ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 4

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ 1^o

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

(Μονάδες 4)

Α2. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f;

(Μονάδες 4)

Α3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

(Μονάδες 7)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν f συνεχής με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε ισχύει πάντοτε $\int_a^\beta f(x)dx\neq 0$.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου:

$$A=\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ και } B=\lim_{x\to \beta^-} f(x).$$

γ. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ «κοντά» στο x_0.

δ. Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

ε. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η γραφική παράσταση C_f της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & \text{αν } x<0 \\ \lambda, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

Β1. Να δείξετε ότι $\kappa = 2$ και $\lambda = 4$.

(Μονάδες 8)

Β2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 5)

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

(Μονάδες 5)

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μία ,

τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω μία συνάρτηση $f:(0,\ +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = 1$$

$$2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) = 2\ln x + 3, \text{ για κάθε } x > 0$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - x(2\ln x + 1),\ x > 0$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0,\ +\infty)$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x,\ x > 0$

(Μονάδες 5)

Γ3. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 4)

ii. Αν ένα σημείο $M\left(x(t),\ y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t)>1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης C_{fof} της fof με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με $1\ cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία $x(t_0)=2\ cm$.

(Μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|<\sqrt{f(a)\cdot f(\beta)}$$

για κάθε $a,\ \beta\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ με $a<\beta$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι :

$$e^{5x}+e^{3x+2}+e^{x+4}\geq e^5\cdot x\left(x^4+x^2+1\right)\text{ , για κάθε }\ x\in\mathbb{R}$$

(Μονάδες 4)

Δ2. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1)$.

(Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^6+3x^4+6x^2-12x \geq 2x_0{}^6+3x_0{}^4+6x_0{}^2-12x_0$$

(Μονάδες 4)

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$3<\frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2-\xi_1}<42 \text{ , με } 0<\xi_1<\xi_2<1$$

(Μονάδες 4)

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι:

$$3\int_0^1 e^{x^2}dx \geq 4$$

(Μονάδες 3)

ii) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του x_0, το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \left| f^{-1}(x) \right| dx$$

(Μονάδες 3)

<u>Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια: Συντακτική ομάδα www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών