ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝ/ΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;
(Μονάδες 4)

Α2. Πότε μια συνάρτηση $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση ένα προς ένα;
(Μονάδες 4)

Α3. Να αποδειχθεί ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ $\alpha > 0$ είναι $f'(x) = \alpha^x ln\alpha$.
(Μονάδες 7)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με (Σ) ή (Λ)
(Μονάδες 10)

(α) Τα κοινά σημεία δύο αντίστροφων συναρτήσεων βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\psi = -x$.

(β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε η f^{-1} είναι 1-1.

(γ) Αν $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)<0$.

(δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

(ε) Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει $f(x)\le g(x)\le h(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x_o} h(x)=\ell$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=\ell$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) - f(\psi) = f\left(\frac{x}{\psi}\right)$, (1)

για κάθε $x, \psi > 0$.

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τότε:

Β1. Να δειχθεί ότι υπάρχει η αντίστροφη της f.
(Μονάδες 10)

Β2. Να λυθεί η εξίσωση $f(x-3) + f(x) = f(2x-6)$.
(Μονάδες 6)

Β3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$, με $f'(1) < 0$, να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία της.
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt \quad x\in R$.

Γ1. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα. (Μονάδες 4)

Γ2. Να υπολογιστεί το $I=\int_0^1\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)dx$ (Μονάδες 5)

Γ3. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (Μονάδες 9)

Γ4. Να δειχθεί ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν z μιγαδικός για τον οποίο ισχύει ότι $z^{10}+z^9+\cdots+z+1=0$, να δειχθεί ότι ο $w=\frac{z^2+1}{z}$ είναι πραγματικός αριθμός. (Μονάδες 5)

Δ2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με $\alpha,\beta>0$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=a+f(a)i$ και $w=\beta+f(\beta)i$ τέτοιοι ώστε $u=\frac{z}{w}\in\mathbb{R}$.

(α) Να δειχθεί ότι $|z+2wi|=|z-2wi|$. (Μονάδες 6)

(β) Να δειχθεί ότι $\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$. (Μονάδες 5)

(γ) Αν $\lim\limits_{x\to\beta}\frac{1}{x-\beta}\int_\beta^x\frac{f(x+\beta-t)}{x+\beta-t}dt=1$, να δειχθεί ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β). (Μονάδες 9)

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