

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 5

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 6 ΜΑΪΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) της γραφικής παράστασης C_f μίας συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

(Μονάδες 4)

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

(Μονάδες 4)

A3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ότι ισχύει:

$$f'(x) = vx^{v-1}, \text{ δηλαδή } (x^v)' = vx^{v-1}.$$

(Μονάδες 7)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

β. Αν $f(x) = \int_2^4 \sqrt{2+t^2} dt$, τότε $f'(3) = 0$.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον $x'x$) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε υποχρεωτικά $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

(Μονάδες $5\times 2=10$)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(fof)(x)+2f(x)=2x+1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(2)=5.$$

B1. Να βρείτε το $f(5)$.

(Μονάδες 5)

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)

B3. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

(Μονάδες 6)

B4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2.$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με g παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x+a) - x + 1 \text{ με } a, x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g'(x) \ln x = \frac{2g(x)}{x}, \text{ για κάθε } x > 1$$

Γ1. Αν $f(x) - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $a=1$.

(Μονάδες 3)

Γ2. Αν $g(e) = -1$, να δείξετε ότι $g(x) = -\ln^2 x$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

Γ3. Αν $g(x) = -(\ln x)^2$ σε όλο το διάστημα $(0, +\infty)$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή $x_0 \in (0, 1)$ για την οποία η διαφορά $f(x) - g(x)$ γίνεται ελάχιστη.

(Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων M, N με $M(\xi, f(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f και $N(\xi, g(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_g της g με $\xi \in (0, +\infty)$, στα οποία οι C_f και C_g δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία M και N αντίστοιχα.

(Μονάδες 4)

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right]$

(Μονάδες 4)

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ4. i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των f και g αντίστοιχα και των ευθειών $x=1$, $x=e$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} , με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) + f(1-x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$

(Μονάδες 4)

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2f(1)$

(Μονάδες 3)

Δ3. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

(Μονάδες 4)

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = 0$

(Μονάδες 3)

Δίνεται επιπλέον ότι $\int_0^1 f'(x) dx = 1$ καθώς και ότι η συνάρτηση

f^{-1} είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 4)

Δ5. i) Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx, \text{ όπου } \lambda > \frac{1}{2}$$

(Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}}$$

(Μονάδες 3)

ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια: Συντακτική ομάδα www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών