

**ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1 – ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)

Θέμα Α

A1. Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

5 μονάδες

A2. Ποια σημεία της f σε ένα διάστημα Δ καλούνται κρίσιμα;

5 μονάδες

A3. Πότε μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

5 μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ):

1. Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, τότε η συνάρτηση f είναι κατ' ανάγκη σταθερή στο \mathbb{R}^* .
2. Αν $f(x) = e^x + e^{-x}$, τότε ισχύει $f''(x) = f(x)$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με f γνησίως φθίνουσα. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) > f(2016 \cdot x)$.
4. Αν η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάντοτε ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
5. Με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα οι παρακάτω συναρτήσεις, τότε ισχύει: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

10 μονάδες

Θέμα Β

B1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})^k$, $k \in \mathbb{R}^*$. Να δειχθεί ότι ισχύει:

$$(1+x^2) \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) - k^2 \cdot f(x) = 0.$$

12 μονάδες

B2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} + 1$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο \mathbb{R} .

13 μονάδες

Θέμα Γ

Γ1. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$ κάθε $x \geq 0$. Αν $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = x^3 + 2016e^x + \frac{f(x)}{x} \text{ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε } x > 0.$$

12 μονάδες

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $a \cdot e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ με $a > 0$, έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο \mathbb{R} .

13 μονάδες

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{v \cdot x} dx$ με $v > 1$.

α) Να δειχθεί ότι $I_v + I_{v-2} = \frac{1}{v-1}$.

5 μονάδες

β) Να βρεθούν τα ολοκληρώματα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon\phi x \, dx$ και $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon\phi^3 x \, dx$.

5 μονάδες

γ) Να δειχθεί ότι $\frac{1}{2(v+1)} < I_v < \frac{1}{2(v-1)}$

7 μονάδες

Δ2. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1) = 5$ για την οποία ισχύει: $xf'(x) - x \int_0^1 f(x) dx = 2f(x)$. Να βρεθεί η f .

8 μονάδες

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ «ΝΕΑ ΠΑΙΔΕΙΑ»

Επιμέλεια Θεμάτων: Βάρναλης Νίκος