

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ A

Άσκηση 1

- i. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:
- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbf{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
 - κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbf{R}$
- ii. Αν $c > 0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$;

Λύση

- i. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbf{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

- ii. Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c .

Άσκηση 2

- i. Έστω μία συνεχής συνάρτηση f ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.
- ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g , και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Λύση

- i. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. (1)

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c, \text{ οπότε } c = G(\alpha).$$

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha) \text{ και άρα } \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

- ii. $E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx$

Άσκηση 3

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$. Ποια σχέση δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$;

Λύση

Η σχέση είναι: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$.

Άσκηση 4

- i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;
- ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , αν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Λύση

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

ii. $E = \int_a^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$.

Άσκηση 5

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω .

- αν $f(x) \geq 0$
- αν $f(x) \leq 0$
- αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$.

Λύση

- Αν $f(x) \geq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ και τον άξονα x' είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.
- Αν $f(x) \leq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ και τον άξονα x' είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (-f(x)) dx$.
- Αν η f δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ και τον άξονα x' είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$.

Άσκηση 6 (εκτός εξεταστέας ύλης)

- i. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.
- ii. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης:
$$F(x) = \int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$$
 με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Λύση

- i. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. (1)

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c, \text{ οπότε } c = G(\alpha).$$

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Άσκηση 7 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και έστω $\alpha \in \Delta$. Ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$, $x \in \Delta$;

Λύση

$$F'(x) = f(x).$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \int_3^x \ln(t^2 - 8) dt$ και $F(x) = \int_3^x f(u) du$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και της F .
- ii. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση F είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.
- iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 2\sqrt{2}$
- iv. Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(t) = \ln(t^2 - 8)$.

Είναι: $t^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow t^2 > 8 \Leftrightarrow |t| > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ άρα η Φ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ στο οποίο είναι και συνεχής. Οπότε για την f έχουμε: $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$, αφού $3 \in (2\sqrt{2}, +\infty)$.

Για την F είναι: Η f ορίζεται στο διάστημα $(2\sqrt{2}, +\infty)$ και επειδή $3 \in (2\sqrt{2}, +\infty)$ είναι: $x > 2\sqrt{2}$.

Άρα $D_F = (2\sqrt{2}, +\infty)$.

ii. Οι συναρτήσεις f , F είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $(2\sqrt{2}, +\infty)$ με $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x) = \ln(x^2 - 8)$ για κάθε $x > 2\sqrt{2}$.

Είναι:

- $F''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 8) = \ln 1 \Leftrightarrow x^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow x = 3$, αφού $x > 2\sqrt{2}$.
(Η συνάρτηση ln ειναι1-1)

$$F''(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 8) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 8 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < x < 3.$$

Αφού $x > 2\sqrt{2}$ (η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα).

Άρα η F είναι κοίλη για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, 3)$.

- Όμοια:

$$F''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

Άρα η F είναι κυρτή για κάθε $x > 3$. Επομένως, το σημείο $M(3, F(3)) = (3, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_F .

iii. Είναι:

$F''(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$. Άρα, οι ρίζες και το πρόσημο της f' ταυτίζονται με τις ρίζες και το πρόσημο της F'' δηλαδή: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < x < 3$ από ii) και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$ από ii). Επομένως η f παρουσιάζει στο $x = 3$ ολικό ελάχιστο, οπότε: $f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$.

iv. Είναι:

$F'(x) = f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$ (από iii.) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 3$. Επομένως, η F είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με: $f(x) = \frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1}$

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f αν $x \rightarrow -\infty$.
- iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right)$.

Λύση

i. Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(6x^2 + 3)(x^2 + 1) - (2x^3 + 3x)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^4 + 3x^2 + 6x^2 + 3 - 4x^4 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^4 + 3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} > 0 \end{aligned}$$

Αφού $2x^4 + 3x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbf{R} , οπότε είναι και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

ii. Έπειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbf{R} το σύνολο τιμών της θα είναι

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty .$$

$$\text{Άρα } f(\mathbf{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) .$$

iii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, στο \mathbf{R} άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση αν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x - 2x^3 - 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$\text{i.v. Έχουμε: } \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\frac{2t^3 + 3t}{t^2 + 1} \right) dt = \int_0^x \frac{2t^3 + 2t + t}{t^2 + 1} dt =$$

$$= \int_0^x \left(\frac{2t(t^2 + 1) + t}{t^2 + 1} \right) dt = \int_0^x \left(2t + \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt = \int_0^x 2tdt + \int_0^x \frac{t}{t^2 + 1} dt =$$

$$= \left[t^2 \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{(t^2 + 1)'}{t^2 + 1} dt = x^2 + \frac{1}{2} \left[\ln(t^2 + 1) \right]_0^x = x^2 + \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1) - \ln 1] = x^2 + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} \right] = 1 + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = 1 + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x^2 + 1))'}{(x^2)'} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)'}{2x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1.$$

Άσκηση 3 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) = \int_0^1 \ln 2 \cdot xf(xt)dt + 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
- ii. Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \frac{f(x)}{2^x}$ είναι σταθερή και να βρείτε την f .
- iii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{5^x}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{5^x}$

Λύση

i. Έχουμε: $f(x) = \ln 2 \int_0^1 xf(xt)dt + 1$ (1). Θέτουμε $xt = u$, οπότε $xdt = du$ και

- για $t = 0 \Rightarrow u = 0$
- για $t = 1 \Rightarrow u = x$

Οπότε η (1) γράφεται: $f(x) = \ln 2 \int_0^x f(u)du + 1$ (2).

Η $f(u)$ είναι συνεχής άρα η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και f παραγωγίσιμη με $f'(x) = (\ln 2 \int_0^x f(u)du + 1)' = \ln 2 f(x)$ (3)

ii. Θα δείξουμε ότι $g'(x) = 0$. Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ έχουμε:

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{2^x} \right)' = \frac{f'(x) \cdot 2^x - f(x)(2^x)'}{(2^x)^2} = \frac{f'(x) \cdot 2^x - f(x) \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x) \ln 2}{2^x} \stackrel{(3)}{=} 0 \text{ οπότε}$$

$$g(x) = c \text{ άρα } \frac{f(x)}{2^x} = c.$$

$$\frac{f(x)}{2^x} = c \Leftrightarrow f(x) = c 2^x$$

αλλά $f(0) = 1$ (από (2)), άρα $c = 1$ οπότε $f(x) = 2^x$.

iii. Είναι:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^x = 0, \text{ αφού } 0 < \frac{2}{5} < 1.$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{5^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{5^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^x = +\infty.$$

Άσκηση 4 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = 2e^x - 2 + \int_x^{2x} f(t-x)dt$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .
- iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

Λύση

i. Έστω $g(x) = \int_x^{2x} f(t-x)dt$. Θέτουμε $t-x=u \Leftrightarrow t=x+u$, οπότε είναι $dt=du$.

Επίσης:

- για $t=x$ είναι $u=0$
- για $t=2x$ είναι $u=x$

Έχουμε: $g(x) = \int_0^x f(u)du$

Επομένως, η σχέση της υπόθεσης γίνεται: $f(x) = 2e^x - 2 + \int_0^x f(u)du \quad (1)$

Η f είναι συνεχής άρα η $f_1(x) = \int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της f . Επίσης η $f_2(x) = 2e^x - 2$ παραγωγίσιμη, οπότε η f παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγισμών συναρτήσεων.

ii. Από τη σχέση (1) του i) με παραγώγιση και των δύο μελών έχουμε:

$$f'(x) = 2e^x + f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 2e^x \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$(e^{-x}f(x))' = (2x)' \Leftrightarrow e^{-x}f(x) = 2x + c \Leftrightarrow f(x) = 2xe^x + c \cdot e^x \quad (2)$$

Αλλά η (1) για $x=0$ γίνεται: $f(0)=0 \quad (3)$

Η (2) για $x=0$ δίνει: $f(0) = c \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} c=0$. Άρα: $f(x) = 2xe^x$.

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x \cdot e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-e^{-x}} = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^x = +\infty.$$

iv. Από iii) έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cdot e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x) = +\infty$.

Επομένως η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Και τέλος επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Άσκηση 5 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \int_2^{x-2} \ln(16-t^2) dt$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.
- iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης C_f στο σημείο $A(4, f(4))$.
- iv. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κούλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης

Λύση

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = \ln(16-t^2)$.

Είναι: $16-t^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \in (-4, 4)$ άρα η φ ορίζεται στο διάστημα $A = (-4, 4)$, οπότε πρέπει:

$$\begin{cases} 2 \in (-4, 4) \\ \text{και} & \Leftrightarrow -4 < x-2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 6 \\ x-2 \in (-4, 4) \end{cases}$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = (-2, 6)$.

ii. Η συνάρτηση $\varphi(t) = \ln(16-t^2)$ είναι συνεχής στο $(-4, 4)$ και η $K(x) = x-2$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-2, 6)$ άρα και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 6)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(\int_2^{x-2} \ln(16-t^2) dt\right)' = \ln[16-(x-2)^2] \cdot (x-2)' = \ln(-x^2+4x+12).$$

iii. Έχουμε: $f(4) = \int_2^4 \ln(16-t^2) dt = 0$ και $f'(4) = \ln(-16+16+12) = \ln 12$ οπότε η εξίσωση της C_f στο $A(4, f(4))$ είναι:

$$\varepsilon : y - f(4) = f'(4)(x - 4) \quad \text{ή}$$

$$\varepsilon : y - 0 = \ln 12(x - 4) \quad \text{ή}$$

$$\varepsilon : y = \ln(12)x - 4\ln 12$$

iv. Για κάθε $x \in (-2, 6)$ έχουμε:

$$f''(x) = (\ln(-x^2 + 4x + 12))' = \frac{(-x^2 + 4x + 12)'}{-x^2 + 4x + 12} =$$

$$= \frac{-2x + 4}{-x^2 + 4x + 12} = \frac{2(x - 4)}{x^2 - 4x - 12}.$$

Είναι:

$$f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x - 4)}{x^2 - 4x - 12} \leq 0 \Leftrightarrow 2(x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ αφού } x^2 - 4x - 12 < 0 \text{ στο } (-2, 6).$$

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $[4, 6]$.

Όμοια $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$. Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-2, 4]$.

Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 4 και επίσης ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(4, f(4))$, οπότε το $A(4, f(4)) = (4, 0)$ είναι σημείο καμπής.

Άσκηση 6 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνεται η συνεχής και άρτια συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει:

$$3xf(x) = 3 \int_2^x f(t)dt - 24x^5 \quad (1)$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R}^* .
- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .
- iii. Να βρείτε τον τύπο της f .
- iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-2}^2 f(x)dx$.

Λύση

i. Για $x \neq 0$ έχουμε: $f(x) = \frac{1}{x} \int_2^x f(t)dt - 8x^4 \quad (2)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη διότι:

Η f είναι συνεχής οπότε η $\int_2^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και επειδή $\frac{1}{x}$ παραγωγίσιμη και $\frac{1}{x} \int_2^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη. Επίσης $-8x^4$ παραγωγίσιμο οπότε $f(x) = \frac{1}{x} \int_2^x f(t)dt - 8x^4$ παραγωγίσιμη στο \mathbf{R}^* .

ii. Από τη σχέση (1) για $x \neq 0$ παραγωγίζοντας έχουμε:

$$3f(x) + 3xf'(x) = 3f(x) - 120x^4 \Leftrightarrow f'(x) = -40x^3$$

iii. Από ii) έχουμε: $f'(x) = -40x^3$ για κάθε $x \neq 0$.

- Άν $x > 0$, τότε: $f(x) = -10x^4 + C_1 \quad (3)$

Για $x = 2$ η (1) δίνει: $6f(2) = -768 \Leftrightarrow f(2) = -128$

Για $x = 2$ η (3) δίνει: $f(2) = -160 + C_1$ οπότε: $-160 + C_1 = -128 \Leftrightarrow C_1 = 32$.

Άρα $f(x) = -10x^4 + 32$ για κάθε $x > 0$.

- Άν $x < 0$, τότε: $f(x) = -10x^4 + C_2 \quad (4)$

Για $x = -2$ έχουμε: $f(-2) = -160 + C_2$ και επειδή f άρτια

$$f(-2) = f(2) \Leftrightarrow -160 + C_2 = -128 \Leftrightarrow C_2 = 32$$

Άρα $f(x) = -10x^4 + 32$ για κάθε $x < 0$

- Άν $x = 0$, τότε επειδή f συνεχής έχουμε: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-10x^4 + 32) = 32$
Άρα $f(x) = -10x^4 + 32$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

iv. Είναι: $I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 (-10x^4 + 32) dx =$

$$= [-2x^5 + 32x]_{-2}^2 =$$

$$= -2 \cdot 2^5 + 32 \cdot 2 - [-2 \cdot (-2)^5 + 32 \cdot (-2)] =$$

$$= -64 + 64 - (64 - 64) = 0.$$

Άσκηση 7 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3x^2 + \int_0^{-x} t\eta u(x+t)dt$, με $x \in \mathbf{R}$ (1).

- i. Να βρείτε την $f'(x)$.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(0, f(0))$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Λύση

i. Θέτουμε: $x+t = u \Leftrightarrow dt = du$.

- Για $t=0$ έχουμε: $u=x$
- Για $t=-x$ έχουμε: $u=0$.

Οπότε η (1) γράφεται:

$$f(x) = 3x^2 + \int_x^0 (u-x)\eta u du \Leftrightarrow f(x) = 3x^2 - \int_0^x u\eta u du + x \int_0^x \eta u du \quad (2)$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbf{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = 6x - x\eta u + \int_0^x \eta u du + x\eta u \Leftrightarrow f'(x) = 6x + \int_0^x \eta u du \quad (3)$$

ii. Η (2) για $x=0$ δίνει: $f(0)=0$ Επίσης η (3) για $x=0$ δίνει:

$$f'(0)=0.$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \text{ ή } y-0=0(x-0) \text{ ή } y=0.$$

iii. Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ έχουμε:

$$f''(x) = (6x + \int_0^x \eta u du)' = 6 + \eta u > 0, \text{ αφού } -1 \leq \eta u \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Άρα η f είναι κυρτή στο \mathbf{R}

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x \ln x - 3x$ και $g(x) = \int_x^1 f(t) dt$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g
- ii. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii. Να αποδείξετε ότι: $g(x) \leq \frac{3e^2}{4} - \frac{9}{4}$.
- iv. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $K(x) = g(3x^2)$ ως προς τη μονοτονία, αν $x > 0$

Λύση

- i. Το πεδίο ορισμού της f είναι:

$D_f = (0, +\infty)$ στο οποίο είναι και συνεχής. Επειδή $1 \in (0, +\infty)$ το πεδίο ορισμού της g είναι:
 $D_g = (0, +\infty)$.

- ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, με

$$g'(x) = \left(- \int_1^x f(t) dt \right)' = -f(x) = -3x \ln x + 3x.$$

'Έχουμε: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -3x \ln x + 3x > 0 \Leftrightarrow -3x(\ln x - 1) > 0 \Leftrightarrow$

$$\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e, \text{ αφού } x \in (0, +\infty).$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$, όμοια γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ οπότε η g παρουσιάζει στο $x = e$ ολικό μέγιστο.

- iii. Έχουμε:

$$g(x) \leq g(e) \quad (1), \text{ αφού } \eta g \text{ παρουσιάζει στο } x = e \text{ ολικό μέγιστο}$$

$$\text{αλλά } g(e) = \int_e^1 (3x \ln x - 3x) dx = 3 \cdot \int_e^1 x \ln x dx - 3 \int_e^1 x dx =$$

$$= 3 \cdot \int_e^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx - 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_e^1 =$$

$$= 3 \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_e^1 - 3 \int_e^1 \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx - \frac{3}{2} + \frac{3e^2}{2} =$$

$$= 3 \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{e^2}{2} \ln e \right) - \frac{3}{2} \int_e^1 x dx - \frac{3}{2} + \frac{3e^2}{2} =$$

$$= -\frac{3}{2} e^2 \cdot \ln e - \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_e^1 - \frac{3}{2} + \frac{3e^2}{2} =$$

$$= \frac{3e^2}{4} - \frac{9}{4}. (2)$$

Από (1), (2) έχουμε: $g(x) \leq \frac{3e^2 - 9}{4}$.

iv. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη οπότε και η συνάρτηση K είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$K'(x) = \left(\int_{3x^2}^1 f(t) dt \right)' = \left(- \int_1^{3x^2} f(t) dt \right)' = -f(3x^2)(3x^2)' =$$

$$= -6x f(3x^2) = -6x \cdot [9x^2 \ln 3x^2 - 9x^2] = -54x^3 (\ln 3x^2 - 1).$$

Είναι: $K'(x) = 0 \Leftrightarrow -54x^3 (\ln 3x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln 3x^2 - 1 = 0$, αφού $x \in (0, +\infty)$,

$$\Leftrightarrow \ln 3x^2 = \ln e \Leftrightarrow x^2 = \frac{e}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{e}{3}}.$$

Επίσης:

$$K'(x) > 0 \Leftrightarrow -54x^3 (\ln 3x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow \ln 3x^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln 3x^2 < \ln e \stackrel{\text{Ingr. αύξ.}}{\Leftrightarrow} 3x^2 < e \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < \sqrt{\frac{e}{3}}, \text{ άρα } K \text{ γνησίως αύξουσα στο } (0, \sqrt{\frac{e}{3}}].$$

Όμοια K γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{\frac{e}{3}}, +\infty)$.

Άσκηση 2 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x + 1 + \int_1^x \frac{1}{t} f(t) dt \quad (1).$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο f .
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να αποδείξετε ότι:

$$2x + \ln x \leq 3x - 1$$

Λύση

i. Εχουμε: $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \quad (1)$

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, οπότε η $\int_1^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και $\frac{1}{x} \cdot \int_1^x f(t) dt$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Επομένως f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

ii. Η (1) γράφεται: $xf(x) = x^2 + x + \int_1^x f(t) dt$ και παραγωγίζοντας έχουμε

$$f(x) + xf'(x) = 2x + 1 + f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = 2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = (2x + \ln x)'$$

Άρα $f(x) = 2x + \ln x + c \quad (2)$

Η (1) για $x = 1$ δίνει: $f(1) = 2$ ενώ η (2) για $x = 1$ δίνει: $f(1) = 2 + c$.

Επομένως: $2 + c = 2 \Leftrightarrow c = 0$. Άρα $f(x) = 2x + \ln x, x > 0$.

iii. Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $f'(x) = (2x + \ln x)' = 2 + \frac{1}{x} > 0$ και $f''(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$, για κάθε $x > 0$. Άρα η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

iv. Είναι:

- $f(1) = 2 + \ln 1 = 2$

- $f'(1) = 2 + 1 = 3$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A είναι: $y - 2 = 3(x - 1)$ ή $y = 3x - 1$ και επειδή η $f(x) = 2x + \ln x$ κοίλη (από iii.) έχουμε: $2x + \ln x \leq 3x - 1$. Η ισότητα ισχύει για $x = 1$.

Άσκηση 3

Εκφώνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2e}{x} + 2\ln x, x > 0$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$ για κάθε $x > 0$.
- iii. Αν ισχύει $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x > 0$ και $\lambda > 0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda = e$.
- iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e^2$.

Λύση

i. Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $f'(x) = \left(\frac{2e}{x} + 2\ln x\right)' = \frac{-2e}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2(x-e)}{x^2}$

Είναι:

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < e$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0, e)$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$.

Η f για $x = e$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Δηλαδή $f(x) \geq f(e)$ με τιμή $f(e) = 2 + 2 = 4$.

ii. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $x > 0$. Ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln e^{x-e} \Leftrightarrow$$

$$x \ln \frac{x}{e} \geq x - e \Leftrightarrow x(\ln x - \ln e) \geq x - e \Leftrightarrow x \ln x - x \geq x - e \Leftrightarrow$$

$$x \ln x - 2x + e \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x - 2 + \frac{e}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \ln x + \frac{2e}{x} \geq 4 \Leftrightarrow f(x) \geq 4 \text{ που ισχύει από i). (Η συνάρτηση } l \text{ είναι γνησίως αύξουσα)}$$

iii. Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln\lambda^{x-e} \Leftrightarrow x(\ln x - \ln e) \geq (x - e)\ln\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda \geq 0 \quad (1)$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda$, $x > 0$ και $\lambda > 0$, τότε:

$$g'(x) = \ln x + 1 - 1 - \ln\lambda = \ln x - \ln\lambda$$

Από (1) έχουμε: $g(x) \geq 0$, για κάθε $x > 0$. Αλλά $g(e) = 0$. Άρα $g(x) \geq g(e)$ για κάθε $x > 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη και στο $x = e$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ακρότατο οπότε από το θεώρημα Fermat έχουμε:

$$g'(e) = 0 \Leftrightarrow \ln e - \ln\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = e.$$

iv. Είναι: $f(x) = \frac{2e}{x} + 2\ln x$, $x > 0$

Παρατηρούμε ότι:

$$1 \leq x \leq e^2 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \text{ και } \frac{2e}{x} > 0, \text{ οπότε: } f(x) > 0 \text{ στο } [0, e^2], \text{ άρα}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_1^{e^2} \left(\frac{2e}{x} + 2\ln x \right) dx = 2e \left[\ln x \right]_1^{e^2} + 2 \int_1^{e^2} \ln x dx = \\ &= 2e \cdot \ln e^2 + 2 \int_1^{e^2} (x)' \ln x dx = 4e + 2 \left[x \ln x \right]_1^{e^2} - 2 \int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= 4e + 2e^2 \ln e^2 - (e^2 - 1) = 4e + 4e^2 - e^2 + 1 = 3e^2 + 4e + 1. \end{aligned}$$

Άσκηση 4 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + 2xi$, $x \in \mathbf{R}$, και η συνάρτηση με τύπο $f(x) = |z| - \operatorname{Im}(z)$ ορισμένη στο \mathbf{R} .

- i. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.
- ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- iii. Να αποδείξετε ότι $f'(x)|z| + 2f(x) = 0$.

Λύση

i. Έστω $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, τότε $\alpha = 1$ και $\beta = 2x$, $x \in \mathbf{R}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία $x = 1$.

ii. Είναι: $|z| = \sqrt{1+4x^2}$ και $\operatorname{Im}(z) = 2x$. Άρα $f(x) = \sqrt{1+4x^2} - 2x$. Η f είναι συνεχής στο \mathbf{R} άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\text{Επίσης: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+4x^2} - 2x) \stackrel{+\infty-(+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+4x^2 - 4x}{\sqrt{1+4x^2} + 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2} + 2x} = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+4x^2} + 2x) = +\infty.$$

Άρα $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2} - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 4} + 2 \right)}{x} = -4 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-4x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1+4x^2} - 2x + 4x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+4x^2} + 2x) \stackrel{(+\infty)+(-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+4x^2 - 4x^2}{\sqrt{1+4x^2} - 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 4} + 2 \right)} = 0.$$

Άρα $y = -4x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

iii. Είναι: $f'(x) = \left(\sqrt{1+4x^2} - 2x\right)' = \frac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}} - 2 = \frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}} - 2$ οπότε:

$$f'(x)|_z + 2f(x) = \left(\frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}} - 2\right)\sqrt{1+4x^2} + 2\sqrt{1+4x^2} - 4x = 0.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) = \ln x - 1$.

- i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f του áξονα x' και τις ευθείες $x = e$ και $x = \lambda > 0$.
- ii. Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.
- iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2, f(e^2))$.
- iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον áξονα xx' .

Λύση

i. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\lambda > e$ τότε: $E(\lambda) = \int_e^\lambda f(x)dx = \int_e^\lambda (\ln x - 1)dx = \int_e^\lambda (x)' \ln x dx - (\lambda - e) =$
 $= [x \ln x]_e^\lambda - \int_e^\lambda x \cdot \frac{1}{x} dx - \lambda + e = \lambda \ln \lambda - e - (\lambda - e) - \lambda + e =$
 $= \lambda \ln \lambda - e - \lambda + e - \lambda + e = \lambda \ln \lambda - 2\lambda + e$ (Αφού $e < x < \lambda$ το $\ln x > 1$)

• Αν $0 < \lambda < e$, τότε

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \int_\lambda^e (-f(x))dx = \int_\lambda^e (1 - \ln x)dx = (e - \lambda) - \int_\lambda^e (x)' \ln x dx = \\ &= e - \lambda - [x \ln x]_\lambda^e + \int_\lambda^e x (\ln x)' dx = \\ &= e - \lambda - e + \lambda \ln \lambda + (e - \lambda) = \lambda \ln \lambda - 2\lambda + e . \end{aligned}$$

ii. Έχουμε: $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (\lambda \ln \lambda - 2\lambda + e) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \ln \lambda - 0 + e = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln \lambda}{\frac{1}{\lambda}} + e =$
 $= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{(\ln \lambda)'}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)'} + e = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}} \right) + e = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (-\lambda) + e = e .$

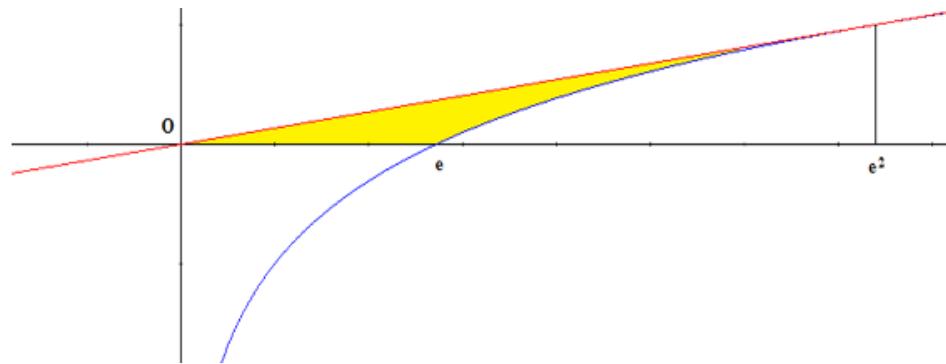
iii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(e^2, f(e^2))$ είναι:

$$y - f(e^2) = f'(e^2)(x - e^2)$$

Αλλά $f(e^2) = \ln e^2 - 1 = 1$ και $f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$. Αφού $f'(x) = \frac{1}{x}$

Άρα η εξίσωση είναι: $y - 1 = \frac{1}{e^2}(x - e^2)$ ή $y = \frac{1}{e^2}x + 1 - \frac{1}{e^2}e^2$.

iv. Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, άρα f κοίλη, οπότε η γραφική παράσταση της εφαπτομένης στο M βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f .



Επομένως:

$$E = \int_0^{e^2} \frac{1}{e^2} x dx - \int_e^{e^2} (\ln x - 1) dx =$$

$$= \frac{1}{e^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{e^2} - \int_e^{e^2} \ln x dx + (e^2 - e) = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{e^4}{2} - \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - [x \ln x]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} x \frac{1}{x} dx + e^2 - e = \frac{e^2}{2} - e^2 \ln e^2 + e \ln e + e^2 - e + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 2e^2 + e^2 + e^2 - e + e^2 - e = \left(\frac{e^2}{2} - e\right) \tau. \mu.$$

Άσκηση 6 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = -3 \int_2^x \left(\int_2^u 3^{f(t)} dt \right) du + 3x - 3$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{1}{2} (f'(x))^2 + \frac{3}{\ln 3} 3^{f(x)}$ είναι σταθερή.
- iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(2, f(2))$.

Λύση

i. Έστω: $\varphi(t) = 3^{f(t)}$ και $h(u) = \int_2^u 3^{f(t)} dt$

Η φ είναι συνεχής, άρα η h είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής οπότε $g(x) = \int_0^x h(u) du$ παραγωγίσιμη. Επομένως f παραγωγίσιμη.

ii. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε: $f'(x) = -3 \int_2^x 3^{f(t)} dt + 3$. αφού $f(x) = -3 \int_2^x h(u) du + 3x - 3$ άρα για κάθε $x > 0$ $f'(x) = -3h(x) + 3 = -3 \int_2^x 3^{f(t)} dt + 3$ οπότε $f''(x) = -3 \cdot 3^{f(x)} < 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα f κοίλη.

iii. Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot f'(x) \cdot f''(x) + \frac{3}{\ln 3} \cdot 3^{f(x)} \cdot \ln 3 \cdot f'(x) = f'(x) [f''(x) + 3 \cdot 3^{f(x)}] = 0$ αφού $f''(x) = -3 \cdot 3^{f(x)} < 0$.

iv. Είναι: $f'(2) = 3$ και $f(2) = 3$.

Άρα η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση $y - 3 = 3(x - 2)$ ή $y = 3x - 3$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x - 2$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^e f^{-1}(x)dx$

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

ii. Από i) έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)).$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^3 + x - 2) = 0 - \infty - \infty - 2 = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^3 + x - 2) = +\infty.$$

Άρα $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι: $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.

iv. Είναι: $I = \int_{-1}^e f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $x = f(y)$, οπότε είναι: $dx = f'(y)dy$. Επίσης: $f(0) = -1$ και $f(1) = e$. Άρα τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι 0 και 1.

Επομένως:

$$I = \int_{-1}^e f^{-1}(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(f(y))f'(y)dy = \int_0^1 yf'(y)dy = [yf(y)]_0^1 - \int_0^1 (y)'f(y)dy =$$

$$= 1 \cdot f(1) - 0 - \int_0^1 f(y)dy = f(1) - \int_0^1 (e^y + y^3 + y - 2)dy = e - [e^y + \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} - 2y]_0^1 =$$

$$e - [e + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 - (e^0 + 0 + 0 - 0)] = e - e - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{9}{4}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) = 3e^{2x} - 3$ και $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) \geq 3 \int_0^2 x g(2x+t) dt \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i. $\int_0^2 g(t) dt = 2$.
- ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε $\int_0^{x_0} g(t) dt = 1$.
- iii. Η συνάρτηση $F(x) = x \int_0^x g(t) dt - x$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = \int_0^x g(t) dt + xg(x) - 1$.
- iv. Η εξίσωση $xg(x) - 1 + \int_0^x g(t) dt = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, x_0)$.

