

Επιμέλεια

Καραγιάννης Β. Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το 1ο Θέμα στις πανελλαδικές εξετάσεις

Ερωτήσεις+Απαντήσεις

Ερωτήσεις+Απαντήσεις Σωστού-Λάθους Πανελλαδικών Εξετάσεων 2000-2015

Περιεχόμενα

| | |
|--|-----------|
| Ερωτήσεις+Απαντήσεις Θεωρίας..... | 3 |
| Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους Πανελλαδικών Εξετάσεων..... | 27 |

Επιμέλεια: Συντακτική Ομάδα www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος

Ερωτήσεις+Απαντήσεις Θεωρίας

1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A ;

Απάντηση

Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbf{R} . Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

2. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση

Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A **και**
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**,
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**,

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, $f(x_0)$, όταν

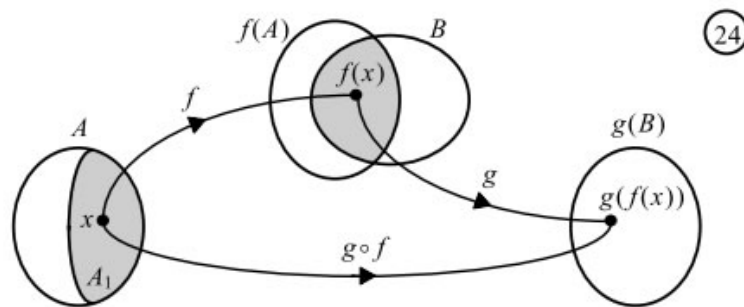
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

5. Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) .$$



Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο :

$$A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

6. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

- γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

7. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**;
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

8. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1»;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

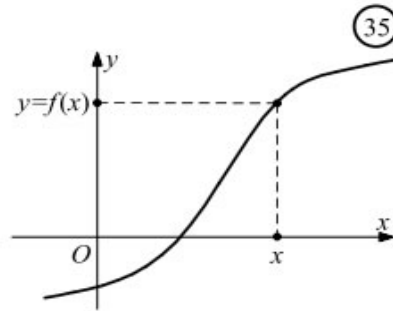
$$\langle \text{Αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2) \rangle$$

που σημαίνει ότι: «τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες».

9. Τι ονομάζουμε αντίστροφη της συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \rightarrow \mathbf{R}$



με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $g(y) = x$

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

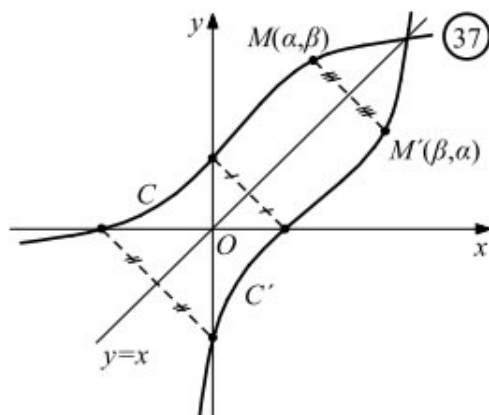
Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

10. Ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων $C_f, C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f, f^{-1} αντίστοιχα; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



Ας πάρουμε τώρα μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

αν ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, a)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

11. Αν $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ένα πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + a_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_v x_0^v + a_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + a_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

12. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

Απάντηση

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

13. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Εστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , όταν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

14. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής

- σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) ;
- σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

Απάντηση

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) .
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

15. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση

Εστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

16. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Απάντηση

Εστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

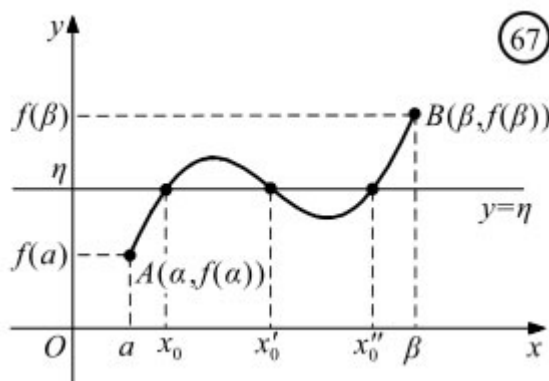
Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, \beta]$, παρατηρούμε ότι :

- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $g(a)g(\beta) < 0$, αφού $g(a) = f(a) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, πάργει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



17. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

Απάντηση

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

18. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0), \quad \lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

19. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, α υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν υπάρχουν στο \mathbf{R} τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ίσα.

20. Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 . ■

21. Εστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbf{R} , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

δηλαδή $(c)' = 0$. ■

22. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$

Απόδειξη:

Αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbf{R} , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1.$$

δηλαδή $(x)' = 1$. ■

23. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbf{R} , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}.$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1}.$$

Δηλαδή:

$$(x^v)' = vx^{v-1}. \blacksquare$$

24. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

Δηλαδή:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

25. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Δηλαδή:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

26. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε :

$$(x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v} \right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}. \quad \blacksquare$$

27. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε :

$$\begin{aligned} (\varepsilon\varphi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sin x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sin x - \eta\mu x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \cos x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \eta\mu^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

28. Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $f'(x) = ax^{a-1}$, δηλαδή $(x^a)' = ax^{a-1}$

Απόδειξη

Αν $y = x^a = e^{a \ln x}$ και θέσουμε $u = a \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

29. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$, δηλαδή $(a^x)' = a^x \ln a$

Απόδειξη

Αν $y = a^x = e^{x \ln a}$ και θέσουμε $u = x \ln a$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

30. Η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbf{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R}^* και ισχύει $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

Απόδειξη

— αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

31. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x στο σημείο x_0

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x , y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

32. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία

Απάντηση

Διατύπωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

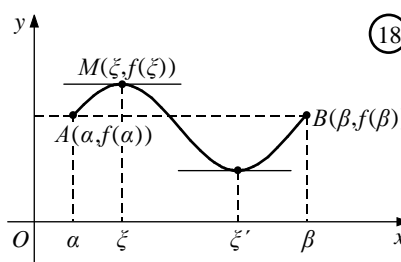
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



33. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία

Απάντηση

Διατύπωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

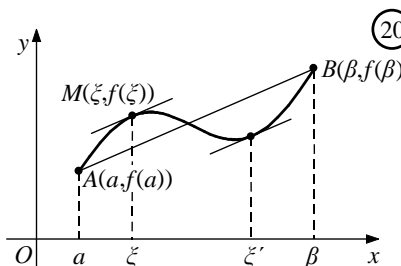
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



34. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

35. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

Τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

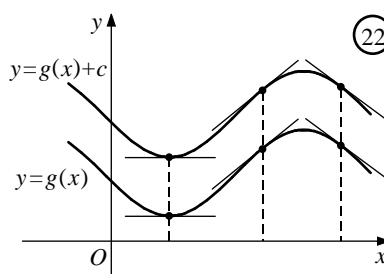
$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



36. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Απόδειξη

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

37. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) .$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

38. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) .$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f .

39. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

Απάντηση

Διατύπωση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \quad \text{και}$$

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

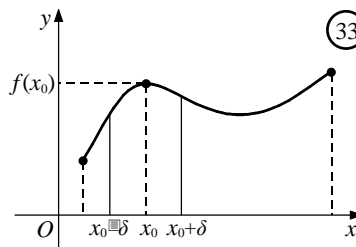
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.



40. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

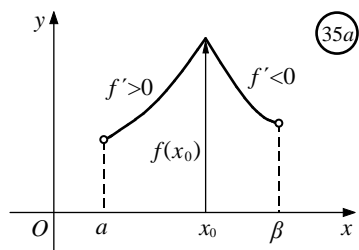
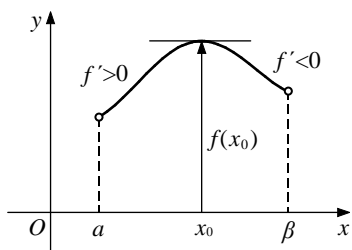
Απόδειξη

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (a, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$

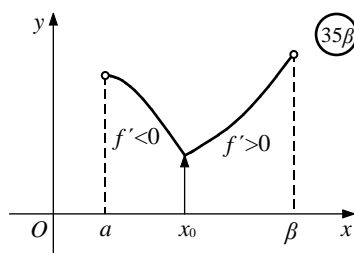
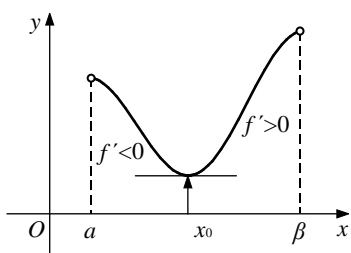


