ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 09 – 06 – 2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Θέμα Α

Α1 Παραπομπή στο σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

Α2 α) Λάθος

β) $f(x)=|x|$ η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ αλλά είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Α3 Παραπομπή στο σχολικό βιβλίο σελίδα 73 (Ορισμός).

Α4 α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1. $D_{f\circ g}=\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}-\{1\} \text{ και } \dfrac{x}{1-x}\in(0,+\infty)\right\}=$

$=\left\{x\neq 1 \text{ και } \dfrac{x}{1-x}>0\right\}=$

$=\{x\neq 1 \text{ και } (1-x)\,x>0\}=$

$=(0,1)\neq\varnothing$ ορίζεται η $f\circ g$ με τύπο $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

Β2. $h(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

Για $x_1,\ x_2\in D_h=(0,1)$ με $h(x_1)=h(x_2)$ έχουμε $\ln\left(\dfrac{x_1}{1-x_1}\right)=\ln\left(\dfrac{x_2}{1-x_2}\right)$ επειδή

η $\ln x$ είναι $1-1$ προκύπτει $\dfrac{x_1}{1-x_1}=\dfrac{x_2}{1-x_2}\Leftrightarrow x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα

η h είναι $1-1$ στο D_h. Οπότε ορίζεται η αντίστροφή της.

Έστω $y=h(x)$

$y=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\Leftrightarrow e^y=\dfrac{x}{1-x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^y(1-x)=x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^y-e^yx=x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^y=(e^y+1)\,x$ επειδή $e^y+1>0$ έχουμε

$\dfrac{e^y}{e^y+1}=x$

Πρέπει $x\in(0,1)$ δηλαδή $0<\dfrac{e^y}{e^y+1}<1$ αληθεύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{e^y}{e^y+1}$, $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ συνεπώς $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$

B3. $\varphi(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

$\varphi(x)=\dfrac{e^x+1-1}{e^x+1}=1-\dfrac{1}{e^x+1}$.

Η φ παραγωγίσιμη στο $D_\varphi=\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων με

$$\varphi'(x)=\frac{1}{(e^x+1)^2}\cdot(e^x+1)'=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\ .$$

Η φ' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγισίμων με

$$\varphi''(x)=\frac{(e^x)'(e^x+1)^2-e^x\left[(e^x+1)^2\right]'}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{(e^x)'(e^x+1)^2-2e^x\,(e^x+1)\,(e^x+1)'}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^{2x}\,(e^x+1)}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)-2e^{2x}}{(e^x+1)^3}=$$

$$=\frac{e^x(e^x-2e^x+1)}{(e^x+1)^3}=$$

$$=e^x\,\frac{1-e^x}{(e^x+1)^3}$$

Μονοτονία

Επιλύουμε $\varphi'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και φ συνεχής άρα φ

γνησίως αύξουσα στο $D_\varphi=\mathbb{R}$.

Αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ δεν παρουσιάζει ακρότατο.

Καμπυλότητα

Επιλύουμε $\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3} > 0 \text{ αρκεί} \left(1-e^x\right) > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Πίνακας

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\cup$		$\cap$	

Σημείο καμπής

Άρα έχει μόνο ένα σημείο καμπής το $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

B4. • $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0$ διότι το $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Άρα η ευθεία $y=0$ $(\text{ο άξονας } x'x)$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

<u>Εύρεση σημείου τομής με τους άξονες.</u>

• σημειο τομής με τον άξονα $x'x$

$\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = 0$. Αδύνατη.

Άρα δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

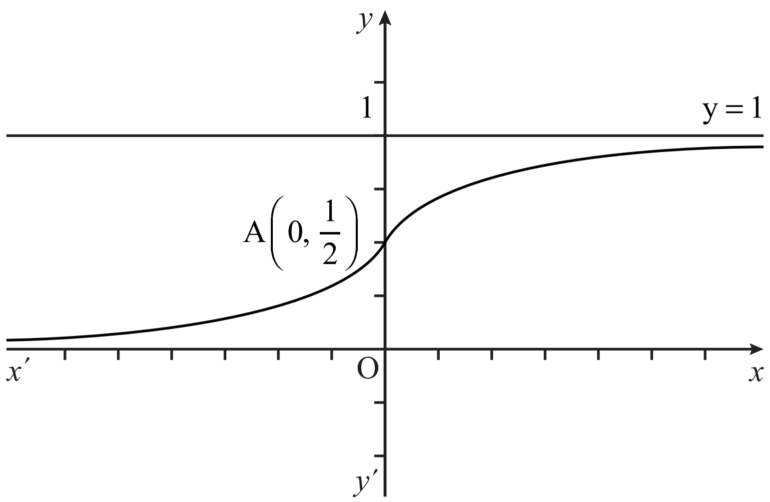
• Σημείο τομής με τον άξονα $y'y$

$\varphi(0)=\dfrac{e^0}{e^0+1}=\dfrac{1}{2}$ άρα τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

