κοντά στο $x_0 = 0$, αφού ορίζεται στο σύνολο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και είναι θετική σε αυτό.

Όριο ταυτοτικής - σταθερής συνάρτησης

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι :

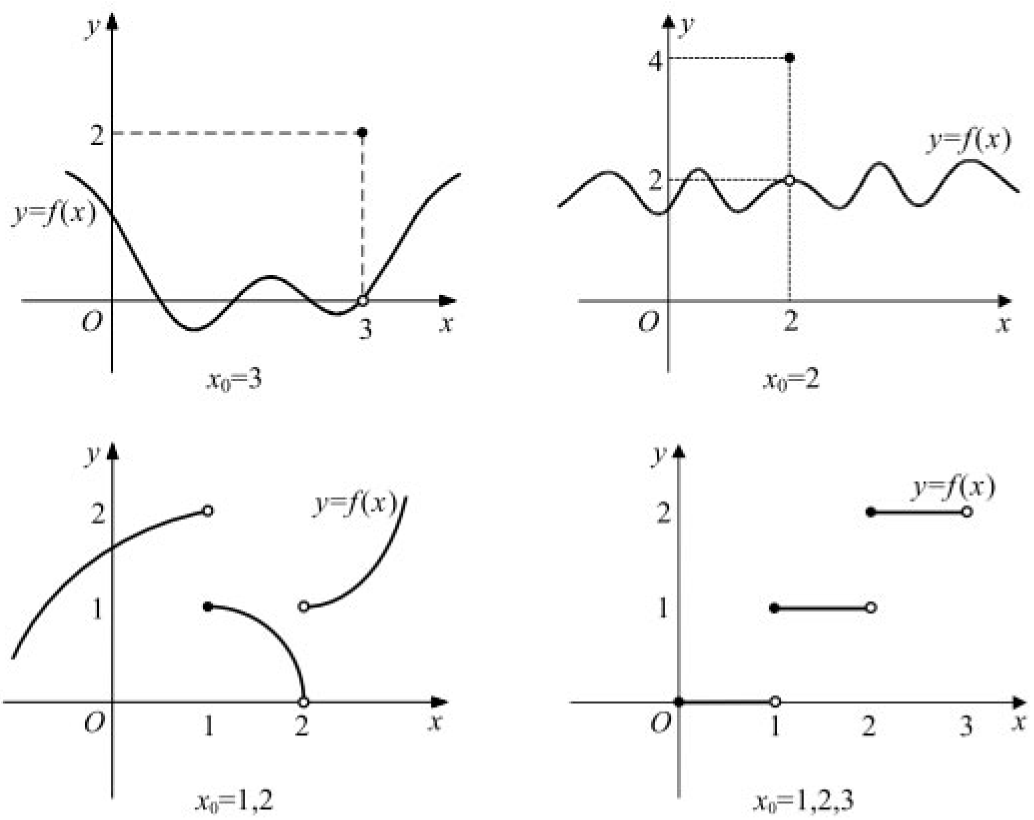


Η πρώτη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της ταυτοτικής συνάρτησης f(x) = x (Σχ. 47α) στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο x_0, ενώ η δεύτερη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της σταθερής συνάρτησης g(x) = c (Σχ. 47β) στο x_0 είναι ίσο με c.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ

1/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και το f(x_0), εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι :



4/Α (Σχολικό βιβλίο). Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο [−2, +∞) και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i) $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$

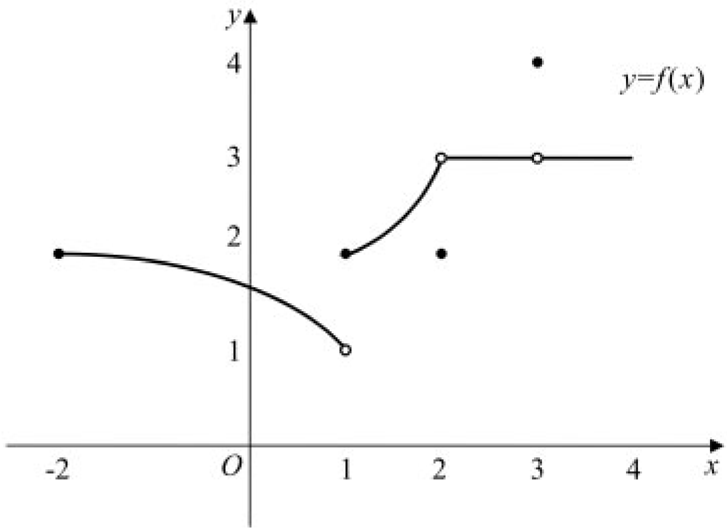
ii) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

iii) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

iv) $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

v) $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$

vi) $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$



Β. Εμπεδώνω

2. (Σχολικό βιβλίο). Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

i) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$, $x_0 = 2$

ii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

iii) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ -x+1, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

iv) $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x_0 = 0$.

3. (Σχολικό βιβλίο). Ομοίως όταν :

i) $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$, $x_0 = 1$ ή $x_0 = -1$

ii) $f(x) = \dfrac{(x+1)\sqrt{9x^2-6x+1}}{3x-1}$, $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

5. (Σχολικό βιβλίο). Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$ με $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda^2 - 6$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του λ ∈ **R**, για τις οποίες υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$

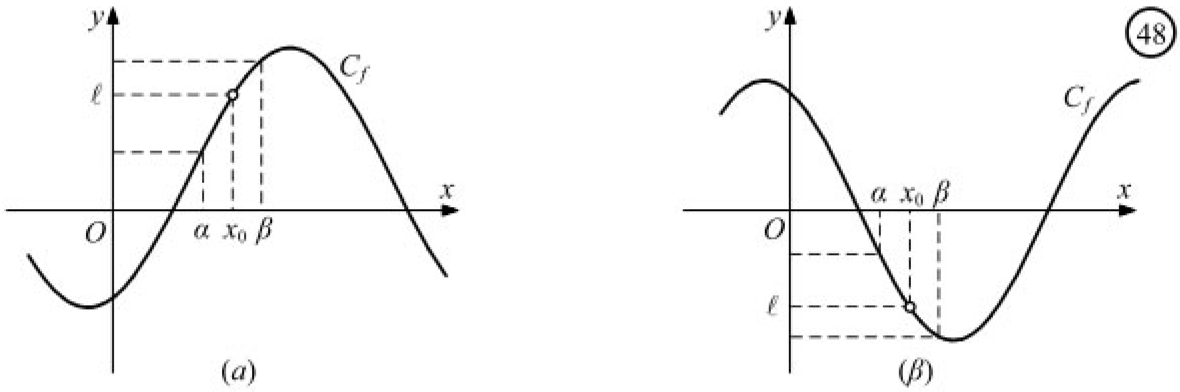
Όριο και διάταξη

Για το όριο και τη διάταξη αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48α)

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48β)



ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} x^v = x_0^v.$$

— Έστω τώρα το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{και} \quad x_0 \in \mathrm{R}.$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0)$$

$$= \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$= \alpha_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - 6x^2 + 7x - 2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 7\cdot 2 - 2 = -4.$$

— Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου P(x), Q(x) πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbf{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

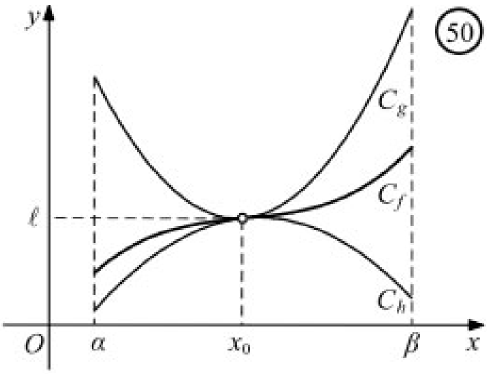
$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{εφόσον} \quad Q(x_0) \neq 0$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2+2x+1} = \frac{2^2+4}{2^2+2\cdot 2+1} = \frac{8}{9}.$$

Κριτήριο παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι "κοντά στο x_0" μια συνάρτηση f "εγκλωβίζεται" (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g. Αν, καθώς το x τείνει στο x_0, οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ. Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x \to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$.

Πράγματι, για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x|,$$

Οπότε:

$$-|x| \le x\eta\mu\frac{1}{x} \le |x|.$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x \to 0}|x| = 0$, σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, έχουμε:

$$\lim_{x \to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$$

.

Τριγωνομετρικάόρια

Το κριτήριο παρεμβολής είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό ορισμένων τριγωνομετρικών ορίων. Αρχικά αποδεικνύουμε[1] ότι:

$$|\eta\mu x| \leq |x| \ , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν } x = 0\text{)}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

- $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.

- α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$
- β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Με τις ιδιότητες που αναφέρουμε μέχρι τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τα όρια απλών συναρτήσεων. Αν, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(g(x)\right)$, της σύνθετης συνάρτησης fog στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε u = g(x).

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

[1] Η απόδειξη παραλείπεται αφού είναι εκτός εξεταστέας ύλης.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου τα όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)$ με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: "g(x) ≠ u_0 κοντά στο x_0" και γιαυτό δεν θα ελέγχεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Εύρεση ορίου με ιδιότητες)

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(x^2+1\right)^9\cdot\left|x^3-1\right|\right]$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left[(x^2+1)^9\,|x^3-1|\right]=\lim_{x\to 0}(x^2+1)^9\cdot\lim_{x\to 0}|x^3-1|$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(x^2+1)\right]^9\cdot\left|\lim_{x\to 0}(x^3-1)\right|$$

$$=1^9\cdot|-1|=1\,.$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΟΡΙΟΥ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (Μορφή $\frac{0}{0}$)

1η περίπτωση (Ρητή συνάρτηση)

Αν $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα. Παραγοντοποιούμε τους όρους του κλάσματος και έχουμε:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-x_0)\cdot R(x)}{(x-x_0)K(x)}=\frac{R(x)}{K(x)}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{K(x)}\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε όμως ότι για x = 2 μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος.

Έχουμε:

$$f(x)=\frac{x(x^2-5x+6)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-3)}{x+2}=\frac{x^2-3x}{x+2}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{x+2}=\frac{4-3\cdot 2}{2+2}=-\frac{1}{2}.$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 1

2η περίπτωση (Άρρητη συνάρτηση)

Αν $f(x)=\dfrac{\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}}{P(x)}$, πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση και έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}}{P(x)}=\frac{\left(\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}\right)\cdot\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)}{P(x)\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)}=\frac{A(x)-B(x)}{P(x)\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)}=..$$

Ή

$$f(x)=\frac{\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}}{\sqrt{\Gamma(x)}-\sqrt{\Delta(x)}}=\frac{\left(\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}\right)\cdot\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)\left(\sqrt{\Gamma(x)}+\sqrt{\Delta(x)}\right)}{\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)\left(\sqrt{\Gamma(x)}-\sqrt{\Delta(x)}\right)\left(\sqrt{\Gamma(x)}+\sqrt{\Delta(x)}\right)}=\frac{\left(A(x)-B(x)\right)\cdot\left(\sqrt{\Gamma(x)}+\sqrt{\Delta(x)}\right)}{\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}\right)\left(\Gamma(x)-\Delta(x)\right)}=...$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}$$

ΛΥΣΗ

Για x =1 μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt{x^2+3}-2x$ και έτσι έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(2x)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}$$

$$=\frac{-3x^2+3}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\frac{\lim_{x\to 1}(-3(x+1))}{\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{-6}{\sqrt{4}+2}=-\frac{3}{2}.$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 2.

3η περίπτωση (τρίτη ρίζα)

Αν $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{A(x)}-\sqrt[3]{B(x)}}{P(x)}$ ή $(x)=\dfrac{\sqrt[3]{A(x)}+\sqrt[3]{B(x)}}{P(x)}$, τότε έχοντας υπόψη μας τις ταυτότητες:

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$$

πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση:

$$\left(\sqrt[3]{A(x)}\right)^2\pm\sqrt[3]{A(x)}\cdot\sqrt[3]{B(x)}+\left(\sqrt[3]{B(x)}\right)^2$$

καταλήγουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{A(x)}-\sqrt[3]{B(x)}}{P(x)}=\frac{A(x)-B(x)}{\left(A(x)-B(x)\right)Q(x)\cdot\left[\left(\sqrt[3]{A(x)}\right)^2+\sqrt[3]{A(x)}\cdot\sqrt[3]{B(x)}+\left(\sqrt[3]{B(x)}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{A(x)}\right)^2+\sqrt[3]{A(x)}\cdot\sqrt[3]{B(x)}+\left(\sqrt[3]{B(x)}\right)^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$$

ΛΥΣΗ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{(x-1)(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}=$$

$$=\frac{1}{(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}=\frac{1}{6}$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 3.

4η περίπτωση (Κλαδική συνάρτηση-πλευρικά όρια)

$$f(x)=\begin{cases} A(x), & \alpha\nu\ x\geq x_0 \\ B(x), & \alpha\nu\ x<x_0 \end{cases}$$

Βρίσκουμε τα:

$$\lim_{x\to x_0^+} A(x)=....l_1$$
$$\lim_{x\to x_0^+} B(x)=....l_2$$

— Αν $l_1=l_2=l$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

— Αν $l_1\neq l_2$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο στο $x_0 = 1$ της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-4, & x<1 \\ -\dfrac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases}.$$

ΛΥΣΗ

Αν $x < 1$, τότε $f(x) = 3x^2 - 4$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(3x^2-4)=3\cdot 1^2-4=-1.$$

Αν $x > 1$, τότε $f(x) = -1/x$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 4.

5η περίπτωση (Κριτήριο της παρεμβολής)

Τα όρια της μορφής :

$$\lim_{x\to 0}\left[g(x)\eta\mu\frac{A(x)}{x^\nu}\right]$$
$$\lim_{x\to 0}\left[g(x)\sigma\upsilon\nu\frac{A(x)}{x^\nu}\right]$$

υπολογίζονται συνήθως με το Κ.Π. ως εξής:

$$\left|g(x)\eta\mu\frac{A(x)}{x^{\nu}}\right| = |g(x)|\cdot\left|\eta\mu\frac{A(x)}{x^{\nu}}\right| \le |g(x)|$$

Επομένως:

$$-|g(x)| \le g(x)\eta\mu\frac{A(x)}{x^{\nu}} \le |g(x)|$$

Βρίσκουμε τα $\lim\limits_{x\to x_0}\left(|g(x)|\right)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|g(x)|\right)$. Αν είναι ίσα $(=l)$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[g(x)\eta\mu\frac{A(x)}{x^{\nu}}\right] = l$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)\right)$$

ΛΥΣΗ

Για ευκολία θέτουμε $f(x) = x^3\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)$ και έχουμε διαδοχικά:

$$|f(x)| = \left|x^3\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)\right| = |x^3|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)\right| = |x^3|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)\right| \le |x^3|$$

Δηλαδή:

$$-|x^3| \le f(x) \le |x^3| (I)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(-|x^3|\right) = \lim_{x\to 0}\left(|x^3|\right) = 0$$

Επομένως από το Κριτήριο της παρεμβολής θα είναι:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\eta\mu\left(\frac{x^3+1}{x^{2011}}\right)\right) = 0$$

Γενικότερα το κριτήριο ης παρεμβολής χρησιμοποιείται όταν ζητείται το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και η $f(x)$ μπορεί να «κλειστεί» από δύο άλλες συναρτήσεις που έχουν το ίδιο όριο όταν $x\to x_0$.

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 5.

6η περίπτωση (Τριγωνομετρικά όρια)

Έχουμε υπόψη μας τα επόμενα τριγωνομετρικά όρια και μετασχηματίζουμε κατάλληλα το όριο που ζητάμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\eta\mu x}=1 \ (*)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\kappa x}{\kappa x}=1 \ (*)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\kappa x}{x}=\kappa \ (*)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu\lambda x}=\frac{\kappa}{\lambda} \ (*)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Όσα σημειώνονται με (*) χρειάζονται **απόδειξη** πριν την εφαρμογή τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} \qquad \text{ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x^2+x}$$

ΛΥΣΗ

i) $$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=1\cdot 1=1$$

ii) $$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x\left(x+1\right)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1\cdot 1=1$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 6 .

7η περίπτωση (Όρια με απόλυτα)

Αν ζητείται όριο με μορφή παραπλήσια της $\lim_{x\to x_0}\frac{|\varphi(x)|}{h(x)}$, τότε:

— Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)) = l > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0,\ x\in(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|\varphi(x)|}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{h(x)} = \ldots$$

— Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)) = m < 0 \Rightarrow \varphi(x) < 0,\ x\in(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|\varphi(x)|}{h(x)} = -\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{h(x)} = \ldots$$

— Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)) = 0$, τότε κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την $\varphi(x)$ και εξετάζουμε τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+}(\varphi(x)), \lim\limits_{x\to x_0^-}(\varphi(x))$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

$$\text{i) } \lim_{x\to 1}\frac{|x^2-x+1|-1}{x^2-1} \qquad \text{ii) } \lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}$$

ΛΥΣΗ

i) Αφού $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x+1) = 1 > 0$, τότε $x^2-x+1>0$ «κοντά στο 1». Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-x+1|-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

ii) Αφού:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0$$
$$x^2-1>0,\ x\in(1,+\infty)$$
$$x^2-1<0,\ x\in(-1,1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-}(x+1) = -2$$

Επομένως το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}$ δεν υπάρχει.

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 7.

$8^η$ περίπτωση (Όρια με παράμετρο)

Να βρείτε τα α, β ώστε:

— $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x,a,\beta)}{\varphi(x)}=l\in\mathbb{R},\ \mu\varepsilon \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, τότε πρέπει και $\lim_{x\to x_0}g(x,a,\beta)=0$ (II) διότι διαφορετικά το $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x,a,\beta)}{\varphi(x)}\notin\mathbb{R}$.Από τη σχέση (II) παίρνουμε μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων α και β. Λύνουμε αυτήν τη σχέση ως προς α ή β και αντικαθιστούμε στο $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x,a,\beta)}{\varphi(x)}$ το οποίο στη συνέχεια παραγοντοποιούμε, ώστε να εξαλειφθεί ο όρος $(x-x_0)$. Στο τέλος έχουμε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.

— Να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}f(x)=l\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}A(x,a,\beta), x\ge x_0\\ B(x,a,\beta), x<x_0\end{cases}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+}A(x,a,\beta)=\lim_{x\to x_0^-}B(x,a,\beta)$$

Από την οποία έχουμε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε τα α και β ώστε:

i) $\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+\beta x-4}{x^2-1}=2$ **ii)** $\lim_{x\to-1}f(x)=1$, όπου $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-\beta x+2, & \alpha\nu\ x\ge-1\\ ax+3, & \alpha\nu\ x<-1\end{cases}$

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$ πρέπει και $\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+\beta x-4)=a+\beta-3=0\Leftrightarrow\beta=3-\alpha$ (1)

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+\beta x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+(3-a)x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+3x-ax-4}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{ax(x-1)+(x^3+3x-4)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{ax(x-1)+(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(ax+x^2+x+4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{ax+x^2+x+4}{x+1}=\frac{a+6}{2}$$

Άρα:

$$\frac{a+6}{2}=2\Leftrightarrow a=-2\ \kappa\alpha\iota\ (1)\Leftrightarrow\beta=5$$

ii) Έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1}\left(\alpha x^2 - \beta x + 2\right) = \alpha + \beta + 2 = 1 \Leftrightarrow a + \beta = -1 (I)$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1}\left(ax + 3\right) = 3 - a = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

Άρα $\beta = -1 - 2 \Leftrightarrow \beta = -3$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 8 .

9η περίπτωση (Μετασχηματισμός ορίου)

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)$, της σύνθετης συνάρτησης fog στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε u = g(x).

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x\to x_o} g(x)$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $l = \lim_{u\to u_o} f(u)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το όριο:

i) $\lim_{x\to 0} \eta\mu\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$ **ii)** $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $u = x^2 + \frac{\pi}{4}$, τότε $\lim_{x\to 0} u = \lim_{x\to 0}\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, οπότε

$$\lim_{x\to 0} \eta\mu\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{u\to \frac{\pi}{4}} \eta\mu u = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ii) Είναι:

$$\frac{\eta\mu 3x}{x} = 3\frac{\eta\mu 3x}{3x}$$

Θέσουμε u = 3x, τότε $\lim_{x\to 0} u = \lim_{x\to 0} 3x = 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3\lim_{u\to 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 3\cdot 1 = 3.$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 9.

$10^{η}$ περίπτωση (Η συνάρτηση «κρύβεται»)

Αν δίνεται $\lim_{x\to x_0}\varphi\left(x, f(x)\right)=l\in\mathbb{R}$ (δηλαδή το όριο μιας παράστασης της $f(x)$ ή όπως λέμε «η συνάρτηση κρύβεται») και ζητείται το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, τότε:

— Θέτουμε $\varphi\left(x, f(x)\right)=h\left(x\right)$ (1) οπότε έχουμε $\lim_{x\to x_0} h\left(x\right)=l$

— Λύνουμε την (1) ως προς $f(x)=....$

— Με τις ιδιότητες των ορίων βρίσκουμε το $\lim_{x\to x_0} f(x)=...$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$, να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$ (αν υποθέσουμε ότι υπάρχει).

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\frac{f(x)-1}{x-1}=h(x)$ και άρα $\lim_{x\to 1} h\left(x\right)=2$

Έχουμε:

$$\frac{f(x)-1}{x-1}=h(x)\Leftrightarrow f(x)=\left(x-1\right)h(x)+1$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\left(x-1\right)h(x)+1\right]=\lim_{x\to 1}\left(x-1\right)\cdot\lim_{x\to 1} h(x)+1=1$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 10 .

$11^{η}$ περίπτωση (Θεωρητικές ασκήσεις)

Στις Θεωρητικές ασκήσεις στα όρια έχουμε υπόψη μας τα επόμενα:

Σε ασκήσεις όπου δίνεται σχέση που ιακοποιεί η συνάτηση f :

Α) $f\left(x+y\right)=...$ και αναζητούμε το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Θέτουμε $x-x_0=h$, οπότε όταν $x\to x_0\Leftrightarrow h\to 0$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 0} f\left(x_0+h\right)=...$$

Β) $f\left(x\cdot y\right)=...$ και αναζητούμε το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Θέτουμε $\frac{x}{x_0}=h$ οπότε όταν $x\to x_0\Leftrightarrow h\to 1$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 1} f\left(x_0 \cdot h\right) = \ldots$$

Γ) $f\left(\frac{x}{y}\right) = \ldots$ και αναζητούμε το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Θέτουμε $\frac{x_0}{x} = h \Leftrightarrow x = \frac{x_0}{h}$ οπότε

όταν $x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 1$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 1} f\left(\frac{x_0}{h}\right) = \ldots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f(x+y) = f(x) + 2f(y) + xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(0), f(1)$

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to 1} f(x)$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$x = y = 0 \Rightarrow f(0+0) = f(0) + 2f(0) + 0 \Rightarrow f(0) = 3f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$
$$x = 0, y = 1 \Rightarrow f(0+1) = f(0) + 2f(1) + 0 \Rightarrow f(1) = f(0) + 2f(1) \Rightarrow f(1) = -f(0) \Rightarrow f(1) = 0$$

ii) Θέτουμε $x - 1 = h \Leftrightarrow x = 1 + h$ και όταν: $x \to 1 \Leftrightarrow h \to 0$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0}\left[f(1) + 2f(h) + h\right] = \lim_{h \to 0}\left[2f(h) + h\right] = 2\lim_{h \to 0} f(h) + \lim_{h \to 0} h = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

2. Αν $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - 2xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}, \ \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$$\text{και } f(x) < 0, x \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(1), f(2)$

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to 2} f(x)$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$x = y = 1 \Rightarrow f(1) = f(1) \cdot f(1) - 2 \Rightarrow f(1) = \left[f(1)\right]^2 - 2 \Rightarrow \left[f(1)\right]^2 - f(1) - 2 = 0 \Rightarrow f\left(1\right) = -1 \text{ ή } f\left(1\right) = 2$$

και επειδή $f(x) < 0, x \in \mathbb{R}$ θα είναι $f\left(1\right) = -1$

$$x = 1, y = 2 \Rightarrow f\left(1 \cdot 2\right) = f(1) \cdot f(2) - 2 \Rightarrow f(2) = -f(2) - 2 \Rightarrow f(2) = -1$$

ii) Θέτουμε $\frac{x}{2}=h$ και όταν: $x\to 2 \Leftrightarrow h\to 1$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{h\to 1} f(2h)=\lim_{h\to 1}\left[f(2)\cdot f(h)-4h\right]=\lim_{h\to 1}\left[-f(h)-4h\right]=-\lim_{h\to 1} f(h)-4\lim_{h\to 1} h=-1-4=-5$$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 11, 12, 13 , 14 και 15.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ

1/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x^5-4x^3-2x+5)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}(x^{10}-2x^3+x-1)$

iii) $\lim\limits_{x\to -1}(x^8+2x+3)^{20}$ iv) $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x-5)^3\,|x^2-2x-3|\right]$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x-5}{x+3}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x^2-3x|+|x-2|}{x^2+x+1}$

vii) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{(x+2)^2}$ viii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2+4x+3}$.

2/Α (Σχολικό βιβλίο). **.** Έστω μια συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ αν:

i) $g(x)=3(f(x))^2-5$ ii) $g(x)=\dfrac{|2f(x)-11|}{(f(x))^2+1}$

iii) $g(x)=(f(x)+2)(f(x)-3)$.

Β. Εμπεδώνω

3/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ ii) ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$.

4/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$ iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$.

5/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε (αν υπάρχει), το όριο της f στο x_0 αν :

i) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 5x, & x>1 \end{cases}$ και $x_0=1$

ii) $f(x)=\begin{cases} -2x, & x<-1 \\ x^2+1, & x\ge -1 \end{cases}$ και $x_0=-1$.

6/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\eta\mu x}{x}\right)$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^3+x}\right)$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}$.

7/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu 2x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x}$.

8/Α (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, αν:

i) $1-x^2\le f(x)\le 1+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $1-x^4\le f(x)\le \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

9/Α (Σχολικό βιβλίο). Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2ax+\beta, & x\le 3 \\ \alpha x+3\beta, & x>3 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α,β ∈ **R**, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$.

Β. Εμπεδώνω

1/Β (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\nu+1}-(\nu+1)x+\nu}{x-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}$

2/Β (Σχολικό βιβλίο). Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν

i) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{x^2+10x+25}}{x+5}$ ii) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$

iii) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$ iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

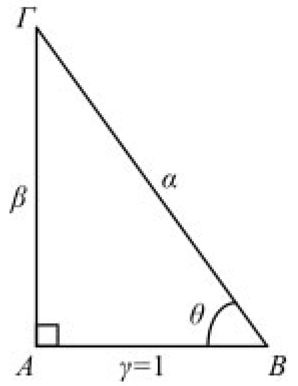
4/Β . Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αν :

i) $\lim\limits_{x\to 1}(4f(x)+2-4x)=-10$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$.

3. (Σχολικό βιβλίο). Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με γ =1. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta)$, ii) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2)$

iii) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\beta}{\alpha}$.



Γ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(που αντιστοιχούν σε κάθε προηγούμενη περίπτωση)

1. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-x}$$

2. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$$

3. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-4} \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x+28}-3}{\sqrt[3]{x+9}-2}$$

4. Να βρείτε τα όρια:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5}, & \alpha\nu\ x>5\\[2mm] \dfrac{x^2-5x}{x^2-25}, & \alpha\nu\ x<5\end{cases}$$

5. Να βρείτε τα όρια:

$\textbf{i)}\ \lim\limits_{x\to 0}\left(x^5\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x^{1000}}\right)\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, όταν $\left|f(x)-x^5\right|\le x$, για κάθε $x\in(-1,1)$

6. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x} \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\eta\mu x} \quad \textbf{iii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{x+1}-1} \quad \textbf{iv)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu 4x-1}{x^2+x}$$

7. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 1}\frac{|x-2|-|2x-1|}{x^2-1} \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to -2}\frac{|2x+4|+|x^2+2x|}{x-4}$$

8. Να βρείτε τα α και β όταν:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2-\beta}{x^3-1}=3 \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to -1}\frac{x^4+(a-\beta)x^3+ax^2-1}{x+1}=-1$$

9. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)} \lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\left(x-1\right)}{x^2-1} \qquad \textbf{ii)} \lim_{x\to -2}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x+2\right)-1}{x^3+2x^2}$$

10. α) Αν $\lim_{x\to 3}\frac{2f(x)-5}{x^2-9}=\frac{1}{2}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 3}f(x)$ (αν υποθέσουμε ότι υπάρχει).

β) Αν $\lim_{x\to -1}\left[\left(x+1\right)f(x)-\left(\sqrt{x+2}-1\right)\right]=3$, να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 3}f(x)$ (αν υποθέσουμε ότι υπάρχει).

11. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f\left(x+y\right)=f(x)-f(y)-xy, \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

και $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

Να βρείτε:

i) Το $f(1)$ **ii)** $\lim_{x\to 1}f(x)$

12. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$f\left(x\cdot y\right)=f(x)\cdot f(y)-2xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(0),\ f(1),\ f(2)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1».

iii) Αν $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x^2)}{x^2}, \alpha\nu\ x>0\\ x^5\eta\mu\frac{2015}{x^{2015}}-a, \alpha\nu\ x<0\end{cases}$, να βρείτε το α, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to 0}g(x)$.

13. Έστω $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f\left(x\cdot y\right)=f(x)+f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\left(0,+\infty\right).$$

i) Να βρείτε το $f(1)$.

ii) Αν $\lim_{x\to 1}=f(1)$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\left(0,+\infty\right)$.

14. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f\left(x+y\right)=f(x)+f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

i) Να βρείτε το $f(0)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

iii) Αν ισχύει $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ για κάποιο $a\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ **β)** $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

15. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)}{h} = 6$$

i) Να βρείτε το $f(3)$.

ii) Να βρείτε το όριο $A = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$.

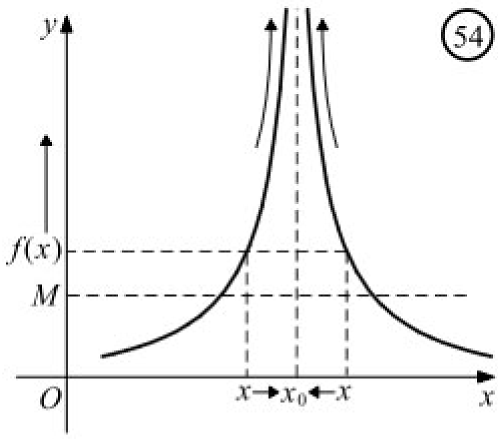
ΜΑΘΗΜΑ 14ο

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in R$

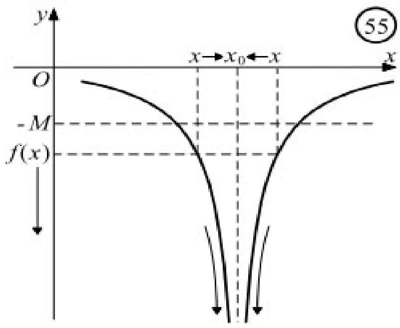
— Στο σχήμα 54 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x΄x πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές f(x) αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$



— Στο σχήμα 55 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x΄x πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές f(x) ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό −M (M >0). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$



Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0)\cup(x_0, \beta)$ ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty .$$

Αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{και γενικά} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \quad \nu \in \mathbf{N}$$

Ενώ:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{και γενικά} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \quad \nu \in \mathbf{N} \qquad \text{(Σχ. 57β).}$$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in \mathbf{N}$

Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbf{R}$						
το όριο της f είναι:	$a \in \mathbf{R}$	$a \in \mathbf{R}$	+∞	-∞	+∞	-∞
και το όριο της g είναι:	+∞	-∞	+∞	-∞	-∞	+∞
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	+∞	-∞	+∞	-∞	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbf{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f{\cdot}g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)+(-\infty) \quad \text{και} \quad 0\cdot(\pm\infty).$$

και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty) \quad \text{και} \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς

Για παράδειγμα:

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}1=1.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ (Εύρεση ορίου Α= $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l\in\mathbb{R}^*$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$)

Γράφουμε:

$$A=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{g(x)}\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και έχουμε:}$$

Αν $g(x)>0$, τότε:

$$A=(+\infty)\cdot l=\begin{cases}+\infty, & \alpha\nu\ l>0\\ -\infty, & \alpha\nu\ l<0\end{cases} \qquad \text{ή}$$

Αν $g(x)<0$, τότε:

$$A=(-\infty)\cdot l=\begin{cases}-\infty, & \alpha\nu\ l>0\\ +\infty, & \alpha\nu\ l<0\end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{|x-1|}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3x+2}{(x-2)^2}$.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $\lim_{x\to 1}|x-1|=0$ και $|x-1|>0$ κοντά στο 1, είναι $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=+\infty$. Επειδή επιπλέον είναι $\lim_{x\to 1}(x^2-5x+6)=2$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{|x-1|}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-5x+6)\right]=+\infty.$$

ii) Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-2)^2=0$ και $(x-2)^2>0$ κοντά στο 2, είναι $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$. Επειδή επιπλέον είναι $\lim_{x\to 2}(-3x+2)=-4$, έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{-3x+2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{(x-2)^2}\cdot(-3x+2)\right]=-\infty.$$

2. Να βρεθούν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-2}$$

στο $x_0=2$ και στη συνέχεια να εξετασθεί, αν υπάρχει το όριο της f(x) στο 2.

