ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 11 – 06 – 2018

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Θέμα Α

Α1 Σελίδα 99, σχολικού βιβλίου

Α2 α) Λάθος

β) Σελίδα 35, Σχήμα 34, σχολικού βιβλίου.

Α3 Σελίδα 216, σχολικού βιβλίου.

Α4 α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1. $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2},\quad D_f=\mathbb{R}^*$

Η f παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγισίμων με

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=x'-\frac{4'\cdot x^2-4\cdot\left(x^2\right)'}{x^4}=$$

$$=1+\frac{8x}{x^4}=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

Επιλύουμε $f'(x)>0\Rightarrow\left(x^3+8\right)\cdot x^3>0$ με $x\neq 0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3+8		$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
f'		$+$		$-$	‖	$+$	
f		↗		↘	‖	↗	

Η $f'(x)>0$ για $x<-2$ και f συνεχής άρα f: γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$.
$f'(x)<0$ για $x\in(-2,0)$ και f συνεχής άρα f: γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$.
$f'(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$ και f συνεχής άρα f: γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=-2$ με $f(-2)=-3$.

Β2. Η $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}$ είναι παραγωγίσιμη στο $D_{f'}=\mathbb{R}^*$ ως άθροισμα σταθερής και

ρητής παραγωγισίμων με $f''(x)=\left(1+\dfrac{8}{x^3}\right)'=1'+\dfrac{8'\cdot x^3-8\cdot\left(x^3\right)'}{x^6}=$

$$=\frac{-24x^2}{x^6}=-\frac{24}{x^4}<0 \text{ για κάθε } x\in D_{f''} \text{ άρα}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	‖	$-$
f	$\frown$	‖	$\frown$

Η $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και f συνεχής άρα η f: κοίλη στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

B3. Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0=0$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ διότι

$\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$ και $x^2>0$.

Άρα η C_f δέχεται κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0=0$ την $x=0$ (ο άξονας $y'y$).

Ομοίως το $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$.

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$.

Σύμφωνα με τον ορισμό πλάγιας ασύμπτωτης παρατηρούμε:

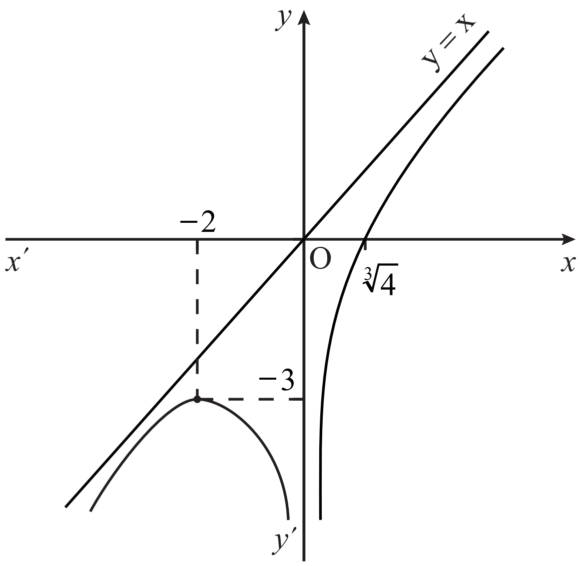
• $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$

Άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4. Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$+$		$-$	‖	$+$	
f''		$-$	0	$-$	‖	$-$	
f	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$
			θέση τοπικού μέγιστου				

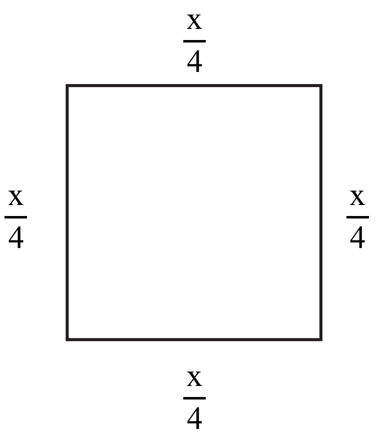
τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\left(0, \sqrt[3]{4}\right)$.