• Σύνολο τιμών

$$\varphi(A)=\varphi(\mathbb{R})\underset{\text{και συνεχής}}{\overset{\varphi \text{ γνησίως αύξουσα}}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty}\varphi(x),\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=(0,1).$$

Σύμφωνα με τον πίνακα του ερωτήματος Β3 έχουμε την γραφική παράσταση:



Θέμα Γ

Γ1. $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$ είναι παραγωγίσιμη.

Αν $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής με την εφαπτομένη (ε) έχουμε

$(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης

δηλαδή: $-\dfrac{\pi}{2}-f(x_0)=f'(x_0)\left(\dfrac{\pi}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)$$

Θεωρούμε την εξίσωση $g(x) = \eta\mu x + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x - x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}$

Παρατηρούμε $g(0) = g(\pi) = 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $D_g = [0, \pi]$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x =$$

$$= \eta\mu x\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\eta\mu x$		$+$		$+$	
$x - \frac{\pi}{2}$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$1 - \frac{\pi}{2}$ ελάχιστο	$\nearrow$	0

Άρα, υπάρχουν μόνο δύο λύσεις της $g(x) = 0$.

$$(\varepsilon_1): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow$$

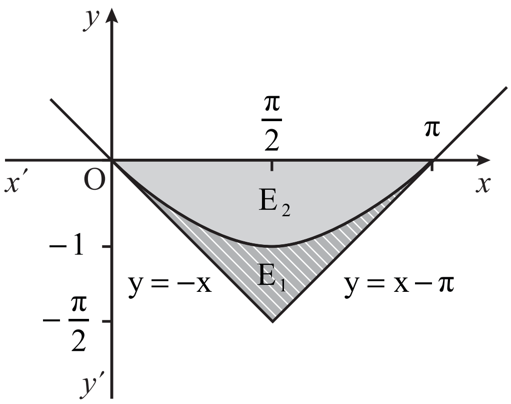
$$y - 0 = -1\cdot(x - 0) \Leftrightarrow$$

$$y = -x$$

$$(\varepsilon_2): y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \Leftrightarrow$$

$$y = x - \pi$$

Γ2.



$$E_2=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx=\int_0^{\pi}|-\eta\mu x|\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi}|\eta\mu x|\,dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=$$

$$=-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0=-(-1)+1=$$

$$=2\ \tau.\mu.$$

$$E_1=E_{\tau\rho\iota\gamma.}-E_2=\frac{1}{2}\pi\cdot\left|\frac{-\pi}{2}\right|-2=\frac{\pi^2}{4}-2\ \tau.\mu.$$

Άρα $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1.$

Γ3. $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=+\infty$ διότι

$\displaystyle\lim_{x\to\pi^-}(f(x)+x)=\lim_{x\to\pi^-}(-\eta\mu x+x)=\pi$

Γνωρίζουμε ότι $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$

$f''(x)=\eta\mu x\geq 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ και f συνεχής άρα η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$

άρα η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής

$x_0=\pi$.

Οπότε από το ερώτημα Γ2 είναι $f(x)\geq x-\pi$ άρα $f(x)-x+\pi\geq 0$ και

$\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to\pi^-}(f(x)-x+\pi)=0$ και $f(x)-x+\pi>0$.

Γ4. Έχουμε $f(x)\geq x-\pi$

Οπότε $\displaystyle\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx=[x-\pi\cdot\ln x]_1^e=e-\pi-(1-0)=e-\pi-1$

Θέμα Δ

Δ1 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$

Η f συνεχής στο $[-1,0)$ ως άρρητη

Η f συνεχής στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών

Επίσης • $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x\eta\mu x)=0$

• $f(0)=e^0\eta\mu 0=0$

Άρα, η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$.

Η f παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ ως άρρητη με $f(x)=\sqrt[3]{x^4}=|x|^{\frac{4}{3}}\overset{x<0}{\Leftrightarrow}f(x)=(-x)^{\frac{4}{3}}$ με

$f'(x)=\dfrac{4}{3}\cdot(-x)^{\frac{1}{3}}(-1)=-\dfrac{4}{3}\cdot(-x)^{\frac{1}{3}}$.