ΛΥΣΗ

— Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ και $x-2>0$ για $x>2$, είναι $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$. Επειδή επιπλέον $\lim_{x\to 2^+}(x^2-x+1)=3$, έχουμε

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x-2}(x^2-x+1)\right]=+\infty.$$

— Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ και $x-2<0$ για $x<2$, είναι $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$. Επειδή επιπλέον $\lim_{x\to 2^-}(x^2-x+1)=3$, έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right]=-\infty.$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα. Επομένως δεν υπάρχει όριο της f στο 2.

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 1,2,3.

ΜΕΘΟΔΟΣ («Διερεύνηση ορίου με παράμετρο» της μορφής $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,\lambda)}{g(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\lambda)\neq 0$, δηλαδή όταν ο αριθμητής εναι και συνάρτηση μιας παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ **).**

Γράφουμε:

$$A=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,\lambda)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{g(x)}\cdot f(x,\lambda)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0} f(x,\lambda)$$

Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\lambda)=h(\lambda)$ (είναι δηλαδή συναρτήσει του λ) και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

A) Αν $h(\lambda)>0\Leftrightarrow \lambda\in\Delta_1$ (Δ_1 διάστημα) και ανάλογα με το αν $g(x)>0$ ή $g(x)<0$ «κοντά» στο x_0 θα είναι $A=\pm\infty$.

B) Αν $h(\lambda)<0\Leftrightarrow \lambda\in\Delta_2$ (Δ_1 διάστημα) και ανάλογα με το αν $g(x)>0$ ή $g(x)<0$ «κοντά» στο x_0 θα είναι $A=\pm\infty$.

Γ) Αν $h(\lambda)=0$, τότε έχουμε την περίπτωση της απροσδιοριστίας $\dfrac{0}{0}$ που είδαμε προηγούμενα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

3/Β (Σχολικό). Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}\qquad \text{και}\qquad g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}.$$

Να βρείτε τις τιμές των λ, μ ∈ **R** για τις οποίες υπάρχουν στο **R** τα όρια (ή να βρείτε τα όρια για όλες τις τιμές των λ, μ ∈ **R)** :

$$\lim_{x\to 1} f(x)\qquad \text{και}\qquad \lim_{x\to 0} g(x).$$

ΛΥΣΗ

Για τη συνάρτηση $f(x)$ έχουμε:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left[\left((\lambda-1)x^2+x-2\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$$

$$\lim_{x\to 1}\left((\lambda-1)x^2+x-2\right)=\lambda-1+1-2=\lambda-2$$

Ακόμα:

$$\gamma\iota\alpha\ x>1 \text{ είναι } x^2-1>0$$
$$\gamma\iota\alpha\ -1<x<1 \text{ είναι } x^2-1<0$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $\lambda-2>0 \Leftrightarrow \lambda>2$, τότε:

Αν $x>1,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)=+\infty$, οπότε $A=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=+\infty$

Αν $-1<x<1,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)=-\infty$, οπότε $A=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=-\infty$

Άρα το όριο της $f(x)$ στο $x_0=1$ δεν υπάρχει.

— Αν $\lambda-2<0 \Leftrightarrow \lambda<2$, τότε:

Αν $x>1,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)=+\infty$, οπότε $A=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=-\infty$

Αν $-1<x<1,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)=-\infty$, οπότε $A=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=+\infty$

Άρα το όριο της $f(x)$ στο $x_0=1$ δεν υπάρχει.

— Αν $\lambda=2$, τότε $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$$

Για την συνάρτηση $g(x)$ έχουμε:

$$A=\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+\mu}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(x^2+2x+\mu\right)\right]$$

Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+2x+\mu\right)=\mu\ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to 0} x=0$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $x>0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ και άρα:

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(x^2+2x+\mu\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(x^2+2x+\mu\right)=(+\infty)\cdot\mu$$

Οπότε: $\text{Αν}\ \mu>0$, τότε $\text{Α}=+\infty$ ενώ

$\text{Αν}\ \mu<0$, τότε $\text{Α}=-\infty$ και

Αν $\mu=0$, τότε $A=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+2)}{x}=2$

— Αν $x<0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$ και άρα:

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(x^2+2x+\mu\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(x^2+2x+\mu\right)=\left(-\infty\right)\cdot\mu$$

Οπότε: Αν $\text{Αν}\ \mu>0$, τότε $\mathrm{A}=-\infty$ ενώ

Αν $\text{Αν}\ \mu<0$, τότε $\mathrm{A}=+\infty$ και

Αν $\mu=0$, τότε $A=\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x\left(x+2\right)}{x}=2$

Επομένως:

$\text{Αν}\ \mu>0$ δεν υπάρχει το όριο της $g(x)$ στο $x_0=0$.

$\text{Αν}\ \mu<0$ δεν υπάρχει το όριο της $g(x)$ στο $x_0=0$.

Αν $\mu=0$ $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 4

ΜΕΘΟΔΟΣ (Η συνάρτηση «κρύβεται»)

Αν δίνεται $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\left(x,f(x)\right)=\pm\infty$ (δηλαδή το όριο μιας παράστασης της $f(x)$ ή όπως λέμε «η συνάρτηση κρύβεται») και ζητείται το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, τότε:

— Θέτουμε $\varphi\left(x,f(x)\right)=h\left(x\right)$ (1) οπότε έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}h\left(x\right)=\pm\infty$

— Λύνουμε την (1) ως προς $f(x)=....$

— Με τις ιδιότητες των ορίων βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=...$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}f\left(x\right)$, όταν :

i) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+1}{f(x)}=+\infty$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x^2+2x}=-\infty$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε:

$$\frac{x^2-3x+1}{f(x)}=h(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-3x+1}{h(x)}$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 2} h(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{1}{h(x)} = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+1}{h(x)} = \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{h(x)}\cdot\left(x^2-3x+1\right)\right] = 0\cdot(-1) = 0$$

ii) Θέτουμε:

$$\frac{f(x)-2}{x^2+2x} = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = \left(x^2+2x\right)\cdot\varphi(x)+2'$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 2}\varphi(x) = -\infty$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left[\left(x^2+2x\right)\cdot\varphi(x)+2\right] = \lim_{x\to 2}\left(x^2+2x\right)\cdot\lim_{x\to 2}\varphi(x)+2 = \infty$$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 6 και 7.

Βασική πρόταση (που μπορεί να χρησιμοποιείται στις ασκήσεις χωρίς απόδειξη. Ωστόσο για λόγους πληρότητας παραθέτουμε την απόδειξη παρακάτω)

A) *Αν* $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με* $f(x)\geq g(x)$ *για κάθε* $x\in\left(a,x_0\right)\cup\left(x_0,\beta\right)$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *τότε και* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

B) *Αν* $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με* $f(x)\leq g(x), x\in\left(a,x_0\right)\cup\left(x_0,\beta\right)$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *τότε* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

A) Αφού $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow g(x) > 0$ «κοντά» στο x_0. Έχουμε:

$$f(x)\geq g(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{g(x)} \text{ «κοντά» στο } x_0.$$

Είναι $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = 0$, άρα από το κριτήριο της παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=+\infty \text{ (αφού } \frac{1}{f(x)}>0 \text{ «κοντά» στο } x_0\text{).}$$

B) $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty \Rightarrow g(x)<0$ «κοντά» στο x_0. Έχουμε:

$$f(x)\le g(x)<0 \Leftrightarrow -f(x)\ge -g(x)>0 \Leftrightarrow 0<-\frac{1}{f(x)}\le -\frac{1}{g(x)} \text{ «κοντά» στο } x_0.$$

Είναι $\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{g(x)}=0$, άρα από το κριτήριο της παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{f(x)}=0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{-\frac{1}{f(x)}}=-\infty \text{ (αφού} -\frac{1}{f(x)}>0 \text{ «κοντά» στο } x_0\text{).}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ

1/Α (Σχολικό). Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν :

i) $f(x)=\frac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_0=0$ ii) $f(x)=\frac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_0=1$

iii) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}$, $x_0=0$.

2/Α (Σχολικό). Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν :

i) $f(x)=\frac{3}{1-x}-\frac{4}{1-x^2}$, $x_0=1$ ii) $f(x)=\frac{x^2+3x-2}{x|x|}$, $x_0=0$

iii) $f(x)=x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$, $x_0=0$.

Β. Εμπεδώνω

1/Β (Σχολικό). Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το $\lim_{x\to 4}\frac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$

2/Β (Σχολικό). Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ δεν έχει όριο στο $\frac{\pi}{2}$.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ δεν έχει όριο στο 0.

4/Β (Σχολικό). Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν :

i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-4}{f(x)}=+\infty$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x+2}=-\infty$ iii) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)(3x^2-2)]=+\infty$.

Γ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{\left(x^2-1\right)^2}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-x+1}{x^4+x^2}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x+2}{\left|x^4-1\right|}$

2. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1-2x}{-\left(x+1\right)^2}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2x^2}{-x^4-x^2}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+}\frac{2x^2+1}{\left|\frac{1}{2}-x\right|}$

3. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4+1}{x^2-1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^3}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5}{x^2-x-2}$

4. Να βρείτε τα όρια για όλες τις τιμές των λ, μ ϵ **R:**

i) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\lambda x^2-x-2}{x^2-1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\mu^2x^3-2\mu x+2}{x^2-2x+4}$

5. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)\cdot f(y)=yf(x)+xf(y)-xy,\ \text{για κάθε}\ x,y\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε:

i) τη συνάρτηση f

ii) Το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$

6. Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις , τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-5}{f(x)}=+\infty,\quad \lim_{x\to 3}\frac{g(x)}{x+2}=-\infty$$

Να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)+g(x)\right]$

7. Αν $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot \eta\mu 3x}{\sqrt{x+9}-3}=-\infty$, να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$

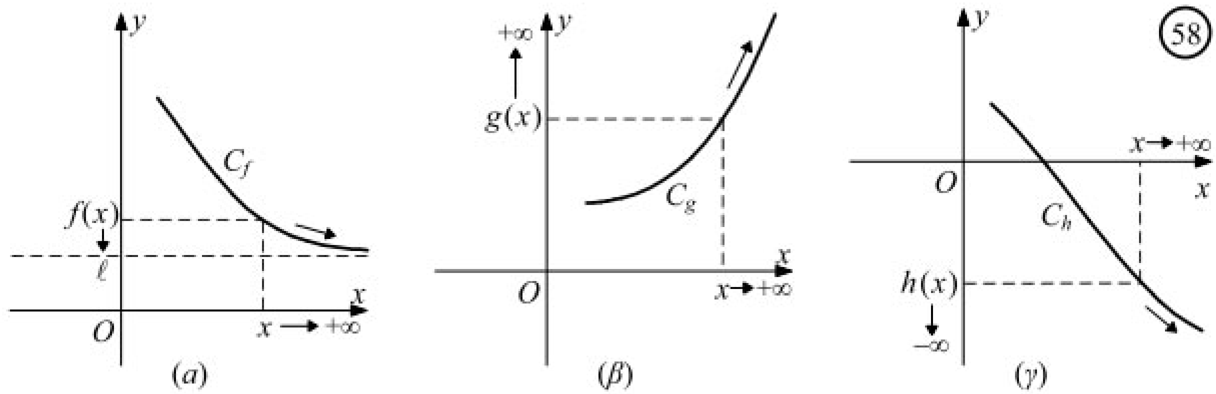
8. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to l}\dfrac{x^2-1}{x^3-x^2}$ για τις διάφορες τιμές του $l\in\mathbb{R}$

ΜΑΘΗΜΑ 15ο

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής (α, +∞).



Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο,

— το f(x) προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο +∞ όριο το ℓ και γράφουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

— το g(x) αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g έχει στο +∞ όριο το +∞ και γράφουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

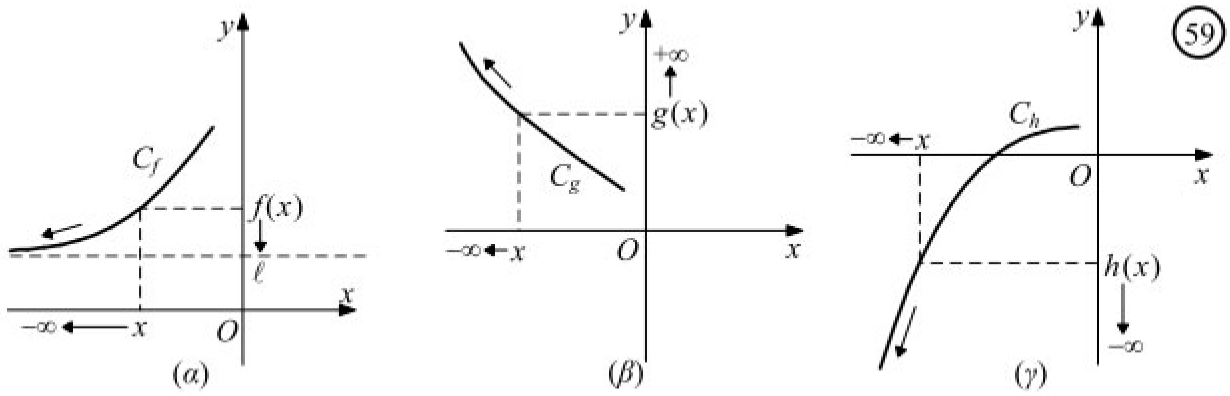
— το h(x) μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η h έχει στο +∞ όριο το −∞ και γράφουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x \to -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$. Έτσι, για τις συναρτήσεις f, g, h των παρακάτω σχημάτων έχουμε:



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty .$$

Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0, \quad \nu\in\mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\nu}=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0, \quad \nu\in\mathbb{N}^*$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και

— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

● Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$. Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) = 2x^3\left(1-\frac{5}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}\right).$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}\right)=1-0+0-0=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty}(2x^3).$$

Γενικά:

Για την πολυωνυμική συνάρτηση:

$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Για παράδειγμα,

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{5x^3 + x - 7}.$$

Για $x \neq 0$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{3x^2\left(1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}\right)}{5x^3\left(1+\frac{1}{5x^2}-\frac{7}{5x^3}\right)} = \frac{3x^2}{5x^3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}}{1+\frac{1}{5x^2}-\frac{7}{5x^3}}.$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{3x^2}}{1+\dfrac{1}{5x^2}-\dfrac{7}{5x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{3x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x^2}-\dfrac{7}{5x^3}\right)}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{5x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5x}\right)=0$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{5x^3}\right)$$