Λύση

i. Έστω $h(x) = \int_0^2 x g(2x+t) dt$. Θέτουμε $u = 2x+t$ έτσι $du = dt$. Άντας $t=0$, τότε: $u=2x$.

Άντας $t=2$, τότε:

$$u = 2x + 2. \text{ Άρα } h(x) = x \cdot \int_{2x}^{2x+2} g(u) du$$

$$\text{Οπότε έχουμε: } f(x) \geq 3x \int_{2x}^{2x+2} g(u) du \Leftrightarrow 3e^{2x} - 3 - 3x \int_{2x}^{2x+2} g(u) du \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = 3e^{2x} - 3 - 3x \int_{2x}^{2x+2} g(u) du, \text{ τότε:}$$

$$K(x) \geq K(0) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Η K ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Fermat δηλαδή είναι παραγωγίσιμη και έχει ακρότατο στο $x_0 = 0$ άρα $K'(0) = 0$ (1). Όμως

$$K'(x) = 6e^{2x} - 3 \int_{2x}^{2x+2} g(u) du - 3x \left(\int_{2x}^{\alpha} g(u) du + \int_{\alpha}^{2x+2} g(u) du \right)' =$$

$$6e^{2x} - 3 \int_{2x}^{2x+2} g(u)du - 3x(-2g(2x) + 2g(2x+2)) \quad (2)$$

Οπότε από (1),(2) έχουμε: $6 - 3 \int_0^2 g(u)du = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 g(u)du = 2$

Δηλαδή το ζητούμενο.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x) = \int_0^x g(t)dt - 1$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής άρα η $\int_0^x g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής.

Επομένως η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,2]$.

$$\text{Επίσης: } \varphi(0) \cdot \varphi(2) = (-1) \cdot \left[\int_0^2 g(t)dt - 1 \right] = (-1)(2 - 1) = -1 < 0.$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,2)$, τέτοιο ώστε:

$$\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} g(t)dt - 1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} g(t)dt = 1.$$

iii. Είναι:

- g συνεχής άρα $\int_0^x g(t)dt$ παραγωγίσιμη ως αρχική της g .

$$\text{Άρα } F \text{ παραγωγίσιμη με } F'(x) = \left(x \int_0^x g(t)dt - x \right)' = \int_0^x g(t)dt + xg(x) - 1.$$

iv. Είναι:

- συνεχής ως παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , άρα και στο $[0, x_0]$.
- F παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$ (από iii) με $F'(x) = \int_0^x g(t)dt + xg(x) - 1$.
- $F(0) = F(x_0)$, αφού:

$$F(0) = 0$$

$$F(x_0) = x_0 \int_0^{x_0} g(t)dt - x_0 = 0$$

Άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x_0) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_0^\xi g(t)dt + \xi g(\xi) - 1 = 0.$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{e}{x} + \ln x + 1$, $x > 0$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 3^{\xi-1}$.
- iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$.

Λύση

i. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με $f'(x) = \left(\frac{e}{x} + \ln x + 1 \right)' = \frac{-e}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-e}{x^2}$
και επειδή $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < e$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, e]$ και για $x = e$
παρουσιάζει ακρότατο το $f(e) = \frac{e}{e} + \ln e + 1 = 3$.

ii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e}{x} + \ln x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e + x \ln x + x}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Άρα $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\text{Επίσης ισχύει: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{x^2} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) = 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + 0 = 0$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{x} + \ln x + 1 \right) = +\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

iii. Έστω $g(x) = f(x) - 3^{x-1}$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[1, 4]$ και για την οποία ισχύει: $g(1) \cdot g(4) < 0$ αφού

- $g(1) = f(1) - 3^0 = e + \ln 1 + 1 - 1 = e > 0$

- $g(4) = f(4) - 3^3 = \frac{e}{4} + \ln 4 + 1 - 3^3 < 0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 3^{\xi-1}$.

iv. Είναι:

$$1 \leq x \leq e^2 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \text{ και } \frac{e}{x} > 0. \text{ Άρα } f(x) = \frac{e}{x} + \ln x + 1 > 0$$

για κάθε $x \in [1, e^2]$. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^{e^2} \left(\frac{e}{x} + \ln x + 1 \right) dx = \int_1^{e^2} \frac{e}{x} dx + \int_1^{e^2} \ln x dx + 1 \cdot (e^2 - 1) = \\ &= e \left[\ln x \right]_1^{e^2} + \int_1^{e^2} (x)' \cdot \ln x dx + e^2 - 1 = \\ &= e \cdot (lne^2 - ln1) + \left[x \ln x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx + e^2 - 1 = \\ &= 2e + e^2 lne^2 - 1 \cdot (e^2 - 1) + e^2 - 1 = 2e + 2e^2 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \lambda x + 3, x > 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon : y = 3x$ να υπολογίσετε το λ .
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις: $x = 1$ και $x = e$.

