

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σχολικό έτος: 2014-2015



Τα θέματα εμπλουτίζονται με την δημοσιοποίηση και των νέων θεμάτων από το Ι.Ε.Π.

Γενική Επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1^ο : Συστήματα

Θέμα 2^ο4

Θέμα 4^ο11

Κεφάλαιο 2^ο : Ιδιότητες συναρτήσεων

Θέμα 2^ο15

Θέμα 4^ο22

Κεφάλαιο 3^ο : Τριγωνομετρία

Θέμα 2^ο27

Θέμα 4^ο33

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Θ Ε Μ Α 2^ο

16 θέματα

ΘΕΜΑ 1

α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο.

(Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δύο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο (α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $8x + 2y = 7$ (1)

α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).

(Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δύο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ ax + \beta y = \gamma \end{cases}$$
 με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2, -3)$.

(Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

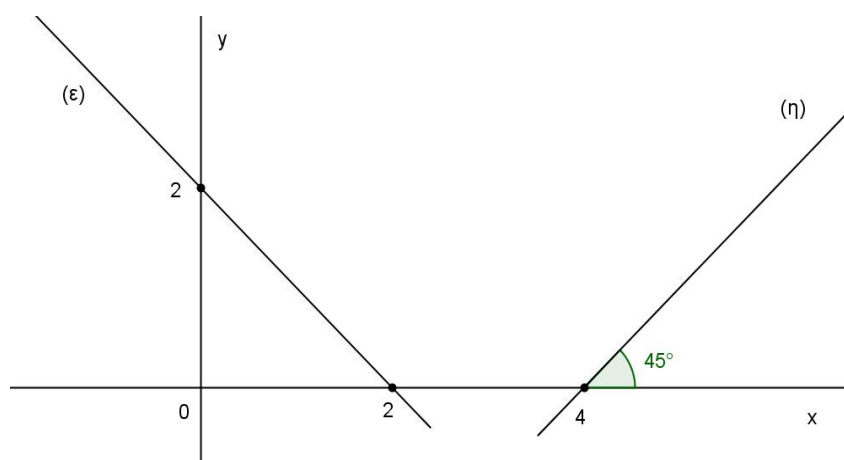
α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 13)

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 5

α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).



(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται το σύστημα :
$$\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ \lambda x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}$$
, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για τις ορίζουσες D , D_x , D_y του συστήματος ισχύουν

$$D = \lambda(\lambda - 1), D_x = \lambda - 1 \text{ και } D_y = \lambda(\lambda - 1)$$

(Μονάδες 15)

β) Αν είναι $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε να λύσετε το σύστημα.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x cm, πλάτος y cm, περίμετρο ίση με 38cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων x , y του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 8

Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 9

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $(\varepsilon_1): 2x - y = -1$
 $(\varepsilon_2): (\lambda - 1)x - y = 6$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 8)

β) Να παραστήσετε γραφικά τις (ε_1) και (ε_2) , για $\lambda = 3$

(Μονάδες 8)

γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda = 3$, ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 10

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): 2x + y = 6$, $(\varepsilon_2): x - 2y = -3$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η ευθεία $3x + \alpha y = \alpha + 5$ διέρχεται από το Μ.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 11

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y = 9 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(1, -4)$

(Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(-1, 5)$

13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 13

α) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$
 (Μονάδες 15)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα (α). (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases}$$
 με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση. (Μονάδες 8)

β) Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x + y = 5$, $(\varepsilon_2): -2x + 3y = -9$, $(\varepsilon_3): 3x + 2y = 7$

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$
ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_3)$ (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των (ε_2) και (ε_3) είναι σημείο της (ε_1) (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 16

Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

α) Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων.

(Μονάδες 12)

β) Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα;

(Μονάδες 13)

Θ Ε Μ Α 4^ο

6 θέματα

ΘΕΜΑ 17

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\alpha - 1)x + 3y = 3 \\ x + (\alpha + 1)y = 3 \end{cases}$$
, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) , τότε $x_0 = y_0$
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους.

(Μονάδες 6)

ii. δεν έχει λύση.

(Μονάδες 4)

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $\alpha = 3, \alpha = 2, \alpha = -2$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 18

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 19

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14

2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24

3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 20

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ με εξισώσεις $x + (\lambda + 2)y = 3$, $(\lambda - 2)x + 5y = 3$ αντίστοιχα και $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών.