Γενικά,

Για την ρητή συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}$$

, $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)\qquad\text{και}\qquad\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-6x+1}{3x^2+x-2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^2}{3x^2}\right)=\frac{5}{3}.$$

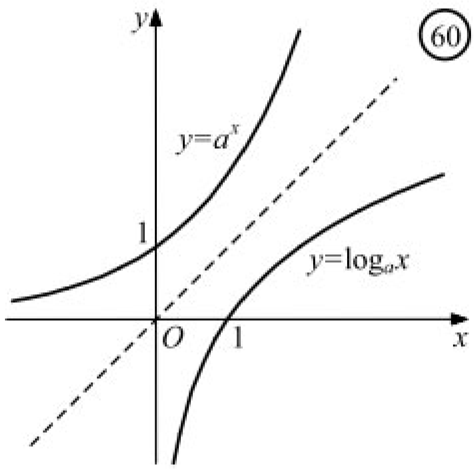
Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται [1] ότι :

Αν α >1 (Σχ. 60), τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0,\qquad\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$$

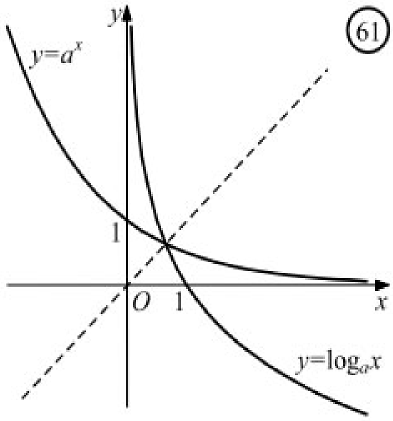
$$\lim_{x\to0}\log_\alpha x=-\infty,\qquad\lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$$



Αν 0 < α <1 (Σχ. 61), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$$



ΜΕΘΟΔΟΣ (Εύρεσης ορίου $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα)

$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + a_0 \left(\alpha_\nu \neq 0\right)$, $Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \ \left(\beta_\mu \neq 0\right)$

Α. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\alpha_\nu x^\nu\right)$ (παίρνουμε δηλαδή το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου)

Β. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu} = \dfrac{a_\nu}{\beta_\mu} \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{\nu-\mu}$ (δηλαδή παίρνουμε το όριο του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων των πολυωνύμων).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(3x^3-2x^2+x-1\right)\quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to-\infty}\left(5x^4+2x^3-x^2-x+1\right)$$

ΛΥΣΗ

i) $\lim_{x\to+\infty}\left(3x^3-2x^2+x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x^3\right)=3\cdot(+\infty)=+\infty$

ii) $\lim_{x\to-\infty}\left(5x^4+2x^3-x^2-x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(5x^4\right)=5\cdot(+\infty)=+\infty$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 1.

2. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-3x^4+5x^2+x-3}{x^2+4x+7}\quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4+4x^3-2x^2+x-7}{5x+8}$$

ΛΥΣΗ

i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-3x^4+5x^2+x-3}{x^2+4x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

ii) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4+4x^3-2x^2+x-7}{5x+8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4}{5x}=\frac{3}{5}\lim_{x\to-\infty}x^3=\frac{3}{5}\cdot(-\infty)=-\infty$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 1 και 2.

ΜΕΘΟΔΟΣ (Εύρεσης ορίου $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}\right)$

Αρχικά κάνουμε αντικατάσταση έχοντας υπόψη τις ιδιότητες των ορίων και τις επιτρεπτές πράξεις του απείρου. Αν πάρουμε απροσδιόριστη μορφή , τότε:

Α) Βγάζουμε «κοινό παράγοντα» εντός του ριζικού και στη συνέχεια «σπάμε τη ρίζα» [προσέχοντας αν $x>0$ $(x\to+\infty)$ ή $x<0$ $(x\to-\infty)$]. Αν η προηγουμένη διαδικασία δώσει και πάλι απροσδιόριστη μορφή, τότε:

Β) Πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση της και συνεχίζουμε τη διαδιακασία του «κοινού παράγοντα».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$$

ΛΥΣΗ

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty+\infty=+\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)-\lim\limits_{x\to-\infty}x=+\infty-(-\infty)=+\infty$

2. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}+x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-x\right)$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$\sqrt{x^2-x+1}+x=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x=x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x=x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right]=(+\infty)\cdot 2=+\infty$$

ii) Έχουμε:

$$\sqrt{x^2+x-2}-x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-x=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-x=-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-x=-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1\right)$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1\right)\right]=(-\infty)\cdot 2=-\infty$$

3. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\sqrt{x^2-x+1}+x=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x=-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x=x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right]=(-\infty)\cdot 0=;$$

Τώρα λοιπόν ακολουθούμε το Β) βήμα (Πολλαπλασιασμός με συζυγή παράσταση)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=\frac{1}{2}$$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 3 και 4.

ΜΕΘΟΔΟΣ (Διερεύνηση ορίου $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,\lambda)$ όταν $x\to\pm\infty$)

Ακολουθούμε τα βήματα της προηγούμενης μεθόδου μεταφέροντας και την παράμετρο.

Καταλήγουμε σε μια σχέση της μορφής $(\pm\infty)\cdot g(\lambda)$ (όπου λ η παράμετρος)

Στη συνέχεια εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

Α) $g(\lambda)>0 \Leftrightarrow \lambda\in\Delta_1$ (Δ_1 διάστημα)

Β) $g(\lambda)<0 \Leftrightarrow \lambda\in\Delta_2$ (Δ_2 διάστημα)

Γ) $g(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=\alpha,\lambda=\beta,...$.Στην περίπτωση αυτή αντικαθιστούμε στο αρχικό όριο τις τιμές του λ και βρίσκουμε το ζητούμενο όριο με την μέθοδο που ξέρουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$

ΛΥΣΗ:

i) Έχουμε διαδοχικά:

$$A=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu\right)\right]=(-\infty)(\mu-1)$$

Επομένως διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $\mu-1>0\Leftrightarrow\mu>1$, τότε $A=-\infty$

— Αν $\mu-1<0\Leftrightarrow\mu<1$, τότε $A=+\infty$

— Αν $\mu-1=0 \Leftrightarrow \mu=1$, το ζητούμενο όριο γίνεται $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ (που με την διαδικασία του κοινού παράγοντα καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή $(-\infty)\cdot 0$.

Άρα έχουμε διαδοχικά:

$$A=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\frac{1}{(+\infty)\cdot(-2)}=0$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3}{\mu x^2}=\frac{\mu-1}{\mu}\lim_{x\to+\infty}x=\frac{\mu-1}{\mu}\cdot(+\infty),\mu\neq 0$$

Επομένως διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $\frac{\mu-1}{\mu}>0 \Leftrightarrow \mu(\mu-1)>0 \Leftrightarrow \mu>1$ ή $\mu<0$, τότε $B=+\infty$

— Αν $\frac{\mu-1}{\mu}<0 \Leftrightarrow \mu(\mu-1)<0 \Leftrightarrow 0<\mu<1$, τότε $B=-\infty$

— Αν $\frac{\mu-1}{\mu}=0 \Leftrightarrow \mu=1$, τότε το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

— Αν $\mu=0$, τότε το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+2x^2+3}{5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{5x}=-\frac{1}{5}\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=-\infty$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 5.

ΜΕΘΟΔΟΣ (Εύρεση ορίου εκθετικών και λογαριθμικών ορίων που είναι απροσδιόριστης μορφής)

— Αν έχουμε ζητούμενο όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(a^x,\beta^x)}{G(a^x,\beta^x)}$ με $a>\beta>0$, τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα το a^x και δημιουργούνται παραστάσεις $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x$ που $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x=0$, αφού $0<\frac{\beta}{\alpha}<1$

— Αν έχουμε ζητούμενο όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{F(a^x,\beta^x)}{G(a^x,\beta^x)}$ με $a>\beta$, τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα το β^x και δημιουργούνται παραστάσεις $\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^x$ που $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x=0$, αφού $\dfrac{a}{\beta}>1$.

— Στις λογαριθμικές συναρτήσειςΤης μορφής $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln P(x)$ ή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}\right)$ που καταλήγουν σε απροσδιόριστη μορφήδουλεύουμε βγάζοντας κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο όρο ως προς x ή με συζυγή παράσταση όπως είδαμε προηγούμενα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-2^{x+2}-1}{3^{x+1}-5\cdot 2^x+3}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5\cdot e^{x+2}-7\cdot 2^x}{e^{x+3}-2^{x+2}}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-2^{x+2}-1}{3^{x+1}-5\cdot 2^x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left[1-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]}{3^x\left[3-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x}{3-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x}=\frac{1-4\cdot 0-0}{3-5\cdot 0+3\cdot 0}=\frac{1}{3}$$

διότι:

$$0<\frac{2}{3}<1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0 \text{ και } 0<\frac{1}{3}<1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5\cdot e^{x+2}-7\cdot 2^x}{e^{x+3}-2^{x+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x\left[5\cdot\frac{e^{x+2}}{2^x}-7\right]}{2^{x+2}\left[\frac{e^{x+3}}{2^{x+2}}-1\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{e^2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^x-7}{4\left[\frac{e^3}{4}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^x-1\right]}=\frac{\frac{5}{e^2}\cdot 0-7}{4\left(\frac{e^3}{4}\cdot 0-1\right)}=\frac{7}{4}$$

διότι:

$$\frac{e}{2}>1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^x=0$$

2. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)\right)\quad \textbf{ii}\ \lim_{x\to-\infty}\ln\frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{|x|+1}$$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^2+2x+3-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+3}{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\ln\frac{2}{2}=\ln 1=0$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{|x|+1}=\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\ln 1=0$$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 6, 7 και 8.

ΜΕΘΟΔΟΣ (Όρια με τριγωνομετρικούς όρους της μορφής:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu a x^{\kappa}}{x^{\nu}},\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu a x^{\kappa}}{x^{\nu}}\quad(\kappa,\nu\in\mathbb{N})$$

Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της παρεμβολής:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu a x^{\kappa}}{x^{\nu}}\right|\le\left|\frac{1}{x^{\nu}}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{x^{\nu}}\right|\le\frac{\sigma\upsilon\nu a x^{\kappa}}{x^{\nu}}\le\left|\frac{1}{x^{\nu}}\right|$$

Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{1}{x^{\nu}}\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\left|\frac{1}{x^{\nu}}\right|\right)=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu a x^{\kappa}}{x^{\nu}}=0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\eta\mu x)^{2015}}{x^{999}}\right)\quad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x\eta\mu 3x}{x^2-x+\sigma\upsilon\nu 3x}$$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$\left|\frac{(\eta\mu x)^{2015}}{x^{999}}\right|\le\frac{1}{x^{999}}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^{999}}\le\frac{(\eta\mu x)^{2015}}{x^{999}}\le\frac{1}{x^{999}}$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^{999}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{999}}=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\eta\mu x)^{2015}}{x^{999}}\right)=0$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x\eta\mu 3x}{x^2-x+\sigma\upsilon\nu 3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{x\eta\mu 3x}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{x\eta\mu 3x}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{\eta\mu 3x}{x}}{1-\frac{1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}}\quad(1)$$

Θα βρούμε τα όρια $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 3x}{x}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}$. Έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu 3x}{x}\right|\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu 3x}{x}\le\frac{1}{x}$$

Επειδή $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής είναι $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 3x}{x}=0$.

Όμοια:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}\right|\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu 3x}{x}\le\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

από το κριτήριο της παρεμβολής είναι $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x}=0$.

Επομένως από την (1) είναι $A=\frac{1+0}{1-0+0}=1$.

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 9 .

ΜΕΘΟΔΟΣ (Όρια με απόλυτα)

Σε όρια όπου συναντούμε $|g(x)|$ πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα επόμενα:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=l>0 \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha>0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ g(x)>0, x\in(a,+\infty)$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=l>0 \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha<0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ g(x)>0, x\in(-\infty,\alpha)$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x)=l<0 \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha>0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ g(x)<0, x\in(a,+\infty)$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=l<0 \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha<0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ g(x)<0, x\in(-\infty,\alpha)$$

Έτσι θα είναι $|g(x)|=g(x)$ ή $|g(x)|=-g(x)$ και θα έχουμε ένα όριο χωρίς απόλυτες τιμές, εφαρμόζοντας τα προηγούμενα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|2-x^2|+|x^2-3|+3x}{x-1}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}(2-x^2)=-\infty \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha>0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ 2-x^2<0,\ x\in(a,+\infty)\\ &\lim_{x\to\infty}(x^2-3)=+\infty \Rightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \beta>0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ 2-x^2<0,\ x\in(\beta,+\infty)\supset(a,+\infty)\end{aligned}\quad (\alpha>\beta)$$

Επομένως (όταν $x\in(a,+\infty)$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|2-x^2|+|x^2-3|+3x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(2-x^2)+(x^2-3)+3x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$$

Τώρα προσπαθώ την άσκηση 10 .

ΜΕΘΟΔΟΣ (Θεωρητικές ασκήσεις)

Οι περισσότερες θεωρητικές ασκήσεις ανήκουν στην κατηγορία «Η συνάρτηση κρύβεται» και ακολουθούμε τη γνωστή διδικασία. Στο τέλος του Κεφαλαίου θα δούμε και συνδυαστικές-θεωρητικές ασκήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Αν $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=3$, να βρείτε το όριο $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-3f(x)}{f(x)+3x+2}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-3f(x)}{f(x)+3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-3\frac{f(x)}{x}\right)}{x\left(\frac{f(x)}{x}+3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-3\frac{f(x)}{x}}{\frac{f(x)}{x}+3+\frac{2}{x}}=\frac{5-3\cdot 3}{3+3+0}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

2. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-3f(x)}{f(x)+3x}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3f(x)}{f(x)+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3xg(x)}{xg(x)+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\big(5-3g(x)\big)}{x\big(g(x)+3\big)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-3g(x)}{g(x)+3}=\frac{5-9}{3+3}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

Τώρα προσπαθώ τις ασκήσεις 11, 12, 13 και 14.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ

1/Α (Σχολικό). Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-10x^3+2x-5)$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-2x+1)$ iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^3+8}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-5x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$ v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x-1}{4x^3-x^2+2}$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^{10}+x+3}$

vii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{5}{x+2}\right)$ viii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+5}{x}-\frac{x^2+3}{x+2}\right)$.

2/Α (Σχολικό). Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+10x+9}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x\right)$, $\alpha\neq\beta$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$.

3/Α (Σχολικό). Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2)$.

B. Εμπεδώνω

2/B (Σχολικό). Να προσδιορίσετε το λ ∈ R, ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x\right)$ να υπάρχει στο **R**.

3/B (Σχολικό). Αν $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+\beta$, να βρείτε τις τιμές των α, β ∈ R για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

4/B (Σχολικό). Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$.

Γ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^5-2x^3+x^2+2\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^7-3x^4+3x^3+9\right)$

2. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(7x^{10}-7x^9+6x^2-3\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^{13}+8x^8+9x^5+11\right)$

3. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x-2}+9x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x-2}-9x\right)$

4. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-x-2}-3x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+x-2}-3x\right)$

5. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-5}+\lambda x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-2)x^5-3x^3+2x^2+x-1}{(\lambda+1)x^3-3x^2+x+3}$

6. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^x-3^{x+1}+2}{4^{x+2}-5\cdot 3^x+1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cdot e^{x+1}-6\cdot 2^x}{e^x-2^{x+1}}$

7. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^\nu+2015}{8x^3+2014}$ $(\nu\in\mathbb{N})$ **ii)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(x^2+x+1\right)\right]$`

8. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x^2+1}{x+1}}$

9. Να βρείτε τα όρια:

i) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x+5}$ **ii)** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x^{23}}{x^2+3x+5}$,

iii) $\Gamma=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-\eta\mu x}{x^2+\sigma\upsilon\nu x}$ **iv)** $\Delta=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x\eta\mu 2x}{x^2-x+\sigma\upsilon\nu 2x}$

10. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^3-2\right|-\left|x^2+2x-4\right|}{x^2+1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left|x^4+6\right|-\left|x^2+2x-4\right|}{x^2+1}$

11. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2f(x)}{f(x)+5x+1}$

12. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2\ (1),\ \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]=3\ (2)$$

Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}^*$ ώστε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2f(x)+\lambda x-1}{xf(x)-2x^2+1}=1$$

13. Αν $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\left[3f^2(x)+2g^2(x)\right]=0$$

,να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$

14. Αν $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3 \text{ και } \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-3x\right]=4$$

Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)+\mu x-2}{xf(x)-3x^2+x+1}=2$$

ΜΑΘΗΜΑ 16^{o}
Επανάληψη στα όρια

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $f(x)>\lambda\left(\lambda\in\mathbb{R}\right)$ «κοντά» στο x_0, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lambda$

2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=l\left(l\in\mathbb{R}\right)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-l$

3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$, τότε $f(x)\geq 0$ «κοντά στο x_0».

4. Μια συνάρτηση είναι δυνατόν να μην ορίζεται σε ένα σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ αλλά να υπάρχει το όριό της στο x_0.

5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (Με την προϋπόθεση ότι όλα τα όρια υπάρχουν).

6. Αν $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)+g(x)\right]=l\in\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν πάντα τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

7. Για όλες τις συναρτήσεις f,g με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ είναι :

$$\lim_{x\to x_o}\left[f(x)-g(x)\right]=0.$$

8. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f\left(x\right)\neq 0$ «κοντά» στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε η f παίρνει μόνο θετικές τιμές «κοντά» στο x_0

10. Αν η f είναι άρτια συνάρτηση και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$, τότε και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$

11. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$

12.Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=+\infty$

13. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ «κοντά» στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

14. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

15. Αν $a>1$, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x=0$.

16. Αν Αν $a>1$, τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x=0$.

17. Αν $0<a<1$, τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x=0$.

18. Αν Αν $a > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

19. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^3} = 0$

20. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3}{(x-1)^4} = -\infty$

<u>Τέστ Θεωρίας (30΄) στα ΟΡΙΑ</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

2) Το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

3) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f με $f(x)>0$ «κοντά» στο x_0 και αν το όριο της f στο x_0 υπάρχει, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$.

4) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$

5) Δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in\mathbf{N}$

6) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$

7) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

8) Αν $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)+g(x)\right]=l\in\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν πάντα τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

9) Αν Αν $a>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

10) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=l\,(l\in\mathbb{R})$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-l$

(Μονάδες 10x3=30)

Β. Πότε λέμε ότι της f έχει αριστερό όριο στο x_0, και πότε δεξιό όριο στο x_0 και πώς σχετίζονται αυτά με την ύπαρξη του ορίου της f στο x_0;

(Μονάδες 20)

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

(Μονάδες 20)

B. Έστω το πολυώνυμο:

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0 \quad \text{και} \quad x_0\in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0).$$

(Μονάδες 30)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

(Μονάδες 7)

Α2. Αν $P(x)$ πολυώνυμο ν βαθμού ($\nu \in \mathbb{N}$) και $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

(Μονάδες 8)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$, τότε κατ΄ανάγκη $\lim_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

β) Ισχύει $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

γ) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ "κοντά" στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

δ) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$

ε) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x^2 - x}$$

(Μονάδες 8)

Β2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \to 3} \frac{|1 - x^2| + |x^2 - 3| - 14}{x^2 - 2x - 3}$$

(Μονάδες 8)

Β3. Να βρείτε το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$ (αν υπάρχει):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}, & \alpha\nu\ x > 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{\eta\mu 3x}, & \alpha\nu\ x < 1 \end{cases}$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν f, g οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}-1$ και $g(x)=(x-2)^2$ αντίστοιχα, να βρείτε τα επόμενα όρια:

$$\textbf{i)}\ \lim_{x\to 1}\frac{(fog)(x)}{x^2-1} \qquad \textbf{ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)-1}{x}$$

(Μονάδες 4x2=8)

Γ2. Να βρείτε τα α και β ώστε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^3-\beta x^2+x-1}{x^2-x-2}=-2$$

(Μονάδες 9)

Γ3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}.$$

Να να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} g(x)$$

για όλες τις τιμές των λ, μ ϵ **R.**

(Μονάδες 4x2=8)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-2xy \text{ για κάθε } x,y\in[0,+\infty),$$

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές $f(0),\ f(1),\ f(2)$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1».

(Μονάδες 10)

Δ3. Αν $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x^2)}{x^2}, \alpha\nu\ \ x>0 \\ x^5 \eta\mu \dfrac{2015}{x^{2015}} - a, \alpha\nu\ \ x<0 \end{cases}$$

, να βρείτε το α ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

(Μονάδες 9)

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Α

Γ΄ Λ Υ Κ Ε Ι Ο Υ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

(Α΄ΜΕΡΟΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Σχολικό Έτος: 2016-2017

Συνέχεια συνάρτησης

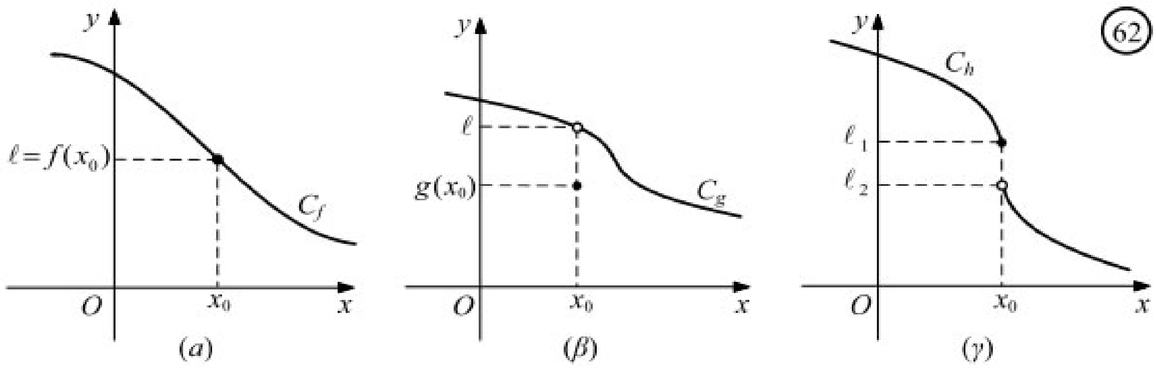
Θεώρημα Bolzano και οι συνέπειές του

Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών-Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής

ΜΑΘΗΜΑ 17ο
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός της συνέχειας

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Παρατηρούμε ότι :

— Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

— Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 αλλά :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \neq g(x_0)$$

— Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της f δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο x_0** μόνο τη συνάρτηση f. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f(x) = |x| είναι συνεχής στο 0, αφού:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν :

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0

Για παράδειγμα :

— Η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{αν} \quad x \le 0 \\ 2-x, & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο 0, αφού

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^2+1) = 1, \qquad \text{ενώ} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (2-x) = 2,$$

οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

— Η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x \ne 1 \\ 3, & \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο 1, αφού:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2, \quad \text{ενώ} \quad f(1) = 3.$$

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Για παράδειγμα :

— **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής** , αφού για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ ισχύει .

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής** , αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις f(x) = ημx και g(x) = συνx είναι συνεχείς** , αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} ημx = ημx_0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to x_0} συνx = συνx_0.$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

— **Οι συναρτήσεις $f(x) = α^x$ και $g(x) = \log_α x$, $0 < α \neq 1$ είναι συνεχείς**

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Από τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το παρακάτω θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο και οι συναρτήσεις

$$f+g, \quad c \cdot f, \quad \text{όπου} \quad c \in \mathbb{R}, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \quad \text{και} \quad \sqrt[ν]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0

Για παράδειγμα:

— Οι συναρτήσεις **f(x) = εφx και g(x) = σφx** είναι **συνεχείς** ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

— Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3x-2}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $[2/3, +\infty)$, αφού η συνάρτηση $g(x)=3x-2$ είναι συνεχής.

— Η συνάρτηση $f(x) = |xημx|$ είναι συνεχής, αφού είναι της μορφής $f(x) = |g(x)|$, όπου

$g(x) = xημx$ η οποία είναι συνεχής συνάρτηση ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων

$f_1(x) = x$ και $f_2(x) = ημx$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι για τη σύνθεση συνεχών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

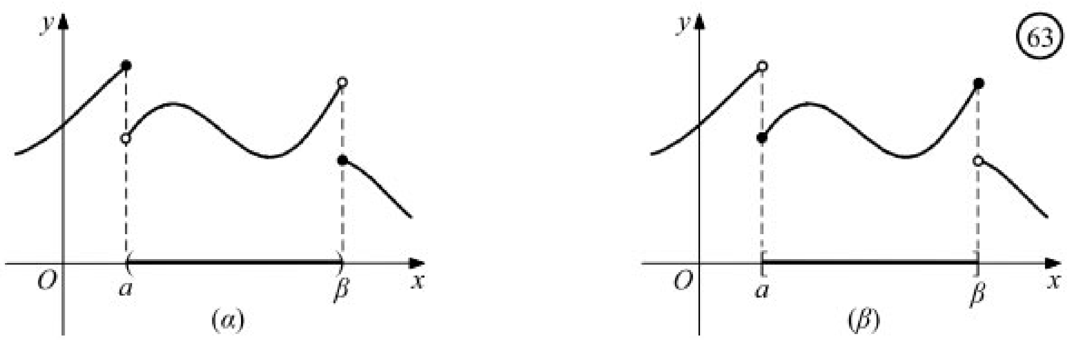
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).   (Σχ. 63α)

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta) \quad (Σχ.\ 63β)$$



Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής (α, β] , [α, β)

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 (Πως εξετάζουμε αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής)

Όταν ζητείται να εξετάσουμε αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής

1^o. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της D_f

2^o. Εξετάζουμε τη συνέχεια μόνο στα σημεία $x \in D_f$

3^o. Αν η f αλάζει τύπο εκατέρωθεν του $x_0 \in D_f$, τότε εξετάζουμε αρχικά την ύπαρξη του $\lim_{x\to x_0} f(x)$ βρίσκοντας τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και διαπιστώνοντας ότι:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_o)$$

Στα σημεία όπου η f δεν αλλάζει τύπο δικαιολογούμε τη συνέχεια συνήθως ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}, & \alpha\nu\ x>1 \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}, & \alpha\nu\ x\le 1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ΛΥΣΗ

Για να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ η συνάρτηση f πρέπει:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = \frac{1}{4}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Για ποια τιμή του α η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2\alpha, & \text{αν} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\text{ημ}x}{x}, & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$$

είναι συνεχής;

ΛΥΣΗ

— Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η f έχει τύπο $f(x) = x^2 + 2\alpha$ και επομένως είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ η f έχει τύπο:

$$f(x)=\frac{\text{ημ}x}{x}$$

και επομένως είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για να είναι η f συνεχής, αρκεί να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, δηλαδή αρκεί:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Έχουμε όμως :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+2\alpha)=2\alpha,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}x}{x}=1 \qquad \text{και}$$

$$f(0)=2\alpha.$$

Επομένως $2\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{2}$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 (Εύρεση παραμέτρου σε μια κλαδική συνάρτηση, ώστε η f να είναι συνεχής)

Όταν μας ζητούν να βρούμε την τιμη παραμέτρου (ή παραμέτρων) ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής, τότε:

1°. Παρατηρούμε σε ποια σημεία $x_0 \in D_f$ η f αλλάζει τύπο δεξιά και αριστερά του x_0.

2^{o}. Βρίσκουμε τα $\lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και απαιτούμε να είναι:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \quad (I)$$

Από τη σχέση (Ι) προκύπτει μία σχέση μεταξύ των παραμέτρων.

3^{o}. Απαιτούμε ακόμα να ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_o) \quad (II)$$

Από τη σχέση (ΙΙ) προκύπτει άλλη μία σχέση μεταξύ των παραμέτρων που, συνήθως, μαζί με την προηγούμενη σχέση αποτελούν σύστημα εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} + 2\alpha x, & \alpha\nu\ x > 1 \\ ax^2 + x - 1, & \alpha\nu\ x \le 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(1, \infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Στο σημείο $x_0 = 1$ θα απαιτήσουμε τη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} + 2ax\right) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} + \lim_{x\to 1^-} 2ax = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x+1} + 2a = \frac{1}{2} + 2a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(ax^2 + x + 1\right) = a + 2 = f(1)$$

Επομένως $a + 2 = \dfrac{1}{2} + 2a \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{2}$

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 (Εύρεση τιμής $f(x_0)$ ή του τύπου της f)

1. Αν ζητείται να βρούμε την τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $x_0 \in D_f$ (δηλαδή το $f(x_0)$) και δεν είναι εύκολη η άμεση εύρεσή του, τότε:

$$f(x_o) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

2. Αν ζητείται να βρούμε την τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $x_0 \in D_f$ (δηλαδή το $f(x_0)$) και δίνεται συναρτησιακή ανισωτική σχέση , τότε χρησιμοποιώντας πλευρικά όρια στο x_0 και αφού:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_o),$$

καταλήγουμε σε σχέσεις της μορφής:

$$f(x_0) \geq a \ \kappa\alpha\iota \ f(x_0) \leq a,$$

, οπότε $f(x_0) = a$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $x^3 f(x) = x^5, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

ΛΥΣΗ

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ άρα θα είναι:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^3} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $x^2 f(x) = \eta\mu^2 2x, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

i) Τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$

ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ΛΥΣΗ

i) Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$x^2 f(x) = \eta\mu^2 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\eta\mu^2 2x}{x^2}$$ (η οποία είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων).

Για $x_0 = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ θα είναι:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu^2 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\eta\mu 2x}{x} \right)^2 = 2^2 = 4$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu^2 2x}{x^2}, & \alpha\nu \ x \neq 0 \\ 4, & \alpha\nu \ x = 0 \end{cases}$$

ii) Ζητούμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu^2 2x}{x^2}$. Έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu^2 2x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \le \frac{\eta\mu^2 2x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$

, οπότε από το Κριτήριο της Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4 (Θεωρητικές ασκήσεις)

Είναι ασκήσεις όπου, συνήθως, δίνεται μία συναρτησιακή σχέση της μορφής:

1. $f(x+y) = \ldots$ για κάθε $x, y \in A$. Τότε θέτουμε: $\begin{aligned} & x - x_0 = h \Leftrightarrow x = x_0 + h \\ & x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0 \end{aligned}$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(\ldots)$$

2. $f(x \cdot y) = \ldots$, για κάθε $x, y \in A$. Τότε θέτουμε: $\begin{aligned} & \frac{x}{x_0} = h \Leftrightarrow x = x_0 \cdot h \ (x_0 \ne 0) \\ & x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 1 \end{aligned}$ και

έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 1} f(x_0 \cdot h) = \lim_{h\to 1}(\ldots)$$

3. $f(x+\lambda y) = \ldots$, για κάθε $x, y \in A$. Τότε θέτουμε: $\begin{aligned} & x - x_0 = \lambda h \Leftrightarrow x = x_0 + \lambda h \ (\lambda \ne 0) \\ & x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0 \end{aligned}$ και

έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + \lambda h) = \lim_{h\to 0}(\ldots)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$ **ii)** Η συνάρτηση f είναι περιττή.