Λύση

- i. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2\ln x}{x} + \lambda x + 3 \right)' = 2 \left(\frac{\ln x}{x} \right)' + \lambda = 2 \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} + \lambda = \\ &= 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} + \lambda \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} + \lambda. \end{aligned}$$

Ο συντελεστής της εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι:

$$f'(1) = \frac{2 - 0}{1} + \lambda = 2 + \lambda \text{ και επειδή είναι παράλληλη προς την ευθεία } \varepsilon \text{ ισχύει:}$$

$$2 + \lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = 1. \text{ Άρα } f(x) = \frac{2\ln x}{x} + x + 3, x > 0 \text{ και } f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} + 1.$$

$$\text{ii. Για κάθε } x > 0 \text{ είναι: } f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} + 1 = \frac{2 - 2\ln x + x^2}{x^2}.$$

$$\text{Έστω } g(x) = x^2 - 2\ln x + 2, x > 0.$$

$$\text{Είναι: } g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

$$g'(x) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2}{x} > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x > 1.$$

Άρα η γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Όμοια η γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Δηλαδή η παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Επομένως: $g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow g(x) \geq 3 > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Είναι:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x} + x + 3}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\ln x}{x^2} + 1 + \frac{3}{x} \right) = 2 \cdot 0 + 1 + 0 = 1,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\ln x}{x} + x + 3 - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\ln x}{x} + 3 \right) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} + 3 =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3. \text{ Άρα η ασύμπτωτη της } f \text{ στο } +\infty \text{ είναι η ευθεία } y = x + 3.$$

$$\text{iv. } E = \int_1^e |f(x) - x - 3| dx = \int_1^e \left| 2 \frac{\ln x}{x} + x + 3 - x - 3 \right| dx =$$

$$\int_1^e 2 \left| \frac{\ln x}{x} \right| dx = 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx =$$

$$= \left[\ell n^2 x \right]_1^e = \ell n^2 e - \ell n^2 1 = 1.$$

$$^*(1 < x < e \Leftrightarrow \ln x > 0 \text{ άρα } \frac{\ln x}{x} \text{ θετικός})$$

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = -2 + \frac{2}{x}$ και $g(x) = 3\ln x$, όπου $x \in (0, +\infty)$.

- Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h με $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις: $x = 1$ και $x = \lambda$, όπου $\lambda > 0$.
- Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.
- Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

Λύση

i. Είναι:

$$h(x) = f(x) - g(x) = -2 + \frac{2}{x} - 3\ln x = \frac{2}{x} - 3\ln x - 2 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα $h'(x) = \frac{-2}{x^2} - \frac{3}{x} < 0$, οπότε h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Ακόμα $h(1) = 0$.

Επομένως:

Για κάθε $x > 1$ είναι $h(x) < h(1) \Leftrightarrow h(x) < 0$ και για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h(x) > h(1) \Leftrightarrow h(x) > 0$.

ii. Για να προσδιορίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν πρέπει να γνωρίζουμε αν $\lambda > 1$ ή $\lambda < 1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda > 1$ τότε:

$$E(\lambda) = \int_1^\lambda |f(x) - g(x)| dx = \int_1^\lambda |h(x)| dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = - \int_1^\lambda h(x) dx = - \int_1^\lambda \left(\frac{2}{x} - 3\ln x - 2 \right) dx =$$

$$= -2 \left[\ln x \right]_1^\lambda + 3 \int_1^\lambda (x)' \ln x dx + 2(\lambda - 1) =$$

$$= -2(\ln \lambda - \ln 1) + 3[x \ln x]_1^\lambda - 3 \int_1^\lambda x \frac{1}{x} dx + 2\lambda - 2 =$$

$$= -2\ln \lambda + 3\lambda \ln \lambda - 3(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = -2\ln \lambda + 3\lambda \ln \lambda - 3\lambda + 3 + 2\lambda - 2 =$$

$$= (3\lambda - 2)\ln\lambda - \lambda + 1 .$$

- Άντας $0 < \lambda < 1$ τότε:

$$E(\lambda) = \int_{\lambda}^1 |h(x)| dx = \int_{\lambda}^1 h(x) dx = - \int_1^{\lambda} h(x) dx ,$$

$$E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda .$$

- Άντας $\lambda = 1$ τότε προφανώς $E(1) = 0$. Επομένως $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda .$

iii. Είναι:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [(3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda] = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (3\lambda\ln\lambda - 2\ln\lambda - \lambda + 1) =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [\lambda(3\ln\lambda - 2 \frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1 + \frac{1}{\lambda})] = (+\infty)(+\infty - 2 \cdot 0 - 1 + 0) = +\infty .$$

$$\text{Άφού } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln\lambda = +\infty \text{ και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln\lambda}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0 .$$

$$iv. \text{ Είναι: } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [(3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda] = [(0 - 2) \cdot (-\infty) + 1 - 0] = +\infty .$$

Άσκηση 5 (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Άντας $F(x) = \int_2^x f(t)dt + \int_2^{2010-x} f(t)dt$, τότε:

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με $g(x) = \int_2^x f(t)dt$.
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(x) = \int_2^x f(t)dt + \int_2^{2010-x} f(t)dt$.
- iii. Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία.
- iv. Να αποδείξετε ότι $F(x) \geq 2 \int_2^{1005} f(t)dt$ για κάθε $x \in (0, 2010)$.

Λύση

i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και ο αριθμός 2 ανήκει στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $D_g = (0, +\infty)$.

ii. Είναι: $F(x) = g(x) + g(2010 - x)$

Η συνάρτηση $h(x) = g(2010 - x)$ ορίζεται σε εκείνα τα x για τα οποία ισχύει

$2010 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2010$. Άρα $D_h = (-\infty, 2010)$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της F αποτελείται από εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $x \in D_g$ και $x \in D_h$ δηλαδή $x > 0$ και $x < 2010$.

Άρα $D_F = (0, 2010)$.

iii. Για κάθε $x \in (0, 2010)$ έχουμε:

$$F'(x) = \left(\int_2^x f(t)dt + \int_2^{2010-x} f(t)dt \right)' =$$

$$= \left(\int_2^x f(t)dt \right)' + \left(\int_2^{2010-x} f(t)dt \right)' =$$

$$= f(x) + f(2010 - x)(2010 - x)' = f(x) - f(2010 - x).$$

Οπότε: $F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(2010 - x) \Leftrightarrow x = 2010 - x \Leftrightarrow x = 1005$ αφού f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

Επίσης:

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(2010 - x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) < f(2010 - x) \Leftrightarrow x < 2010 - x \Leftrightarrow 0 < x < 1005, \text{ αφού } f \text{ γνησίως αύξουσα.}$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - f(2010 - x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) > f(2010 - x) \Leftrightarrow x > 2010 - x \Leftrightarrow x \in (1005, 2010).$$