(Μονάδες 13)

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο ευθειών.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση:
 $x + 2y = 3$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 21

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x - 4y = 1 - \lambda \\ x + 6y = \lambda + 2 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα x και y συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 8)

γ) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , για την οποία οι ευθείες: $2x - 4y = 1 - \lambda$, $x + 6y = \lambda + 2$ και $16x + 16y = 19$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 22

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο ίση με 24cm έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3cm και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 2cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου.

α) Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θ Ε Μ Α 2^ο

9 θέματα

ΘΕΜΑ 23

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5, 2)$ και $B(4, 9)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση

(Μονάδες 13)

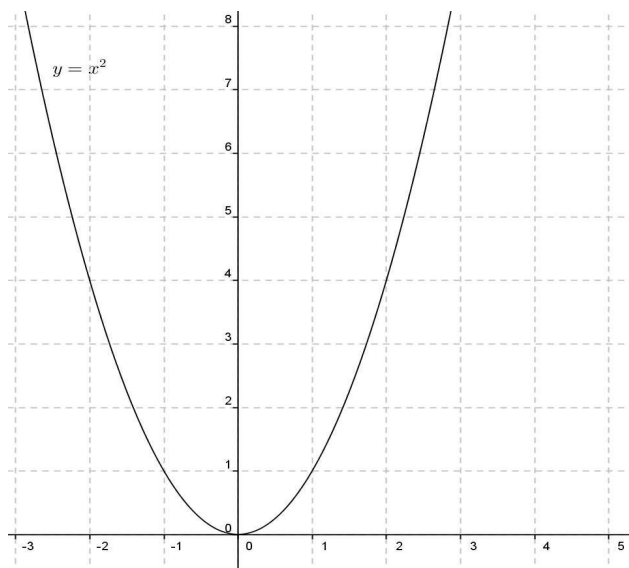
ΘΕΜΑ 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$

(Μονάδες 12)

β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$



(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η $f(x) \leq 1$

(Μονάδες 8)

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 26

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$

(Μονάδες 8)

β) Είναι η f άρτια συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Με ποια μετατόπιση της $g(x) = x^2$ προκύπτει η C_f ;

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 27

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$

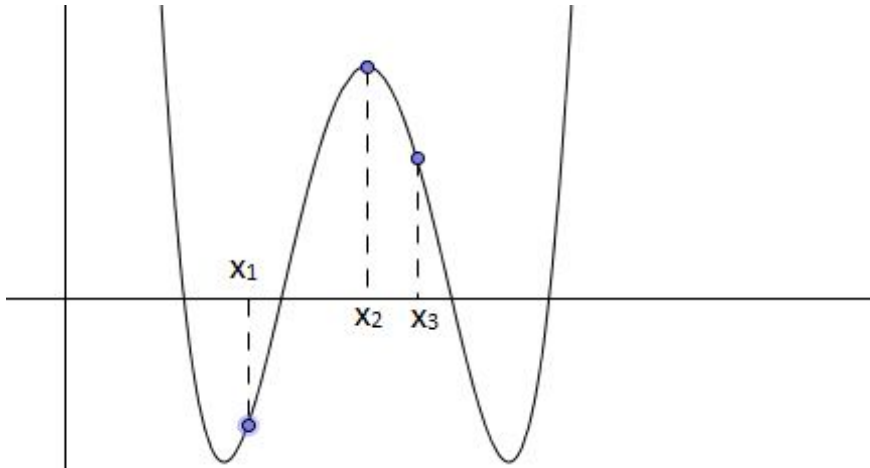
(Μονάδες 10)

β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 28

Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $A(2,3)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f

(Μονάδες 13)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 , να δείξετε ότι $f(0) > 0$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 29

