Γ΄ ΤΑΞΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και X_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο X_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό να αποδείξετε ότι : $f΄(x_0)=0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β].

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Α3. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λάθος.

i) Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δυο του βαθμού του παρανομαστήQ(x), δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

ii) Αν για συνάρτηση f ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε η f(x) <0 κοντά στο $x_0 \in R$.

iii) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τις ευθείες x=α, x=β και τον x' x είναι : $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

iv) Αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε :$f΄΄(X_0)=0$.

v) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το μέγιστο αυτής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις g (x)=lnx+x και f: R→ (0,+∞) ,f συνεχής.

Β1.Νδο η g(x) είναι 1-1 **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

Β2.Αν ln f (x)-x= e^x – f(x) (1), να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Β3. Έστω η συνεχής συνάρτηση T:R→R για την οποία ισχύει :

T(x) = f(2x)- $\int_0^1 2x \cdot T(t)dt, \ x \in R$, τότε :

α)Νδο T(x)= $\dfrac{2e^{2x} - e^2x+x}{2}$, $x \in R$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

β)Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_T που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

γ)Νδο το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_T , την εφαπτομένη που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα , και την ευθεία x=1 ισούται με :

E= $\dfrac{e(2e-5)}{4}$ τμ. **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις h(x)=x^2 -xlnx-x+1και g(x) = x^3+λx -6xlnx , $\lambda \in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς 2 αριθμοί x_1 , $x_2 \in$ (0, +∞) τέτοιοι ώστε $h'(x_1) \cdot h'(x_2)=0$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι ισχύει h(x)>0 $\forall x \in (0, +\infty)$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

Γ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \cdot ημ \dfrac{1}{h(x)-1}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $g(1)=0$ και $(x^3+x)g'(x)+2x^2g(x)=x-1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Έστω επίσης κυρτή συνάρτηση $f:[-1,1]\to R$ τέτοια ώστε $\int_{|f(-1)|}^{|f(-1)+2|} g(x)dx=0$ και

$\left(x^2+1\right)g(x)\geq(1-x)\ln(f(1))$ για κάθε $x>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g(x)=\dfrac{x-1-\ln x}{x^2+1}$ και ότι $g(x)\geq0$ για κάθε $x>0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(1)=1$, $f(-1)=-1$ και ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)+f'(\xi)=\xi+1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Δ3. α. Να αποδείξετε ότι $f(x)\leq1+(x-1)f'(x)$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β. Έστω $f(0)=-1$ και Ε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x τον άξονα ψ΄ψ και την ευθεία $x=-1$.

Να αποδείξετε **i.** ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in[-1,0]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

και **ii.** ότι $\int_{-1}^{0} f^2(x)dx>\dfrac{1-2E}{3}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Επιμελεια: Θ.Μαλάκης- Ε.Λιακουρα-Γ.Καπραλος