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (a, \beta),$$

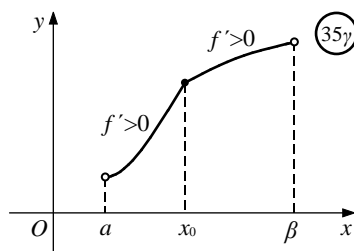
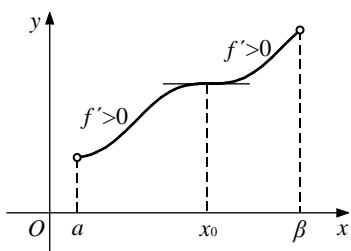
που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



iii) Έστω ότι

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta).$$



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ ι.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

41. Πότε λέμε ότι:

A. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

B. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

42. Πως σχετίζεται η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f με την κυρτότητά της;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

43. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και

• η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,
τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμψής** της γραφικής παράστασης της f .

44. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη ποια είναι η τιμή της $f''(x_0)$;

Απάντηση

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

45. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

46. Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Απάντηση

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

47. Πότε λέμε ότι ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

Απάντηση

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

48. Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital

Απάντηση

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

49. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ; Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

50. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$

Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$ ■

51. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες ισότητες-ανισότητες, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

A. $\int_a^\beta f(x)dx = \dots \int_\beta^a f(x)dx$

B. $\int_a^a f(x)dx = \dots$

Γ. Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_\beta^a f(x)dx \dots \dots$

Δ. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_\beta^a f(x)dx \dots \dots$$

Απάντηση

- $\int_a^\beta f(x)dx = -\int_\beta^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$

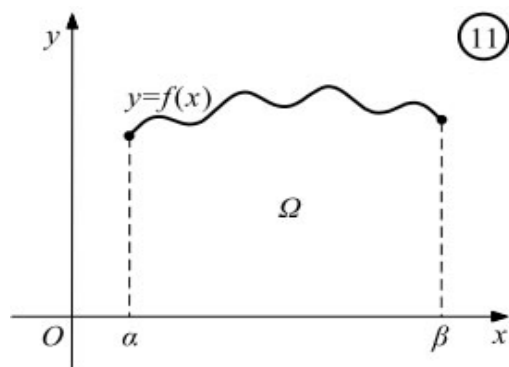
Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_a^\beta f(x)dx > 0$

52. Τι παριστάνει γεωμετρικά το $\int_\beta^a f(x)dx$ αν $f(x) \geq 0$;

Απάντηση

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι :

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή, $\int_a^\beta f(x)dx = E(\Omega)$



53. Τι παριστάνει γεωμετρικά το $\int_{\beta}^{\alpha} c dx$ αν $c > 0$;

Απάντηση

Το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c .

54. Α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες ισότητες, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

« Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx »$$

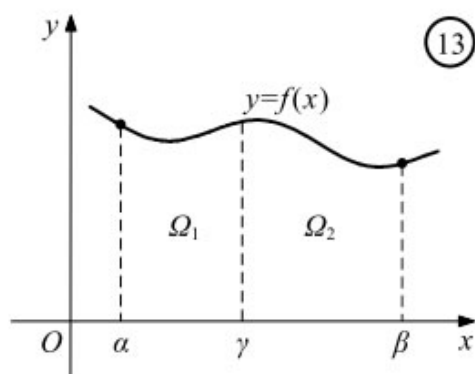
Β. Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ τι δηλώνει, η παραπάνω ιδιότητα;

Απάντηση

Α. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$

Β. $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$, όπου $E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$, $E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$ και

$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ (Σχήμα 13)



55. Να συμπληρώσετε το επόμενο κενό, ώστε η πρόταση να είναι αληθής:

«Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε

η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(x)dx, x \in \Delta$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ . Δηλαδή ισχύει

$(\int_a^x f(x)dx)' = \dots$ για κάθε $x \in \Delta$ »

Απάντηση

$$\left(\int_a^x f(x)dx\right)' = f(x)$$

56. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

Απάντηση

Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

«Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(a)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \quad (1)$$

Από την (1), για $x = a$, έχουμε:

$$G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(x)dx + c = c$$

οπότε $c = G(a)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(a),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε:

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_a^\beta f(x)dx + G(a)$$

και άρα:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

57. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα;

Απάντηση

$$\int_a^\beta (f(x) \cdot g'(x))dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta (f'(x) \cdot g(x))dx$$

, όπου f' , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$.