Β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι :

i) συνεχής στο $x_0=0$ **ii)** συνεχής στο $\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Α. i) Θέτουμε στη συναρτησιακή σχέση $x=y=0$ και έχουμε:

$$f(0+0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=2f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$$

ii) Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$f(-x)=-f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f(x+(-x))=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(0)=f(x)+f(-x)\Rightarrow 0=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

Β. i) Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

Θέτουμε: $\begin{array}{l} -x=t \\ x\to 0\Leftrightarrow t\to 0 \end{array}$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(-x)=\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{x\to 0} f(x)=l$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0} f(-x)=\lim_{x\to 0}\left(-f(x)\right)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=-\lim_{x\to 0} f(x)\Leftrightarrow l=-l\Leftrightarrow l=0\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

Επομένως η η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$(x-2)f(x)\geq x^2-3x+2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Η οποία είναι συνεχής στο $x_0=2$. Να βρείτε την τιμή $f(2)$

ΛΥΣΗ

Αφού η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=2$ ισχύει:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&A\nu\ x-2>0 \Leftrightarrow x>2, \tau\acute{o}\tau\varepsilon: \\
&f(x) \geq \frac{x^2-3x+2}{x-2} \\
&A\nu\ x-2>0 \Leftrightarrow x>2, \tau\acute{o}\tau\varepsilon: \\
&f(x) \leq \frac{x^2-3x+2}{x-2}
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \geq \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-3x+2}{x-2} \Rightarrow f(2) \geq \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} \Rightarrow f(2) \geq 1 \ (1)$$

Ακόμα:

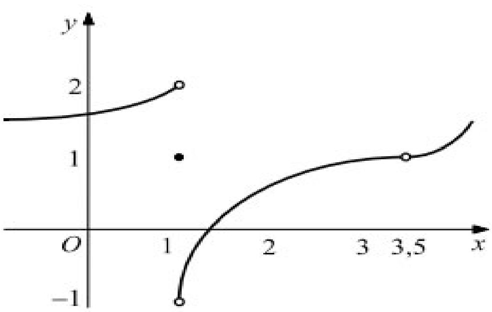
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \leq \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{x-2} \Rightarrow f(2) \leq \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} \Rightarrow f(2) \leq 1 \ (2)$$

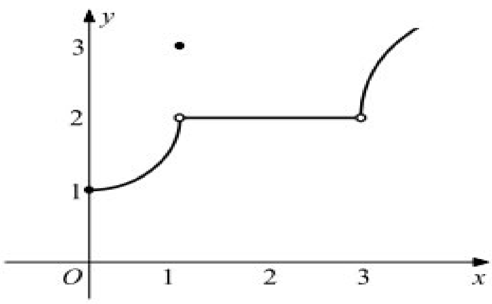
Από τις σχέσεις (1) , (2) έχουμε $f(2)=1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ (Σχολικό βιβλίο)

1/Α. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





2/Α. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις :

i) $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ x^3, & x\geq 2 \end{cases}$, αν $x_0=2$

ii) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ \sqrt{3+x}, & x\geq 1 \end{cases}$, αν $x_0=1$

iii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2}, & x\neq -2 \\ -3, & x=-2 \end{cases}$, αν $x_0=-2$.

3/Α. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συνρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση, αν

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & |x|\leq 1 \\ \dfrac{2}{x}, & |x|>1 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, & x\neq 2 \\ 5, & x=2 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ \ln x, & x\geq 1 \end{cases}$ iv) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0 \\ -x^2+1, & x>0 \end{cases}$.

4/Α. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3, & x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x>1 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x<0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x\geq 0 \end{cases}$.

5/Α. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς :

i) $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$ ii) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$

iii) $f(x)=\eta\mu\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ iv) $f(x)=e^{\eta\mu x}$

v) $f(x)=\ln(\ln x)$

Β. Εμπεδώνω (Σχολικό βιβλίο)

1/Β. Αν

$$f(x)=\begin{cases}(x-\kappa)(x+\kappa) & , \quad x\le 2\\ \kappa x+5 & , \quad x>2\end{cases}$$

,να προσδιορίσετε το κ, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

2/Β. Αν

$$f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2+\beta x-12 & , \quad x<1\\ 5 & , \quad x=1\\ \alpha x+\beta & , \quad x>1\end{cases},$$

να βρείτε τις τιμές των α, β ∈ **R** για τις οποίες η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

3/Β. i) Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Να βρείτε το f(0), αν για κάθε x ∈ $\mathbf{R}^*$ ισχύει xf(x) = συνx − 1

ii) Ομοίως, να βρείτε το g(0) για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε x ∈ **R** ισχύει $|xg(x) - ημx\,| \le x^2$

Γ. Προτεινόμενες

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}, & \alpha\nu\, x\neq 1\\ 2, & \alpha\nu\, x=1\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}, & \alpha\nu\, x\neq 3\\ x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{8x}, & \alpha\nu\, x=3\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2\alpha x-\beta, & \alpha\nu\ x\le 1\\ 3x-1, & \alpha\nu\ 1<x\le 2\\ \beta x^2-\alpha, & \alpha\nu\ x>2\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{x^2+3}-\lambda}{x-1}, & \alpha\nu\ x\neq 1\\ \kappa, & \alpha\nu\ x=1\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των κ, λ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

5. A. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_1=0$ και ισχύει :

$$x^3 f(x)\le\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\cdot \eta\mu 4x,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

, να βρείτε την τιμή $f(0)$.

B. Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_1=0$ και ισχύει :

$$|xg(x)-\eta\mu x|\le x^4\eta\mu^2\frac{1}{x}\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

να βρείτε την τιμή $g(0)$.

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_1=0$ και ισχύει :

$$\sqrt{16-x^5\eta\mu\frac{1}{x^{11}}}\le 4+x^2 f(x)\le\sqrt{16+x^4}\ \ \text{για κάθε } x\in(-1,0)\cup(0,1)$$

να βρείτε την τιμή $f(0)$.

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=3$ και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=2016$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=2016$$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f^2(x)+g^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x \le 2xf(x)+2g(x)\sigma\upsilon\nu x \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0=0$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f^2(x)+g^2(x)\le 2\left[xf(x)+g(x)\cdot\eta\mu x+x\eta\mu x\right] \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0=0$

10. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ με:

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \text{, για κάθε } x, y\in\mathbb{R}$$

A. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

B. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=a\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

11. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ με:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y) \text{, για κάθε } x, y>0$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(1)=1$

ii) Αν η f είναι συνεχής κάποιο $x_0=a\in(0,\infty)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,\infty)$.

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$1+(x^2+1)f(x)=(1+f(x))\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x+x^2 \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

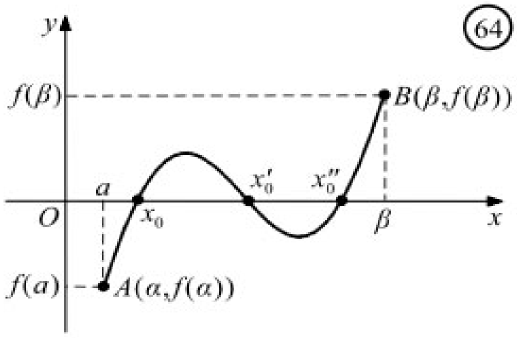
$$f(x)+\sqrt{x^2+x+2}=1+x(f(x)+1) \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$

ΜΑΘΗΜΑ 18ο
ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ

Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β]. Επειδή τα σημεία Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x□x, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.



ΘΕΩΡΗΜΑ ΒΟΛΖΑΝΟ

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

— η f είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει

— f(α) • f(β) < 0 .

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in$ (α, β) τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (α, β).

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 (Ύπαρξη ρίζας μιας εξίσωσης $f(x)=0$ σε ένα διάστημα (α,β))

« Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ (ή η συνάρτηση f) έχει μία , τουλάχιστον, ρίζα στο (α,β)» ή εναλλακτική εκφωνήση: «Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο».

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Αν το διάστημα $[\alpha,\beta]$ δεν δίνεται προσπαθούμε να το εντοπίσουμε με δοκιμές, ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

  (παράδειγμα 1)

- Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση f έχει περισσότερες από μία ριζες στο $[\alpha,\beta]$, τότε χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε ισάριθμα (και χωρίς κοινά σημεία) υποδιαστήματα ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano. Μια «καλή» διαίρεση σε ν-διαστήματα είναι η $[\alpha,\kappa],[\kappa,2\kappa],...[(\nu-1)\kappa,\beta]$ (π.χ για 2 υποδιαστήματα είναι $\left[\alpha,\frac{\beta-\alpha}{2}\right],\left[\frac{\beta-\alpha}{2},\beta\right]$.

(παράδειγμα 2)

- Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι στο κλειστό διάστημα, δηλαδή ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(a)\cdot f(\beta)\le 0$, διότι:

  -Αν $f(a)\cdot f(\beta)<0$, τότε από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ ενώ,

  -Αν $f(a)\cdot f(\beta)=0\Leftrightarrow(f(a)=0 \text{ ή } f(\beta)=0)$, οπότε $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$ αντίστοιχα.

  (παράδειγμα 3)

- Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση $g(x)=0$, <u>η οποία περιέχει παρονομαστές</u>, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (a,β) και η $g(x)$ δεν ορίζεται σε ένα (ή και στα δύο) άκρα α,β τότε κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και μετά θεωρώντας ως συνάρτηση $f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ εξετάζουμε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano για να το εφαρμόσουμε.

  (παράδειγμα 4)

- Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση $g(x)=0$, έχει ακριβώς μια ρίζα (μοναδική ρίζα), τότε αποδυκνείουμε την ύπαρξη της με το θεώρημα του Bolzano και την μοναδικότητα της με την μονοτονία της στο διάστημα (a,β) (ή το «1-1» στο διάστημα (a,β)). Αν η f δεν είναι γνηίως μονότονη τότε εφαρμόζουμε την απαγωγή σε άτοπο.

  (παράδειγμα 5)

Σημείωση: Αν το διάστημα $[\alpha,\beta]$ δεν δίνεται μπορούμε με δοκιμές να δοκιμάσουμε στο $[\gamma,\delta]\subset[\alpha,\beta]$(π.χ να το «σπάσουμε» στα μισά το διάστημα $[\alpha,\beta]$) και να εφαρμόσουμε εκεί το θεώρημα του Bolzano.Τέλος αν είναι πολύ δύσκολο να το εντοπίσουμε μπορούμε να πάρουμε: $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ και αν αυτά είναι ετερόσημα θα υπάρχουν x_1,x_2

$f(x_1)\cdot f(x_2)<0$ $(x_1<x_2)$ (εφαρμόζουμε δηλαδή το θεώρημα του Bolzano στο διάστημα $[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+x-e=0$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$f(x)=x^3+x-e, x\in[0,2]$ (γιατί π.χ στο διάστημα $[0,1]$ δεν πληρείται η $2^η$ προϋπόθεση του θεωρήματος του Bolzano).

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$(ως πολυωνυμική)
- $f(0)=-e<0$
  $f(2)=10-e>0$

Άρα $f(0)\cdot f(2)<0$. Επομένως από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της f στο $[0,1]\subset\mathbb{R}$.

2. Αν $\beta>0$ και $a+\beta+1<0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+ax^2+\beta=0$ έχει δύο ,τουλάχιστον, ρίζες στο διάστημα$(-1,1)$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$f(x)=x^3+ax^2+\beta, x\in[-1,0]\cup[0,1]$ («σπάσαμε» το διάστημα σταδύο υποσδιαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$).

- Η Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήμα $[-1,0],[0,1]$ (ως πολυωνυμική)
- $f(-1)=-1+a+\beta<2+(-1+a+\beta)=1+\alpha+\beta<0$
- $f(0)=\beta>0$
- $f(1)=1+a+\beta$

Άρα από το θεώρημα του Bolzano υπάρχουν $\xi_1\in(-1,0)$ και $\xi_2\in(0,1)$,τέτοια ώστε:

$f(\xi_1)=0$ και $f(\xi_2)=0$

3. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής ($\alpha,\beta>0$) και $\alpha\le f(x)\le\beta$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\dfrac{a\beta}{x_0}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=xf(x)-a\beta,x\in[a,\beta]$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ (ως γινόμενο-διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,\beta]$).
- $$\begin{aligned}h(a)&=af(a)-a\beta=a(f(a)-\beta)\\ h(x)&=\beta f(\beta)-a\beta=\beta(f(\beta)-\alpha)\end{aligned}$$

Όμως $\alpha\le f(x)\le\beta$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, οπότε είναι και:

$$\begin{aligned}\alpha\le f(\alpha)\le\beta&\Rightarrow f(\alpha)-\beta\le 0\\ \alpha\le f(\beta)\le\beta&\Rightarrow f(\beta)-\alpha\ge 0\end{aligned}$$

Άρα . $h(a)\cdot h(\beta)\le 0$. Επομένως:

- Αν $h(a)\cdot h(\beta)<0$ από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{a\beta}{x_0}$$

- Αν $h(a)=0$, τότε $x_0=a$
- Αν $h(\beta)=0$, τότε $x_0=\beta$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\dfrac{a\beta}{x_0}$

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x^{2016}+2016}{x-1}+\frac{x^{2015}+2015}{x-2}=0$$

Έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ΛΥΣΗ

Η δοθείσα εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^{2016}+2016}{x-1}+\frac{x^{2015}+2015}{x-2}=0\Leftrightarrow(x-2)(x^{2016}+2016)+(x-1)(x^{2015}+2015)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=(x-2)\left(x^{2016}+2016\right)+(x-1)\left(x^{2015}+2015\right), x\in[1,2]$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)
- $h(1)=-2017<0$
  $h(2)=2016>0$

Άρα $h(1)\cdot h(2)<0$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano και επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi)=0\Leftrightarrow \frac{\xi^{2016}+2016}{\xi-1}+\frac{\xi^{2015}+2015}{\xi-2}=0$$

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+2x-1=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=x^3+2x-1, x\in[0,1]$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$
- $f(0)=-1<0$
  $f(1)=2>0$

Άρα από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον (στην περίπτωσή μας είναι μοναδική. Γιατί;), $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0{}^3+2x_0-1$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 (Ύπαρξη ρίζας μιας εξίσωσης $f(x)=g(x)$ σε ένα διάστημα (α,β))

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α΄μέλος, δηλαδή:
  $$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$$
- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[a,\beta]$
- Εφαμόζουμε το Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $h(x)$ στο $[a,\beta]$.
- Αν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=g(\xi)$ πάλι θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[a,\beta]$, δηλαδή θέτουμε όπου $\xi=x$ και μεταφέρουμε όλους τουςόρους στο α΄μέλος.

Ισχύουν οι ίδιες χρήσιμες παρατηρήσεις με την προηγούμενη μέθοδο 1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να δειχτεί ότι η εξίσωση x + συνx = 4 έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (π, 2π).

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x) = x + συνx − 4, x ∊ [π, 2π]. Τότε:

● Η f είναι συνεχής στο [π, 2π] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

● Είναι f(π) • f(π) < 0, αφού

f(π) = π + συνπ − 4 = π − 5 < 0 f(2π) = 2π + συν2π − 4 = 2π − 3 > 0.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον, x_0 ∊ (π, 2π) τέτοιο, ώστε f(x_0) = 0 , οπότε x_0 + συνx_0 − 4 και συνεπώς x_0 + συνx_0 = 4. Άρα, η εξίσωση x + συνx = 4 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (π, 2π).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4+3x^2+2$ και $g(x)=9x^3-3x+1$ έχουν ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο $A(x_0,y_0)$ με $x_0\in(-1,1)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=f(x)-g(x)=x^4+3x^2+2-9x^3+3x-1=x^4-9x^3+3x^2+3x+1,\, x\in[-1,1]$$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ (ως πολυωνυμική)
- $h(-1)=11>0$
  $h(1)=-2<0$
  $h(-1)\cdot h(1)<0$

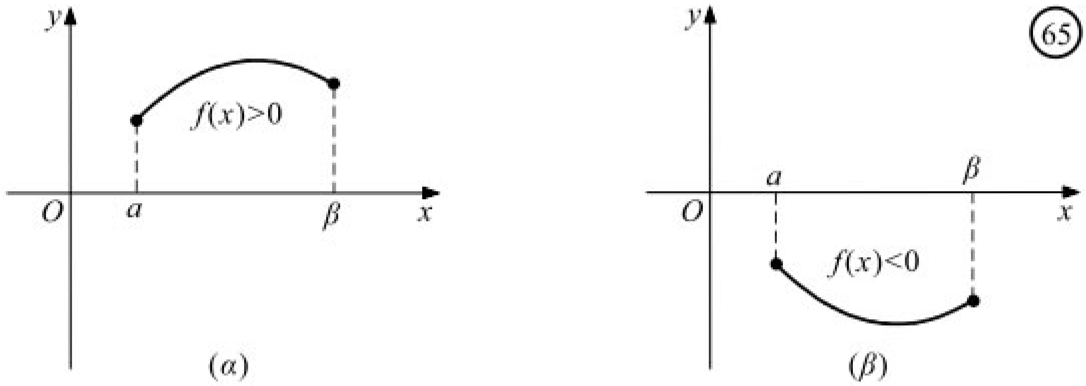
Άρα από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε :

$h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$, δηλαδή έχουν ένα ,τουλάχιστον, κοινό σημείο $A(x_0,y_0)$ με $x_0\in(-1,1)$.