Η f παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως γινόμενο παραγωγισίμων με

$f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=$

$=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

Επιλύουμε $f'(x)>0 \Rightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x>0 \Rightarrow x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Στο $x_0=0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x\eta\mu x}{x}=e^0\cdot 1=1$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}-0}{(-x)}\overset{u=-x}{=}-\lim_{u\to 0^+}\frac{u^{\frac{4}{3}}}{u}=$$

$$=-\lim_{u\to 0^+}u^{\frac{1}{3}}=0$$

Άρα στο $x_0=0$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη αλλά μόνο συνεχής.

Άρα η f παρουσιάζει κρίσιμα σημεία στη θέση $x_0=0$ με τιμή $f(0)=0$ και στη θέση $x_0=\dfrac{3\pi}{4}$ με τιμή $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Δ2

Πίνακας προσήμου f'

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.

<u>Μελέτη μονοτονίας</u>:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,\,0]$ αφού είναι συνεχής στο $[-1,\,0]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ αφού είναι συνεχής στο $\left[0,\,\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{3\pi}{4},\,\pi\right]$ αφού είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{3\pi}{4},\,\pi\right]$.

Μελέτη ακροτάτων:

$A\left(-1, f(-1)\right)$ δηλαδή το σημείο $A\left(-1, 1\right)$ είναι τοπικό μέγιστο.

$B\left(0, f(0)\right)$ δηλαδή το σημείο $B\left(0, 0\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

$\Gamma\left(\frac{3\pi}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ δηλαδή το σημείο $\Gamma\left(\frac{3\pi}{4}, e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο.

$\Delta\left(\pi, f(\pi)\right)$ δηλαδή το σημείο $\Delta\left(\pi, 0\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Ειδικότερα αφού $e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} > 1$ τότε το σημείο Γ είναι ολικό μέγιστο και τα σημεία Β και Δ είναι ολικά ελάχιστα.

Μελέτη Συνόλου Τιμών:

Για τα διαστήματα $\Delta_1 = [-1, 0]$, $\Delta_2 = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\Delta_3 = \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

το σύνολο τιμών είναι $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \Leftrightarrow$

$$f(\Delta) = [f(0), f(-1)] \cup \left[f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \cup \left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= [0, 1] \cup \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right] =$$

$$= \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$ Γιατί $e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} > 1$.

Δ3 Έχουμε $E = \int_0^\pi \left|e^x\cdot\eta\mu x - e^{5x}\right| dx$ όμως για $x \in [0, \pi]$ έχουμε ότι

$e^x\cdot\eta\mu x - e^{5x} = e^x\left(\eta\mu x - e^{4x}\right) < 0$ γιατί $e^{4x} \geq 1$ και $\eta\mu x \leq 1$ δηλαδή $e^{4x} - \eta\mu x > 0$.

Άρα $E = \int_0^\pi \left(e^{5x} - e^x\cdot\eta\mu x\right) dx \Leftrightarrow$

$$E = \int_0^\pi e^{5x}\,dx - \int_0^\pi e^x\cdot\eta\mu x\cdot dx$$

Θεωρούμε $I_1 = \int_0^{\pi} e^x \cdot ημx \cdot dx$ το οποίο με διπλή παραγοντική ολοκλήρωση γίνεται

$$I_1 = \frac{1+e^{\pi}}{2}$$

Τελικά $E = -\frac{1+e^{\pi}}{2} + \frac{\left[e^{5x}\right]_0^{\pi}}{5} \Leftrightarrow$

$$E = \frac{e^{5\pi}-1}{5} - \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{1}{2}$$

Δ4 Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα $x = \frac{3\pi}{4}$. Επιπλέον λύνοντας ως προς $f(x)$

έχουμε $f(x) = \frac{8\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} + (4x-3\pi)^2}{16} \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{(4x-3\pi)^2}{16} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$ με το '=' να ισχύει για $x = \frac{3\pi}{4}$.

Όμως από το σύνολο τιμών έχουμε

$0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$.

Άρα τελικά $x = \frac{3\pi}{4}$ μοναδική λύση της εξίσωσης.

Επιμέλεια απαντήσεων των θεμάτων: Τομέας Μαθηματικών

Αξιολόγηση θεμάτων

Τα θέματα χαρακτηρίζονται ως ποιοτικά, διατυπωμένα με σαφήνεια, με κλιμακούμενη δυσκολία, καλύπτουν όλη την ύλη και απαιτητικά σε σχέση με προηγούμενα έτη.