58. Ποιος είναι τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα ;

Απάντηση

$$\int_a^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$$

, όπου f , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(\beta)$

59. Αν $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ ποιο είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται

από τη γραφική παράστασης g , και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ και τις ευθείες

$x = a$ και $x = \beta$;

Απάντηση

$$E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x)dx$$

60. Ποιο είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις

των συνεχών συναρτήσεων f , g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$;

Απάντηση

- Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις:
 - (i) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και
 - (ii) οι f , g είναι μη αρνητικές στο $[a, \beta]$.

,τότε ισχύει:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$$

- Αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)|dx$$

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους Πανελλαδικών Εξετάσεων 2000-2015

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
2. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού \mathbb{R} και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.
3. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
4. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1)=f(x_2)$
5. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}
6. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει $f^{-1}(f(x))=x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y))=y, y \in f(A)$
7. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε υπάρχουν σημεία της με την ίδια τεταγμένη
8. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[a, \beta]$ και συνεχής στο $(a, \beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[a, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.
9. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.
10. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.
11. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
12. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
13. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) ,

τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

14. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

15. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

16. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$

τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

17. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ .

18. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

19. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$

ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

20. Ισχύει ότι $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

21. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

22. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 1$

23. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

και λ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \lambda) = 0$$

24. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty)$$

25. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 τότε αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
26. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
27. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
28. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
29. Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$
30. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$
31. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$
32. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
33. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
34. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
35. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$
36. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
37. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .
38. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
39. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .
40. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
41. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

42. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
43. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
44. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .
45. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .
46. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.
47. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [a, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.
48. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
49. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .
50. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο

(x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

- 51.** Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.
- 52.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .
- 53.** Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- 54.** Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$.
- 55.** Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

- 56.** Το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- 57.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=a, x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_a^\beta f(x)dx$
- 58.** Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ , τότε:

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

59. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta (f'(x) \cdot g(x)) dx$$

60. Ισχύει:

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) g'(x)$$

61. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε:

$$\int_a^\beta f(x) dx = [xf(x)]_a^\beta - \int_a^\beta xf'(x) dx$$

62. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

63. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

64. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

65. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .

66. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.

67. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta \mu x$.

68. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε

$x \in [a, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_a^\beta f(x) dx > 0$

69. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

70. Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ Ισχύει

η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

71. Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.

72. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

73. Ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x))g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ

| Αρ. Ερώτησης | Απάντηση | Αρ. Ερώτησης | Απάντηση |
|--------------|----------|--------------|----------|
| 1 | Λ | 37 | Λ |
| 2 | Λ | 38 | Σ |
| 3 | Σ | 39 | Σ |
| 4 | Λ | 40 | Λ |
| 5 | Σ | 41 | Λ |
| 6 | Σ | 42 | Σ |
| 7 | Λ | 43 | Λ |
| 8 | Λ | 44 | Σ |
| 9 | Σ | 45 | Λ |
| 10 | Σ | 46 | Σ |
| 11 | Σ | 47 | Λ |
| 12 | Λ | 48 | Σ |
| 13 | Σ | 49 | Λ |
| 14 | Σ | 50 | Σ |
| 15 | Σ | 51 | Λ |
| 16 | Λ | 52 | Λ |
| 17 | Σ | 53 | Λ |
| 18 | Σ | 54 | Σ |
| 19 | Λ | 55 | Σ |
| 20 | Σ | 56 | Λ |
| 21 | Λ | 57 | Λ |
| 22 | Λ | 58 | Σ |
| 23 | Σ | 59 | Σ |
| 24 | Σ | 60 | Σ |
| 25 | Σ | 61 | Σ |
| 26 | Λ | 62 | Σ |
| 27 | Σ | 63 | Σ |
| 28 | Σ | 64 | Σ |
| 29 | Σ | 65 | Λ |
| 30 | Λ | 66 | Λ |
| 31 | Σ | 67 | Λ |
| 32 | Σ | 68 | Σ |
| 33 | Σ | 69 | Σ |
| 34 | Λ | 70 | Σ |
| 35 | Σ | 71 | Λ |
| 36 | Σ | 72 | Λ |