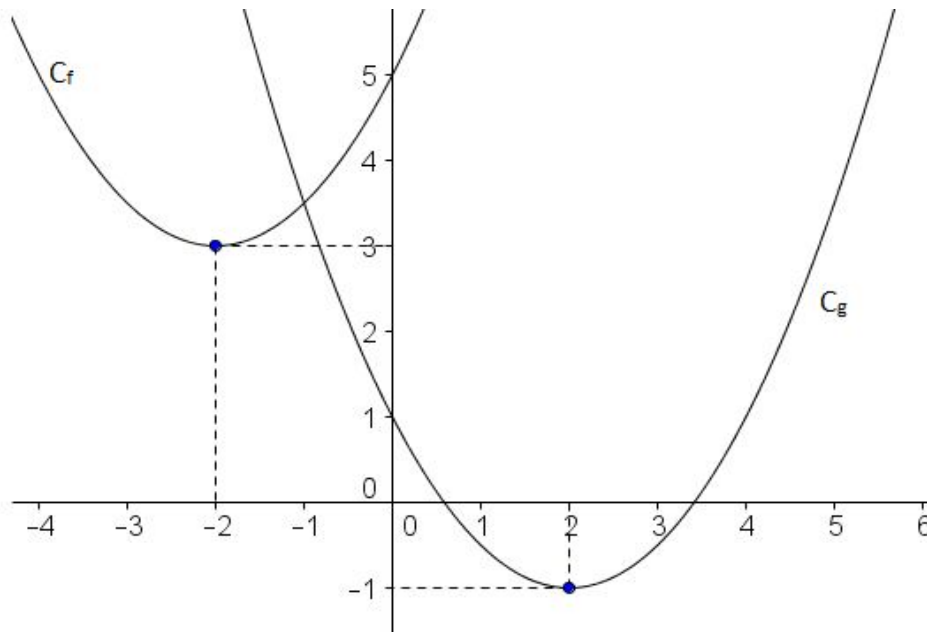
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Παρατηρώντας το σχήμα:

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g .

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 30

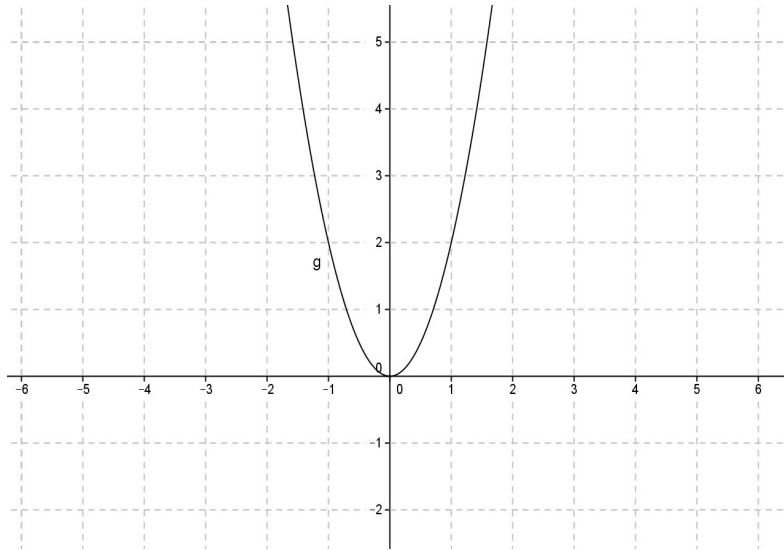
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή: $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$

(Μονάδες 10)

β) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 31

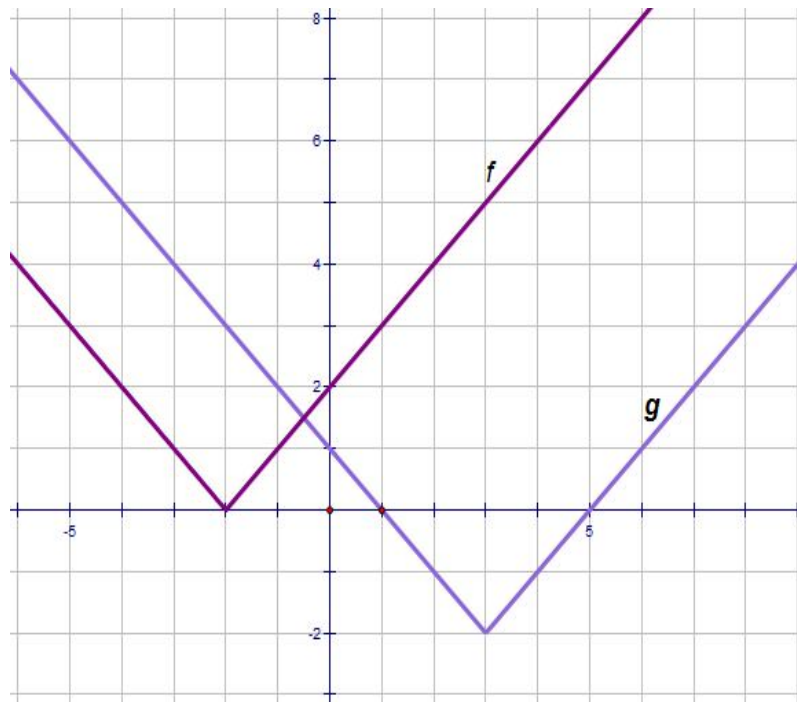
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f , το είδος του ακρότατου της f , τη θέση και την τιμή του.