Άρα F γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1005]$ και F γνησίως αύξουσα στο $[1005, 2010]$

iv. Η F στο $x = 1005$, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο άρα για κάθε $x \in (0, 2010)$ ισχύει:

$$F(x) \geq F(1005) \Leftrightarrow F(x) \geq \int_2^{1005} f(t)dt + \int_{1005}^x f(t)dt \Leftrightarrow F(x) \geq 2 \int_2^{1005} f(t)dt.$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3\ln(x \cdot e^{1-x}) + 2$, $x > 0$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3f(x) + 2011 = 0$.
- iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Λύση

i. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 \cdot \ln x \cdot e^{1-x} + 2)' = 3 \frac{1}{x \cdot e^{1-x}} (x \cdot e^{1-x})' = \\ &= \frac{3}{x \cdot e^{1-x}} \cdot (e^{1-x} + x(e^{1-x})') = \frac{3}{x \cdot e^{1-x}} (e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} (1-x)') = \\ &= \frac{3}{x \cdot e^{1-x}} \cdot e^{1-x} \cdot (1-x) = \frac{3(1-x)}{x} \end{aligned}$$

Έχουμε:

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{3(1-x)}{x} > 0 \Leftrightarrow x < 1$ αφού $x > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{3(1-x)}{x} < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \geq 1$.

Άρα η f για $x = 1$ παρουσιάζει ακρότατο με τιμή $f(1) = 3\ln 1 + 2 = 2$ που είναι η μέγιστη

ii. Το σύνολο τιμών θα είναι: $f((0, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1)] \cup (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)]$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [3\ln(x \cdot e^{1-x}) + 2] = 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x \cdot e^{1-x}) + 2 = -\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot e^{1-x}) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [3\ln(x \cdot e^{1-x}) + 2] = -\infty$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^{x-1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0.$$

- $f(1) = 2$

Άρα $f((0, +\infty)) = (-\infty, 2]$.

iii. Είναι: $3f(x) + 2011 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-2011}{3}$

Έστω $g(x) = f(x) + \frac{2011}{3}$ τότε $g'(x) = f'(x)$, οπότε η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f . $g((0, 1]) = (-\infty, 2 + \frac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ έχει μοναδική ρίζα σε αυτό.

Άρα και η $f(x) + \frac{2011}{3} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1]$.

$g([1, +\infty)) = (-\infty, 2 + \frac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα.

Άρα και η $f(x) + \frac{2011}{3} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1, +\infty)$.

Άρα η εξίσωση $3f(x) + 2011 = 0$ έχει δύο λύσεις, μία στο $(0, 1]$ και μία στο $[1, +\infty)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το iii) μπορεί να λυθεί και με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

iv. Είναι:

- $f(1) = 2$

- $f(2) = 3\ln\left(\frac{2}{e}\right) + 2 = 3\ln 2 - 3\ln e + 2 = 3\ln 2 - 1 > 0$ και επειδή f γνησίως φθίνουσα

$$f([1, 2]) = [3\ln 2 + 1, 2] \text{ δηλαδή } f(x) > 0 \text{ στο } [1, 2].$$

$$\text{Επίσης } f(x) = 3\ln x + 3\ln e^{1-x} + 2 = 3\ln x + 3(1-x) + 2 = 3\ln x + 5 - 3x.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_1^2 f(x) dx = 3 \int_1^2 \ln x dx + \int_1^2 (5 - 3x) dx = 3 \int_1^2 (x)' \ln x dx + \left[5x - \frac{3}{2}x^2 \right]_1^2 = \\ &= 3[\ln x]_1^2 - 3 \int_1^2 x \cdot (\ln x)' dx + 10 - \frac{3}{2} \cdot 4 - 5 + \frac{3}{2} = \\ &= 3 \cdot (2\ln 2 - 0) - 3 \int_1^2 1 dx + 10 - 6 - 5 + \frac{3}{2} = 6\ln 2 - 3(2-1) + \frac{3}{2} - 1 = \\ &= 6\ln 2 - \frac{5}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 2$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\lambda^4 = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - 1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda > 0$.
- iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:
 $I = \int_0^4 f^{-1}(t) dt$.

Λύση

i. Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $f'(x) = 8x^3 + \frac{3}{x} > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε δεν έχει ακρότατα.

ii. Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^4 + 3\ln x + 2) = 0 - \infty + 2 = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^4 + 3\ln x + 2) = +\infty + \infty + 2 = +\infty$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, από i), άρα το σύνολο τιμών της είναι:
 $f((0, +\infty)) = (-\infty, +\infty)$.

iii. Για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε:

$$\lambda^4 = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - 1 \Leftrightarrow 2\lambda^4 = 3(\ln 1 - \ln \lambda) - 2 \Leftrightarrow 2\lambda^4 = -3\ln \lambda - 2 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4 + 3\ln \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow f(\lambda) = 0.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda > 0$, τέτοιο ώστε $f(\lambda) = 0$.

Αυτό ισχύει αφού το σύνολο τιμών της f είναι το \mathbb{R}

(ΑΠΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ) και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

iv. Η συνάρτηση f επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται.
Θέτουμε $t = f(x) \Leftrightarrow dt = f'(x)dx$. Για $t = 0$ είναι $0 = f(x) \Leftrightarrow x = \lambda$.

Για $t = 4$ είναι $4 = f(x) \Leftrightarrow f(1) = f(x) \Leftrightarrow x = 1$.

Επομένως:

$$\int_0^4 f^{-1}(t)dt = \int_{\lambda}^1 f^{-1}(f(x))f'(x)dx = \int_{\lambda}^1 xf'(x)dx = \int_{\lambda}^1 x \cdot \left(8x^3 + \frac{3}{x}\right)dx =$$

$$\int_{\lambda}^1 (8x^4 + 3)dx = \left[8 \frac{x^5}{5} + 3x\right]_{\lambda}^1 = \frac{8}{5} + 3 - \left(\frac{8}{5}\lambda^5 + 3\lambda\right) = -\frac{8}{5}\lambda^5 - 3\lambda + \frac{23}{5}.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 01/09/2015