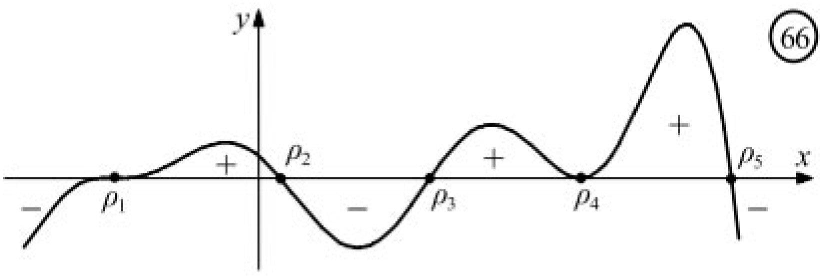
ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x ϵ Δ ή είναι αρνητική για κάθε x ϵ Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3 (Προσδιορισμός του προσήμου της f)

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$f(x) = ημx - συνx \ , \ x \in [0, 2π].$$

Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες της στο [0, 2π].. Έχουμε:

$$ημx - συνx = 0 \ \text{ ή } \ ημx = συνx \ \text{ ή } \ εφx = 1 \ \text{η} \ (x = π/4 \ \text{ ή } \ x = 5π/4)$$

Έτσι οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα:

$$\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right) \text{ και } \left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$$

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
$f(x_0)$	-1	1	-1
Πρόσημο	−	+	−

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$, είναι f(x) < 0, ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ είναι f(x) > 0.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4 (Συνέπεια του θεωρήματος του Bolzano-Εύρεση τύπων συνεχούς συνάρτησης)

Αν θέλουμε να βρούμε τον τύπο μίας συνεχούς συνάρτησης f στο Δ που ικανοποιούν σχέση της μορφής $|f(x)| = g(x)$ ή $f^2(x) = g(x)$ (με $g(x) > 0$), τότε:

Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ (ή αλλιώς η f δεν έχει ρίζες στο Δ) και αφού η f είναι συνεχής στο Δ τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο (δηλαδή ή θα είναι παντού θετική ή παντού αρνητική). Άρα :

- Αν για κάποιο $x_1 \in \Delta$ είναι $f(x_1) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Δηλαδή:

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$f^2(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{g(x)}$$

- Αν για κάποιο $x_2 \in \Delta$ είναι $f(x_2) < 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Δηλαδή:

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = -g(x)$$
$$f^2(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = -\sqrt{g(x)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f(x)$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$f^2(x) = e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow |f(x)| = e^x, x \in \mathbb{R} \ (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως:

- Αν $f(x) > 0$, τότε $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$
- Αν $f(x) < 0$, τότε $f(x) = -e^x, x \in \mathbb{R}$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Το πλήθος των συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x) = e^{2x}, x \in \mathbb{R}$ είναι άπειρες. Ωστόσο, από αυτές οι συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την προηγούμενη σχέση είναι μόνο δύο. Αυτό είναι συνέπεια του ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ το οποίο είναι συνέπεια της συνέχειας της f.

2. Αξίζει να επισημάνουμε ότι δεν ισχύει γενικά η σχέση:

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) = 0 \text{ ή } g(x) = 0 \right)$$

Δείτε παρακάτω έναν **λανθασμένο συλλογισμό** για το προηγούμενο παράδειγμα:

$$f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow f^2(x) - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) + e^x\right)\cdot\left(f(x) - e^x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) = -e^x, x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = e^x, x \in \mathbb{R} \right)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 5 (Συνέπεια του θεωρήματος του Bolzano-Ύπαρξη ρίζας της f και διατήρηση σταθερού προσήμου στο Δ)

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση $f(x)=0$, με f συνεχή στο διάστημα Δ (ή μία εξίσωση:
$f(x)=g(x) \Rightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=0, με\ h(x)=f(x)-g(x), x\in\Delta$)

έχει τουλάχιστον μία λύση και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano (π.χ γιατί δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις), τότε ακολουθούμε την επόμενη μέθοδο:

Έστω ότι η f (ή η h αντίστοιχα) δεν έχει ρίζα στο διάστημα (a,β). Τότε, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$ και επειδή η συνάρτηση f (ή η h αντίστοιχα) είναι συνεχής στο Δ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο (ή παντού θα είναι θετική ή παντού θα είναι αρνητική). Άρα:

Ή $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$ (και καταλήγουμε σε άτοπο) ή

Ή $f(x)<0$ για κάθε $x\in\Delta$ (και καταλήγουμε σε άτοπο)

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ (ή η εξίσωση $h(x)=0$) έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο Δ.

ΜΕΘΟΔΟΣ 6 (Θεωρητικές ασκήσεις)

Στην κατηγορία αυτή, συνήθως, δίνονται θεωρητικές χρησιμεύουν στην εξέταση της $2^{ης}$ προϋπόθεσης του θεωρήματος του Bolzano.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,\ \beta)$ και $f(a)\neq 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\alpha)-(\xi-\alpha)(f(a)+f(\beta))=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=f(x)(\beta-\alpha)-(x-\alpha)(f(a)+f(\beta)),\ x\in[\alpha,\beta]$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$)
- $h(a)=f(a)(\beta-\alpha)$
  $h(\beta)=-(\beta-\alpha)(f(a)+f(\beta))$

Άρα $h(a)\cdot h(\beta)=-(\beta-\alpha)^2 f(a)(f(a)+f(\beta))$.

Αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ και αφού $f(a)\neq 0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $f(a)>0$, τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, οπότε και $f(\beta)>0$ άρα $(f(a)+f(\beta))>0$. Επομένως $h(a)\cdot h(\beta)<0$ και άρα , σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\alpha)-(\xi-\alpha)(f(a)+f(\beta))=0 \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

β) Αν $f(a)<0$, τότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, οπότε και $f(\beta)<0$, άρα $(f(a)+f(\beta))<0$. Επομένως $h(a)\cdot h(\beta)<0$ και άρα , σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\alpha)-(\xi-\alpha)(f(a)+f(\beta))=0 \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

γ) Αν $f(\beta)=0 \Rightarrow h(a)\cdot h(\beta)=-(\beta-\alpha)^2 f^2(a)<0$. Επομένως $h(a)\cdot h(\beta)<0$ και άρα , σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\alpha)-(\xi-\alpha)(f(a)+f(\beta))=0 \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-\pi,\pi)$

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 τέτοιο, ώστε $\eta\mu x_0=\frac{1}{3}(1+\sigma\upsilon\nu x_0)$

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xe^x=1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

4. Έστω οι συναρτήσεις f,g ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $f(0)=0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ και $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)\eta\mu^2 x+g(x)\sigma\upsilon\nu^2 x=x$$

Έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

5. Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $\begin{matrix} f(a)=g(\beta)=\alpha \\ g(a)=f(\beta)=\beta \end{matrix}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:

$$f(g(\xi))+g(f(\xi))=2\xi$$

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(a)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(a)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

7. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x)+3\eta\mu x=x^2, x\in\mathbb{R}$$

Α) Να βρείτε τη συνάρτηση f

Β) Να βρείτε το όριο $K=\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^{-x}$ έχε μία, τουλάχιστον, θετική λύση.

8. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$ και $\left(f(x)+x^2\right)\left(f(x)-x^2\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

9. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

10. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης:

11. Αν $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(0)=f(2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_0, y_0\in[0,2]$ με $|x_0-y_0|=1$, ώστε $f(x_0)=f(y_0)$.

12. Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(0)=f(1)$ και n θετικός φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

13. Αν $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(a)\neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο (διαφορετικά μεταξύ τους) $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε:

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|=\frac{|f(\beta)-f(a)|}{2n+1} \text{ (όπου } n \text{ θετικός ακέραιος)}$$

14. Αν $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $x_1,x_2,...,x_n\in[a,\beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[a,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+...f(x_n)}{n}$$

ΜΑΘΗΜΑ 18ο
ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ
ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ –ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.**

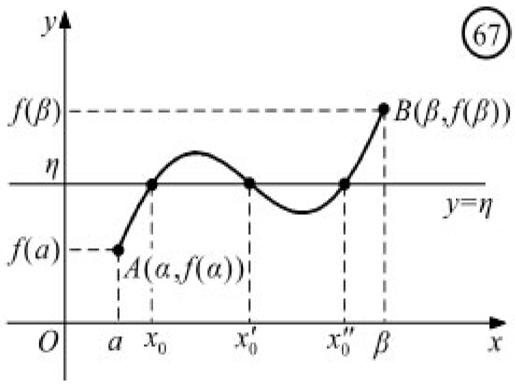
ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

— η f είναι συνεχής στο [α, β] και

— $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι :

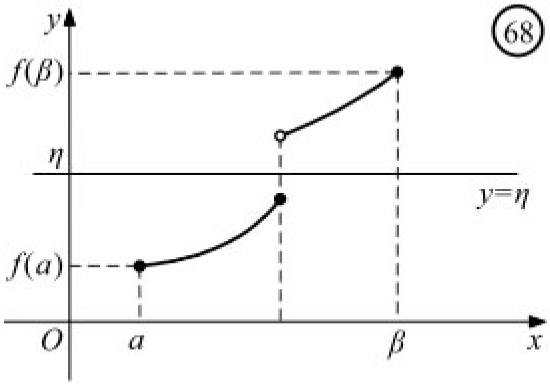
● η g είναι συνεχής στο [α, β] και

● g(α) g(β) < 0 , αφού g(α) = f(α) − η < 0   καιg(β) = f(β) − η > 0 .

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano,υπάρχει $x_0 \in$ (α, β) τέτοιο, ώστε $g(x_0)$ = $f(x_0)$ − η = 0, οπότε $f(x_0)$ = η . ■

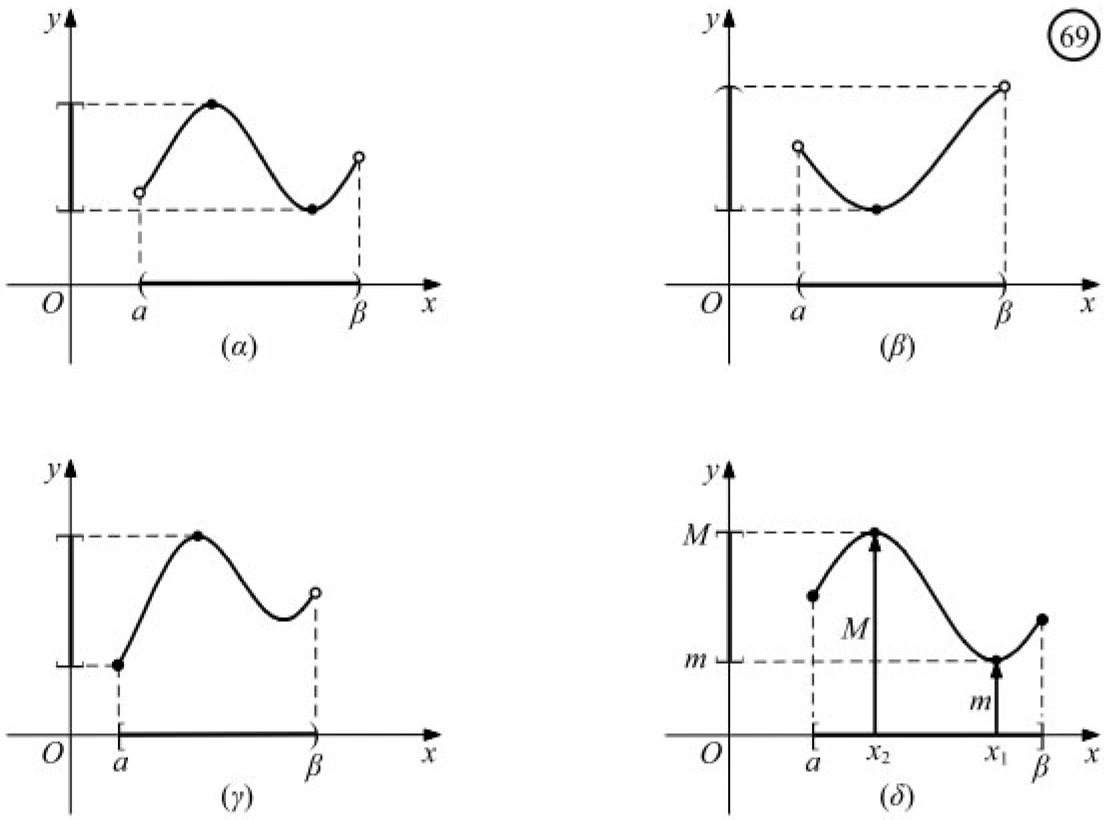
ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



● Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι :

Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



Στην ειδική περίπτωση που το Δ είναι ένα κλειστό διάστημα [α, β] , ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΜΕΘΟΔΟΣ 1

(Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=\frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\ldots\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\ldots\kappa_\nu}$$, **όπου f συνεχής στο $[a,\beta]$**

Αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή M, m αντίστοιχα, δηλαδή $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [a,\beta]$. Άρα θα έχουμε:

$$\begin{array}{l}
m \le f(x_1) \le M \Rightarrow \kappa_1 m \le \kappa_1 f(x_1) \le \kappa_1 M \\
m \le f(x_2) \le M \Rightarrow \kappa_2 m \le \kappa_2 f(x_2) \le \kappa_2 M \\
\ldots. \\
\ldots. \\
\ldots. \\
m \le f(x_\nu) \le M \Rightarrow \kappa_\nu m \le \kappa_\nu f(x_\nu) \le \kappa_\nu M
\end{array}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισοτήτων έχουμε:

$$(\kappa_1+\kappa_2+...+\kappa_\nu)m \le \kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+...\kappa_\nu f(x_\nu) \le (\kappa_1+\kappa_2+...+\kappa_\nu)M \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m \le \frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+...\kappa_\nu f(x_\nu)}{(\kappa_1+\kappa_2+...+\kappa_\nu)} \le M$$

- Αν $m < M$, τότε από το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα , τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+...\kappa_\nu f(x_\nu)}{(\kappa_1+\kappa_2+...+\kappa_\nu)}$$

- Αν $m = M$, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή και επομένως το ζητούμενο είναι κάθε σημείο του $[a,\beta]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται μία ορισμένη και συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0,6]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,6]$ τέτοιο, ώστε:

$$2f(1)+4f(3)+5f(5)=11f(x_0)$$

ΛΥΣΗ

Αφού η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,6]$ θα παίρνει μέγιστο και ελάχιστο M,m αντίστοιχα. Άρα $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [0,6]$.

Άρα:

$$m \le f(1) \le M \Rightarrow 2m \le 2f(1) \le 2M \quad (1)$$
$$m \le f(3) \le M \Rightarrow 4m \le 4f(3) \le 4M \quad (2)$$
$$m \le f(5) \le M \Rightarrow 5m \le 5f(5) \le 5M \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1), (2), (3) έχουμε:

$$11m \le 2f(1)+4f(3)+5f(5) \le 11M \Rightarrow m \le \frac{2f(1)+4f(3)+5f(5)}{11} \le M$$

Άρα ο αριθμός $\frac{2f(1)+4f(3)+5f(5)}{11}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f και επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,6)$ τέτοιο, ώστε :

$$f(x_0)=\frac{2f(1)+4f(3)+5f(5)}{11} \Leftrightarrow 2f(1)+4f(3)+5f(5)=11f(x_0)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] , τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m. (Σχ. 69δ)

Δηλαδή, υπάρχουν x_1 , $x_2 \in$ [α, β] τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\mathbf{m \le f(x) \le M}\ \text{, για κάθε}\ \mathbf{x \in [\alpha, \beta]}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 (Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή η)

Αν ζητείται να εξετάσουμε (ή να αποδείξουμε) ότι η f παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή η , τότε:

- Αποδυκνείουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$ και
- $\eta \in f(\Delta)$ (ή ότι το η είναι μεταξύ των $f(a), f(\beta)$ ($f(a) \neq f(\beta)$))
- Άρα από το θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα τπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\eta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2+3x-2\sigma\upsilon\nu(\pi x)$, να εξετάσετε αν η f μπορεί να πάρει την τιμή 18.