(Μονάδες 12)

β) Ποιες μετατοπίσεις της f δίνουν τη g . Να προσδιορίσετε στη συνέχεια τον τύπο της συνάρτησης g , αν $f(x) = |x+2|$.

(Μονάδες 13)



Θ Ε Μ Α 4^ο

3 θέματα

ΘΕΜΑ 32

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$

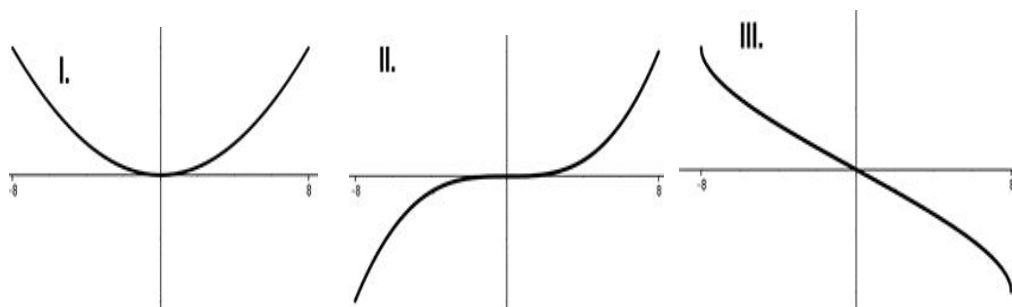
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 8)

γ) Αν η συνάρτησης f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρεις προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



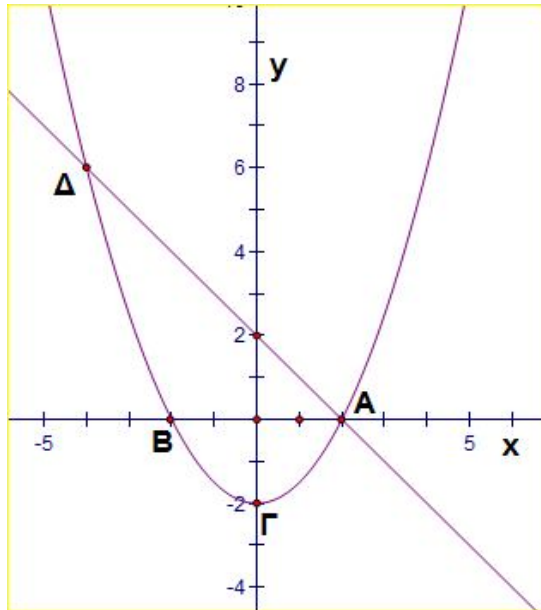
(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) - 3$ και $h(x) = f(x + 3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 33

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, να βρείτε τα a , β , γ .

(Μονάδες 8)

β) Αν $a = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων ευθείας και παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

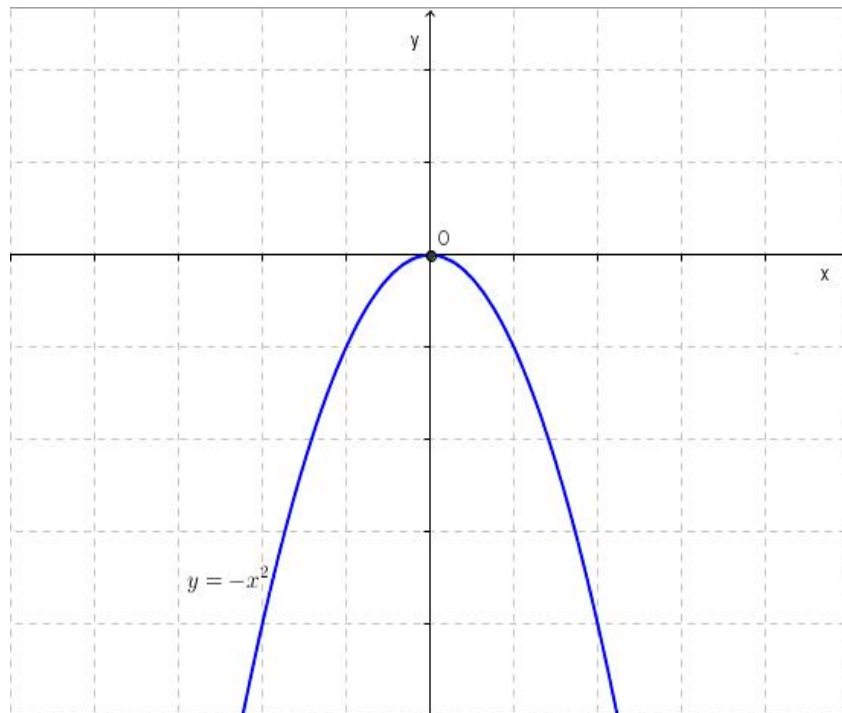
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 34