Θέμα Γ

Γ1. Έστω x, $8-x$ τα μήκη των 2 τμημάτων με $x \in (0, 8)$ τότε προκύπτει

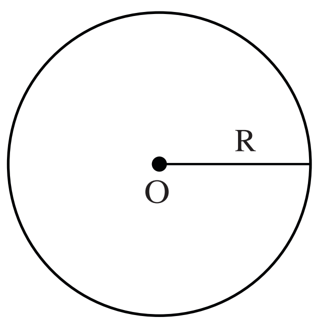
• το τετράγωνο με περίμετρο x



• ο κύκλος με $L = 8 - x \Leftrightarrow$

$2\pi R = 8 - x, \quad x \in (0, 8)$

$R = \dfrac{8-x}{2\pi}$



$$E_{\tau\varepsilon\tau\rho.} + E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2}{16} + \frac{\pi\,(8-x)^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} =$$

$$= \frac{\pi \cdot x^2 + 4(8-x)^2}{16\pi} =$$

$$= \frac{4 \cdot (64 - 16x + x^2) + \pi x^2}{16\pi} =$$

$$= \frac{(4+\pi)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8)$$

Γ2. Η E(x): παραγωγίσιμη στο $D_E = (0, 8)$ ως πολυωνυμική με:

$$E'(x) = \frac{1}{16\pi} \cdot \left[(\pi+4)x^2 - 64x + 256\right]' =$$

$$= \frac{1}{16 \cdot \pi}\left[2 \cdot (\pi+4)x - 64\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \cdot \left[(\pi+4)x - 32\right]$$

Επιλύουμε: $E'(x) > 0$

$$(\pi+4)x - 32 > 0$$

$$x > \frac{32}{\pi+4}$$

Προκύπτει ο πίνακας μονοτονίας:

	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
E'		$-$		$+$	
E		$\searrow$		$\nearrow$	

Η συνάρτηση Ε εμφανίζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = \frac{32}{\pi+4}$.

Συνεπώς η πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\frac{x_0}{4}=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{8}{\pi+4}$

και η διάμετρος του κύκλου $2R=2\cdot\frac{8-x_0}{2\pi}=\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8\pi}{\pi\,(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}$

Άρα για την θέση του ελάχιστου της Ε η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. **Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση.**

Εύρεση του συνόλου τιμών της $E(x)$, $x\in(0,\,8)$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x)=\frac{16}{\pi}$

• $\lim\limits_{x\to 8^-} E(x)=\frac{(\pi+4)\cdot 64-64\cdot 8+256}{16\pi}=\frac{\pi\cdot 64}{16\pi}=4$

• $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{(\pi+4)\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2-64\cdot\frac{32}{\pi+4}+256}{16\pi}=$

$=\frac{\frac{32^2}{\pi+4}-\frac{64\cdot 32}{\pi+4}+256}{16\pi}=$

$=\frac{\frac{(32)^2-64\cdot 32+256\,(\pi+4)}{\pi+4}}{16\pi}=$

$=\frac{-32\cdot 32+256\,(\pi+4)}{16\pi\,(\pi+4)}=\frac{256\,(-4+\pi+4)}{16\pi\,(\pi+4)}=\frac{16}{\pi+4}$

Άρα $E\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right] \underset{f\text{ συνεχής}}{\overset{E\downarrow}{=}} \left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)=E\,(A_1)$

Σύνολο τιμών $E\left[\frac{32}{\pi+4},8\right) \underset{f\text{ συνεχής}}{\overset{E\uparrow}{=}} \left[\frac{16}{\pi+4},4\right)=E\,(A_2)$

Παρατηρούμε $5 \in E\left(A_1\right)$ και $5 \notin E\left(A_2\right)$ άρα υπάρχει $x_0 \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right)$ έτσι

ώστε $E\left(x_0\right)=5$ και είναι μοναδικό διότι η $E(x)$ $\downarrow$

στο $\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ (δηλαδή $1-1$)

Θέμα Δ

Δ1 $f(x)=2\cdot e^{x-\alpha}-x^2, \quad x\in\mathbb{R}, \quad \alpha>1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγισίμων με:

$$f'(x)=2\cdot e^{x-\alpha}\cdot(x-\alpha)'-2x$$
$$f'(x)=2\cdot e^{x-\alpha}-2x=2\left(e^{x-\alpha}-x\right)$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων με:

$$f''(x)=2\left(e^{x-\alpha}\cdot(x-\alpha)'-x'\right)=$$
$$=2\left(e^{x-\alpha}-1\right)$$

Επιλύουμε $f''(x)>0 \Rightarrow e^{x-\alpha}>1$

$x-\alpha>0$

$x>\alpha$

Άρα

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
f''	$-$		$+$	
f	$\frown$		$\smile$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο $x_0=\alpha$ το σημείο $M\left(\alpha, f(\alpha)\right)$ δηλαδή $M\left(\alpha, 2-\alpha^2\right)$

Δ2

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	
f		$\frown$		$\smile$	

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα έχουμε f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$

με σύνολο τιμών $f'_{(-\infty,\,\alpha]} \overset{f'\downarrow}{=} \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right) = [2-2\alpha, +\infty)$.

• f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$ με σύνολο τιμών

$f'_{[\alpha,\,+\infty)} \overset{f'\uparrow}{=} \left[f(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [2-2\alpha, +\infty)$.

Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\left(\dfrac{e^{x-\alpha}}{x} - 1\right) = +\infty$

αφού $\alpha > 1$ το $2-2\alpha < 0$ άρα $0 \in f'_{(-\infty,\,\alpha]}$ οπότε υπάρχει $x_1 \in (-\infty, \alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$ και είναι μοναδικό αφού $f'\downarrow$ στο $(-\infty, \alpha]$

Επίσης, $0 \in f'_{[\alpha,\,+\infty)}$ άρα υπάρχει $x_2 \in (\alpha, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$ και είναι μοναδικό αφού $f'\uparrow$ στο $[\alpha, +\infty)$.

Προκύπτει ο πίνακας:

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
f'		$+$ $\searrow$	0	$-$ $\searrow$		$-$ $\nearrow$	0	$+$ $\nearrow$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Για $x < x_1$

$\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0$

και η f συνεχής άρα $f\uparrow$ στο $(-\infty, x_1]$.

Για $x_1 < x < \alpha$

$\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) \Rightarrow f'(x) < 0$

και f συνεχής άρα f $\downarrow$ στο $[x_1, \alpha]$.

Για $\alpha < x < x_2$

$\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$

και f συνεχής άρα f $\downarrow$ στο $[\alpha, x_2]$.

Για $x > x_2$

$\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$

και f συνεχής άρα f $\uparrow$ στο $[x_2, +\infty)$.

Δ3 $f(x) = f(1)$

Η f στο $[\alpha, x_2]$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα $1-1$ οπότε

$f(x) = f(1) \Rightarrow x = 1$ Αδύνατο

διότι $1 < \alpha < x$. Προφανώς γνωρίζουμε οτι $f(1) > f(\alpha)$ (Η διαφορά τους έχει ελάχιστο το 0).

Δ4 $f'(x) = 2\cdot\left(e^{x-2} - x\right),\ x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 2\cdot e^{x-2} - x^2,\ x \in \mathbb{R}$

Η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ από το Δ1.

Εύρεση εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 2$

$y - f(2) = f'(2)(x-2)$

$y + 2 = -2(x-2)$

$y = -2x + 2$

Άρα στο $[2, 3]$ η C_f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη, με κοινό σημείο, το σημείο επαφής το $(2, f(2))$ άρα $f(x) \geq -2x + 2 \overset{\cdot\sqrt{x-2}\,\geq 0}{\Rightarrow}$

$f(x)\cdot\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$ (1).

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x_0 = 2$ άρα

$$(1) \Rightarrow \int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx =$$

$$= -2\int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}\,dx = I_1.$$

Υπολογισμος I_1 :

Θέτουμε $x-2=u \rightarrow x=u+2$

$dx = du$

$x=2 \rightarrow u=0$

$x=3 \rightarrow u=1$

Άρα $I_1 = -2\int_0^1 (u+1)\sqrt{u}\cdot du$

$= -2\int_0^1 \kappa^{\frac{3}{2}}\cdot d\kappa - 2\int_0^1 \kappa^{\frac{1}{2}}\cdot d\kappa =$

$$= -2\left[\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]_0^1 - 2\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{4}{5}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 - \frac{4}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = \frac{-32}{15}$$

Επιμέλεια απαντήσεων των θεμάτων: Τομέας Μαθηματικών

Αξιολόγηση θεμάτων

Τα θέματα χαρακτηρίζονται ως ποιοτικά, διατυπωμένα με σαφήνεια, με δύσκολες πράξεις, καλύπτουν σχεδόν όλη την ύλη βασισμένα στο Σχολικό Βιβλίο.