ΛΥΣΗ

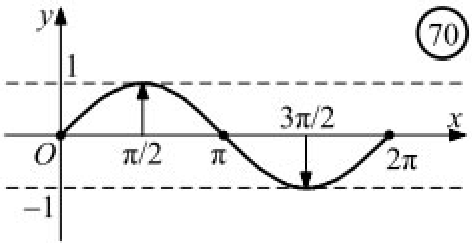
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,5]$(ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων). Ο αριθμός 18 βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές $f(0)=-1$, $f(5)=42$ και άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,5)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=18$.

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [α, β] είναι το κλειστό διάστημα

[m, M] , όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = ημx, \ \ x \in [0, 2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ με $m = -1$ και $M = 1$.

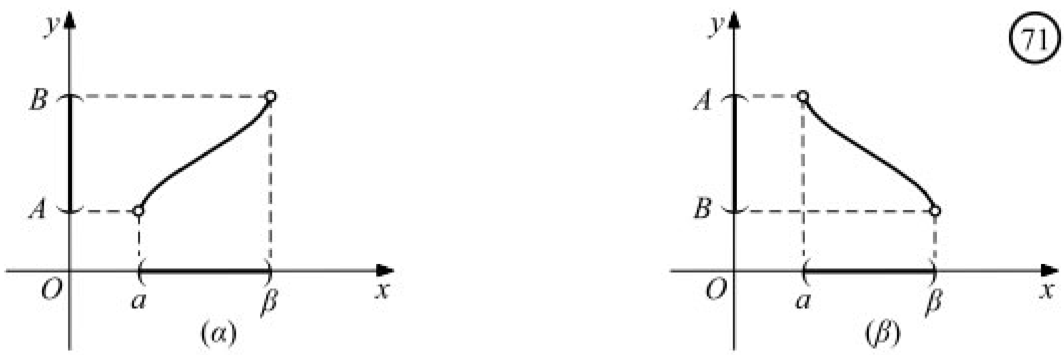


ΜΕΘΟΔΟΣ 3 (Εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης)

- Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$.
- Αν η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο $[\alpha, \beta]$,τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα$[f(\beta), f(\alpha)]$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β) (Σχ. 71α), όπου

$$A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$$

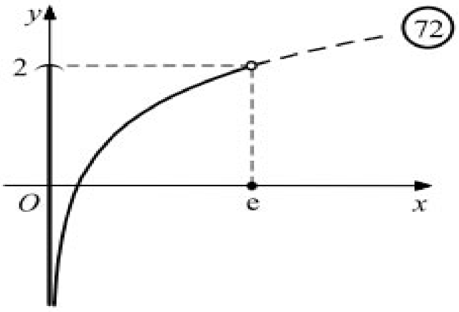
- Αν η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Β, Α) (Σχ. 71β).

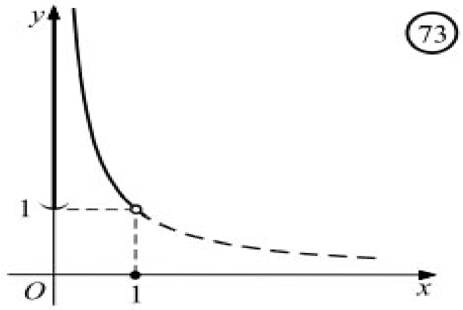


Για παράδειγμα,

— Το σύνολο τιμών της f(x) = lnx + 1, x ∈ (0, e), η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 72), είναι το διάστημα (−∞, 2), αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to e^-} f(x) = 2 .$$





Το σύνολο τιμών της $f(x) = \dfrac{1}{x}$, x ∈ (0, 1), η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, (Σχ. 73) είναι το διάστημα (1, +∞), αφού:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 1 .$$

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής [α,β] , [α, β) και (α, β].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

$$\textbf{i)}\quad f(x) = \sqrt{2-x} - 1 \qquad \textbf{ii)}\ g(x) = x^4 + 3x + 1, x \in [1,3]$$

ΛΥΣΗ

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι $(-\infty, 2]$ (αφού πρέπει $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$).

Εξετάζουμε την μονοτονία της f :

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x_1} > \sqrt{2-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{2-x_1} - 1 > \sqrt{2-x_2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty, 2]$ και επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$$\left[f(2), \lim_{x\to -\infty} f(x) \right) = [-1, \infty)$$

ii) Η g είναι συνεχής συνάρτηση (ως πολυωνυμική). Εξετάζουμε την μονοτονία της f :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^4 < x_2^4 \ (1)$$
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \ (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$$x_1^4 + 3x_1 < x_2^4 + 3x_2 \Leftrightarrow x_1^4 + 3x_1 + 1 < x_2^4 + 3x_2 + 1 \Leftrightarrow f\left(x_1\right) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως το σύνολο τιμών της είναι $\left[f(1), f(3)\right] = \left[5, 91\right]$.

Βασική πρόταση (η οποία θα πρέπει να αποδειχθεί πριν χρησιμοποιηθεί σε ασκήσεις)

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και «1-1». Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Απόδειξη

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$, ώστε να έχουμε $f\left(x_1\right) > f(x_2)$ και $f(x_2) < f(x_3)$.

Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών έχουμε ότι:

Αν $y \in \mathbb{R}$ με $f(x_2) < y < \min\left\{f(x_1), f(x_2)\right\}$ θα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $a \in \left(x_1, x_2\right)$ τέτοιο ώστε $f(a) = y$ και ένα, τουλάχιστον $\beta \in \left(x_2, x_3\right)$ τέτοιο ώστε $f(\beta) = y$. Αλλά η συνάρτηση f είναι «1-1» και άρα $y = f(a) = f(\beta) \Rightarrow a = \beta$ ο οποίο είναι άτοπο (αφού $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Κατανοώ (Σχολικό βιβλίο)

6/Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση ημx − x + 1 έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,π).

7/Α. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις f, να βρείτε έναν ακέραιο α τέτοιον, ώστε στο διάστημα (α, α+1) η εξίσωση f(x) = 0 να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

i) $f(x) = x^3 + x - 1$ ii) $f(x) = x^5 + 2x + 1$

iii) $f(x) = x^4 + 2x - 4$ iv) $f(x) = -x^3 + x + 2$.

8/Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0 ,$$

όπου α, β, γ > 0 και λ < μ < ν, έχει δυο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα (λ,μ) και μια στο (μ,ν).

9/Α. Να βρείτε το πρόσημα της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x, όταν :

i) $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ ii) $f(x)=x^4-9x^2$

iii) $f(x)=\text{εφ}x-\sqrt{3}$, $x\in(-\pi,\pi)$ iv) $f(x)=\text{ημ}x+\text{συν}x$, $x\in[0,2\pi]$.

10/Α. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

i) $f(x)=\ln x-1$, $x\in[1,e]$ ii) $f(x)=-x+2$, $x\in(0,2)$

iii) $f(x)=2\text{ημ}x+1$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ iv) $f(x)=e^x+1$, $x\in(-\infty,0]$.

Β. Εμπεδώνω (Σχολικό βιβλίο)

4/Β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο [0,1] και πληρούν τις σχέσεις f(0) < g(0) και f(1) > g(1), να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ϵ (0,1) τέτοιο ώστε f(ξ) = g(ξ).

5/Β. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις :

α) $\frac{x^4+1}{x-1}+\frac{x^6+1}{x-2}=0$ β) $\frac{e^x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-2}=0$

6/Β. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο

i) $f(x)=e^x$ και $g(x)=\frac{1}{x}$ ii) $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\frac{1}{x}$

7/Β. i) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [−1,1] , για την οποία ισχύει:

$$x^2+f^2(x)=1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in[-1,1]$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης f(x) = 0.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα (−1,1).

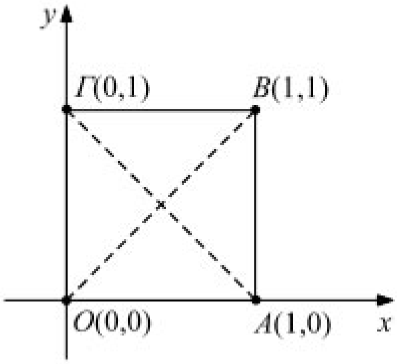
γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο **R**, για την οποία ισχύει $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in$ **R**

8/Β. Δίνεται το τετράγωνο ΟΑΒΓ του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο [0,1] συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου και

ii) Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.



9/Β. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο [α, β] και το $M_0(x_0,y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου,

i) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x) = (M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0,y_0)$ από το σημείο $M(x,f(x))$ της C_f για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο [α,β] και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία .

Γ. Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Δίνεται μία ορισμένη και συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[1,10]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,10]$ τέτοιο, ώστε:

$$3f(2)+5f(6)+4f(9)=12f(\xi)$$

2. Αν $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ συνεχής , να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $\xi\in[0,2]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\frac{f(0)}{2}+\frac{f(1)}{3}+\frac{f(2)}{6}$$

3. Αν $f:[1,4]\to\mathbb{R}^*$ συνεχής με $f(1)\cdot f(2)\cdot f(4)=8$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in[1,4]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\xi$.

4. Αν f συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2,x_3\in[a,\beta]$ υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\sqrt[3]{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot f(x_3)}$$

5. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^5+3x^3+1, x\in\mathbb{R}$ **ii)** $g(x)=\sigma\upsilon\nu x-2x,\ x\in[0,\pi]$

6. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x)=\ln x+e^{x-2}-2016$$

7. Αν $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iii)Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$2\xi\ln\xi=2-3\xi$$

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(1)=\frac{1}{2}$$

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f\left(\frac{3}{y}\right)+f(y)\cdot f\left(\frac{3}{x}\right),\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x,y\in\mathbb{R}$$

A) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(3)=\frac{1}{2}$ **ii)** Η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

B) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=f\left(\frac{3}{x}\right),x\neq 0$ **ii)** $f(x\cdot y)=2f(x)\cdot f(y)$

Γ) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και περιττή με $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με αντίστοιχες τεταγμένες 1 και -1.

10. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x^2-3\eta\mu\dfrac{\pi x}{2}-5\sigma\upsilon\nu^2(\pi x)+4$ μπορεί να πάρει τις τιμές $0,\ -1,\ 2,\ \sqrt{5}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

ΜΑΘΗΜΑ 20ο

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΖΟΜΑΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν f(x) = lnx και g(x) = e^{-x} , τότε

α) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in R^*$ — Α Ψ

β) $(f \circ g)(x) = -x$, $x \in R$ — Α Ψ

2. Αν $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = l \in R$, τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. — Α Ψ

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\frac{1}{x^2+x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x} = 0 \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x} = 0$. — Α Ψ

4. Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in R$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0} f(x) > 1$. — Α Ψ

5. Ισχύει: α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 1$ — Α Ψ

β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

6. Αν $0 \le f(x) \le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 f(x)) = 0$. — Α Ψ

7. Αν $f(x) \le \frac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. — Α Ψ

8. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6}(f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6)\cdot g(6)$. — Α Ψ

9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -1$. — Α Ψ

10. Αν $\lim_{x\to x_0} |f(x)|=0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$. Α Ψ

11. Αν η f είναι συνεχής στο R και για $x\neq 4$ ισχύει $f(x)=\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$, τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1. Α Ψ

12. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(-1,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\pi$. Α Ψ

II.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=m$, $l,m\in R$ και $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

Α) $l<m$ Β) $l\leq m$ Γ) $l\geq m$

Δ) $l=m$ Ε) $m<l$.

2. Το όριο $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:

Α) 8 Β) 1 Γ) 0 Δ) $+\infty$ Ε) -8.

3. Το $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

Α) $+\infty$ Β) $-\infty$ Γ) 1 Δ) -1 Ε) 0.

4. Αν το $\lim_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

Α) $x_0=0$ Β) $x_0=2$ Γ) $x_0=-1$ Δ) $x_0=1$.

III.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1 \qquad \text{και} \qquad g(x)=\frac{1}{x^2-1}.$$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο :

Α) η g είναι συνεχής στο 2

Β) η f είναι συνεχής στο 1

Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ Β) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$ Δ) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$

Ε) $\lim_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x+1)]$ ΣΤ) $\lim_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x-1)]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα Δ = [0,3] , με f(0) =2, f(1) =1 και
f(3) = −1. Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α) Υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 0$.

Β) $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-1$

Γ) $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Δ) $[-1,2]\subseteq f(\Delta)$

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο [0,3] είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το −1.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ

1. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, τότε $f(a)\cdot f(\beta)<0$

2. Αν f συνεχής στο Δ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

3. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

4. Αν f συνεχής σε ένα σύνολο Α και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Α.
στο Δ.

5. Αν f ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, τότε παίρνει πάντοτε στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή.

6. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

7. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

8. Μία συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ παίρνει υποχρεωτικά ολες τις ενδιάμεσες τιμές.

9. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

ΤΕΣΤ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f είναι συνεχής σ΄ένα διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

β) Αν η f είναι συνεχής σ΄ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(a)<0$ και υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ΄ανάγκη $f(\beta)>0$

γ) Ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

δ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x)<0$ «κοντά» στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

ε) Για οποιοδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, είναι $f(x)<0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Να διατυπώσετε τους ορισμούς:

i) «1-1» συνάρτηση **ii)** f συνεχής στο $[a,\beta]$

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία σχεδιάζοντας μια πρόχειρη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Β. Να αποδείξετε το Θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Α. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Β. Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο ν-βαθμού είναι συνεχής συνάρτηση στο R.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ
ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ-BOLZANO

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

(Μονάδες 7)

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

(Μονάδες 8)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$, τότε κατ΄ανάγκη $\lim_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

β) Ισχύει $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

γ) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ «κοντά» στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

δ) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $[a, \beta]$.

ε) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

B1. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-x}$$

(Μονάδες 8)

B2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left|1-x^2\right|+\left|x^2-3\right|-14}{x^2-2x-3}$$

(Μονάδες 8)

B3. Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο $x_0=1$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}, & \alpha\nu\ x>1\\[2mm] \dfrac{x^2-x}{\eta\mu 3x}, & \alpha\nu\ x<1\end{cases}$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Αν f, g οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}-1$ και $g(x)=(x-2)^2$ αντίστοιχα, να βρείτε τα επόμενα όρια:

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(fog)(x)}{x^2-1}$ **ii)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)-1}{x}$

(Μονάδες 4x2=8)

Γ2. Να βρείτε τα α και β ώστε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^3-\beta x^2+x-1}{x^2-x-2}=-2$$

(Μονάδες 9)

Γ3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}.$$

Να να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} g(x)$$

για όλες τις τιμές των λ, μ ∊ **R.**

(Μονάδες 4x2=8)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-2xy \text{ για κάθε } x,y\in(0,\infty)$$

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,\infty) \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\beta>0$$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές $f(0),\ f(1),\ f(2)$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1».

(Μονάδες 8)

Δ3. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x^2)}{x^2}, & \alpha\nu\ x>0\\ \beta, & \alpha\nu\ x=0\\ x^5\eta\mu\dfrac{2015}{x^{2015}}-a, & \alpha\nu\ x<0\end{cases}$$

, να βρείτε το α και το β, ώστε η g να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2xf(x+1)=(x+1)f(x)$$

έχει μία ρίζα, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$

(Μονάδες 6)