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x+1)^2 + 2$ για κάθε x και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 10)



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

(Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3^ο

Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Ο Μ Ε Τ Ρ Ι Α

Θ Ε Μ Α 2^ο

16 θέματα

ΘΕΜΑ 35

Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $(2\sigma\upsilon\nu x + 1) \cdot (5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$

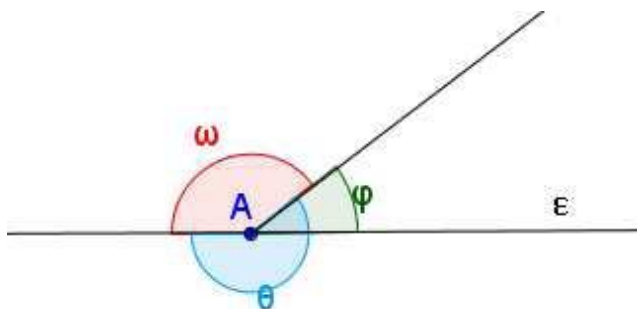
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 36

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ϵ) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 37

Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση: $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$

α) Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega = 0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 38

Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύει ότι: $-\sigma\upsilon\nu 2\omega + 5\eta\mu\omega - 2 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2\eta\mu^2\omega + 5\eta\mu\omega - 3 = 0$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 39

α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ όπου $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 40

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 + \eta\mu 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 41

α) Είναι η τιμή $x = \frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης $3\sigma\upsilon\nu 4x + 3 = 0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = \sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία $y = -1$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 42

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ;

(Μονάδες 9)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 43

Δίνονται οι γωνίες ω , θ με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$, για τις οποίες ισχύει: $\omega + \theta = 135^\circ$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon\phi(\omega + \theta) = -1$

(Μονάδες 10)

β) $\epsilon\phi\omega + \epsilon\phi\theta + 1 = \epsilon\phi\omega \cdot \epsilon\phi\theta$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 44

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}, \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}, \sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{10}$$

(Μονάδες 12)

β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 45

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f

(Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sigma\upsilon\nu 2x$					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 46

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu(3x)$

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 47

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1 + \sigma\upsilon\nu x$

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 48

α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = 0$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 49

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την γωνία x

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 50

α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να λύσετε στο διάστημα $(0, \pi)$ την εξίσωση:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x = 0.$$

(Μονάδες 12)

Θ Ε Μ Α 4^ο

12 θέματα

ΘΕΜΑ 51

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\alpha + 1| \cdot \eta\mu(\beta\pi x)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ ή $\alpha = -4$ και $\beta = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$

i. να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 3$

(Μονάδες 10)

ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 8]$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 52

Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0$

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$

(Μονάδες 10)

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, τότε:

i. να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \frac{7}{25}$ και $\eta\mu 2\omega = -\frac{24}{25}$

(Μονάδες 8)

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

(Μονάδες 7)

$$\Pi = \frac{13 \cdot [\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega] + 12}{18 \cdot \epsilon\varphi 2\omega \cdot \sigma\varphi 2\omega + 25 \cdot [\eta\mu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 2\omega]}$$

ΘΕΜΑ 53

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda = -1$ και (x_0, y_0) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0 = \eta\mu\theta$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 54

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right) \text{ και } 0 \leq t \leq 180$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

(Μονάδες 4+2=6)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

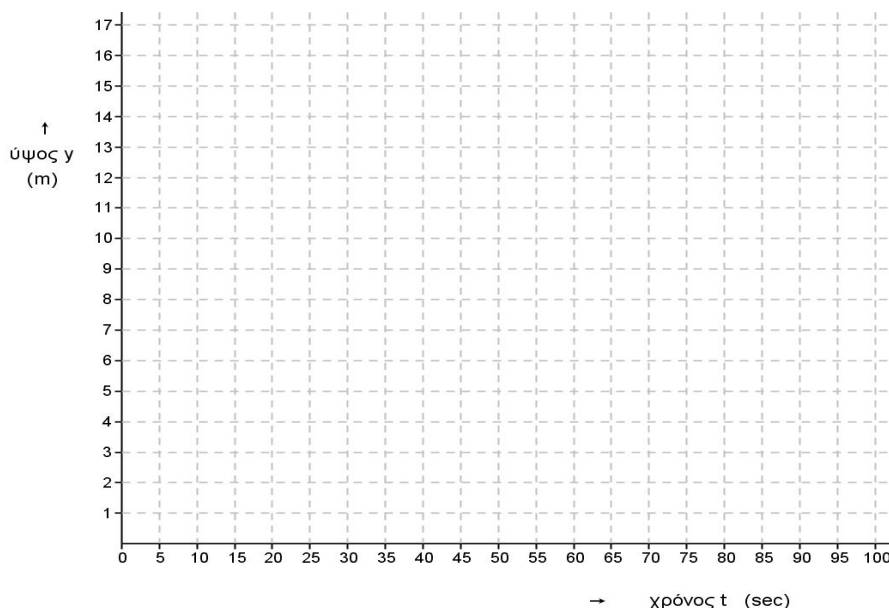
i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$

(Μονάδες 3)

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$

(Μονάδες 5)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							



ΘΕΜΑ 55

α) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

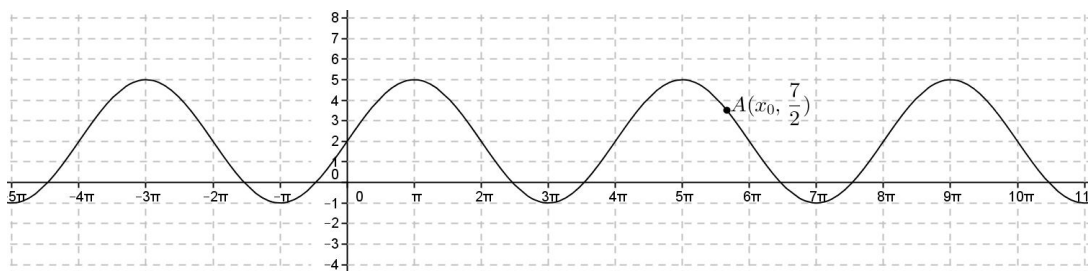
(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sin\omega + \eta\mu\omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 56

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + k$, ρ, ω, k πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

(Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω, k . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3, \omega = \frac{1}{2}, k = 2$ να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 57

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{2}(x-c)^2 - d$, $x \in \mathbb{R}$ με c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(0,16), B(4,0)$

α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$

i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 3)

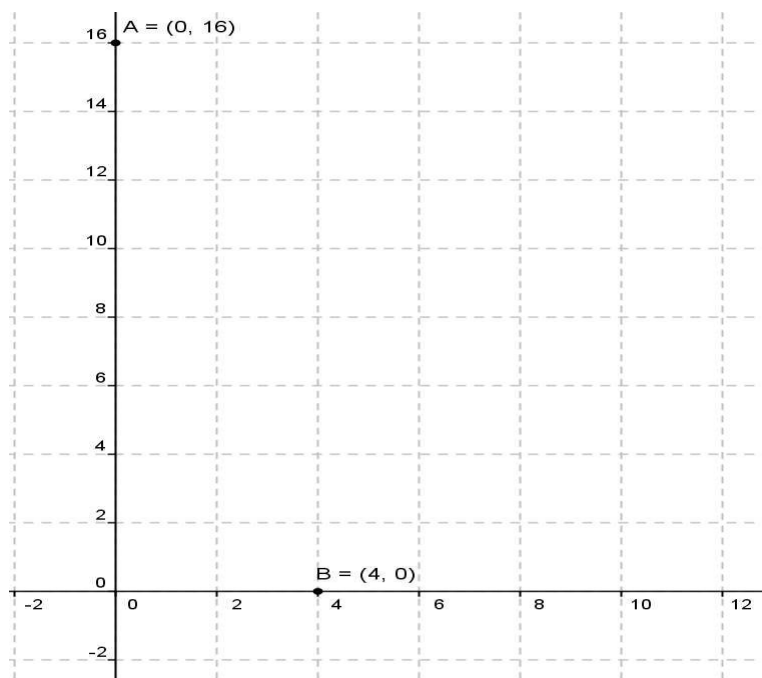
ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή

σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

(Μονάδες 6)

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f , τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 58

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \sin 2x$

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g . Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, για $x \in [0, 2\pi]$

(Μονάδες 8)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)									
g(x)									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sin 2x = \sin x$ (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 59

Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση: $h(t) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) + \beta$ όπου α , ω , β πραγματικές σταθερές. Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20cm και το μέγιστο 100cm. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο) είναι 6 sec.

α) Να δείξετε $\omega = \frac{\pi}{3}$.

(Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α , β αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα 14 sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης.

(Μονάδες 8)

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$, για $0 \leq t \leq 12$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 60

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση: $f(t) = 12\eta\mu \frac{\pi t}{4} + 13$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 61

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , που είναι της μορφής $f(x) = a + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 4)

β) Ποια είναι η περίοδος T της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

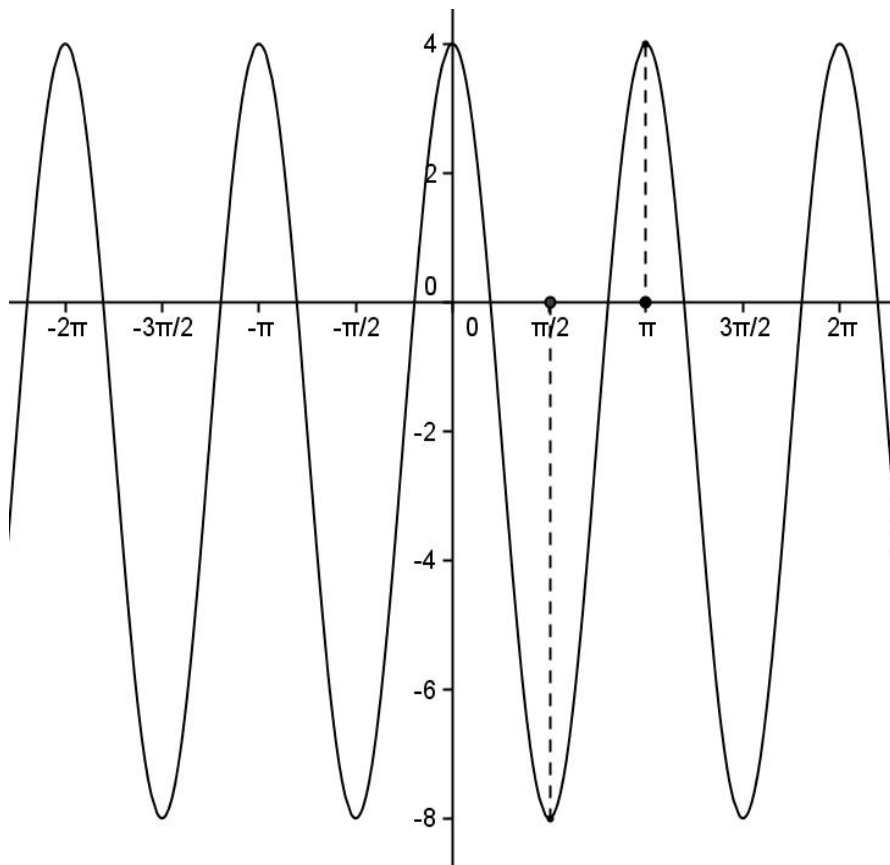
(Μονάδες 4)

γ) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι: $\alpha = -2$ και $\beta = 6$.

(Μονάδες 8)

δ) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 62

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}C$) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8\sigma\nu\frac{\pi t}{12} + 4, \text{ με } 0 \leq t \leq 24 \text{ (} t \text{ ο χρόνος σε ώρες)}$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με $0^{\circ}C$.

(Μονάδες 6)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0, 24]$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε θερμοκρασία είναι πάνω από $0^{\circ}C$.

(Μονάδες 5)