

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝ/ΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε διάστημα (α, β) και ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης. Πότε το σημείο A ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ; (Μονάδες 4)
- A2.** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ , τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση της f στο Δ ; (Μονάδες 4)
- A3.** Να αποδειχθεί η πρόταση: «Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι συνεχής στο x_0 .» (Μονάδες 7)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τις λέξεις Σωστό ή Λάθος. (Μονάδες 10)
- α. Ισχύει ότι
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$
- β. Αν f, g συνεχής στο x_0 τότε και $f \circ g$ συνεχής στο x_0 .
- γ. Αν $z \in \mathbb{R}$ τότε $|z| = 0$ αν και μόνο αν $z = 0$.
- δ. Αν f, g συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.
- ε. Αν f είναι ορισμένη και συνεχής στο $A = [\alpha, \beta]$ και έχει σύνολο τιμών το $f(A) = [f(\alpha), f(\beta)]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

ΘΕΜΑ Β

Έστω z μη μηδενικός μιγαδικός με $(1 + iz)^n = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i$, $n \in \mathbb{N}^*$. (1)

B1. Να δειχθεί ότι ο z δεν είναι πραγματικός. (μονάδες 6)

B2. Να βρεθεί η καμπύλη C πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες του z .

- B3.** Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z + 3 - 5i|$. (μονάδες 6)
- B4.** Αν οι εικόνες των z_1, z_2 ανήκουν στην καμπύλη C του ερωτήματος B2 και $|z_1 - z_2| = 2$, να υπολογιστεί το $|z_1 + z_2|$. (μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = 2x^3$, (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (μονάδες 9)
- Γ2.** Αν η συνάρτηση της σχέσης (1) είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε:
- α) Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(-1, 1)$. (μονάδες 7)
- β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , στο κοινό της σημείο με την ευθεία $x = 1$. (μονάδες 5)
- γ) Να υπολογιστεί η τιμή του παρακάτω ολοκληρώματος (μονάδες 4)

$$\int_{-1}^1 f'(x)'' dx$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ τέτοια ώστε

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} - 2 \int_1^x \frac{1}{\omega} \cdot f\left(\frac{x}{\omega}\right) d\omega \quad \text{για κάθε } x > 0$$

- Δ1.** Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και να βρεθεί η παράγωγός της. (μονάδες 5)
- Δ2.** Να δειχθεί ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \ln x + x^2 f(x)$ είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$. (μονάδες 7)
- Δ3.** Να βρεθεί ο τύπος της f . (μονάδες 3)
- Δ4.** Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1, x = t, \psi = 0$. (μονάδες 7)
- Δ5.** Να βρεθεί το παρακάτω όριο (μονάδες 5)
- $$\lim_{t \rightarrow 0} E(t)$$