ΤΕΤΑΡΤΗ 18 – 05 – 2016

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Θέμα Α

Α1 Παραπομπή στο σχολικό βιβλίο σελίδα 262.

Α2 Παραπομπή στο σχολικό βιβλίο σελίδα 141.

Α3 Παραπομπή στο σχολικό βιβλίο σελίδα 246 με 247.

Α4 α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

Η f παραγωγίσιμη ως ρητή με

$$f'(x)=\frac{(x^2)'\cdot(x^2+1)-x^2\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x\,(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Επιλύουμε τυχαία

$$f'(x)>0\Rightarrow\frac{2x}{(x^2+1)^2}>0\overset{(x^2+1)^2>0}{\Rightarrow}2x>0\Rightarrow x>0$$

Προκύπτει ο πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 0]$.
- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\ +\infty)$.
- το $x_0=0$ είναι η θέση ελαχίστου με $f_{min}=f(0)=0$.

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $D_{f'} = \mathbb{R}$ ως ρητή με

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(2x)'(x^2+1)^2 - 2x\left[(x^2+1)^2\right]'}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2+1)^2 - 2x\cdot 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1)\left[2(x^2+1) - 8x^2\right]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3} = \frac{-2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

Επιλύουμε τυχαία $f''(x) > 0 \overset{(x^2+1)^3>0}{\Rightarrow} -2(3x^2-1) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 < 0$

$$\Rightarrow 3x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{3} \Rightarrow |x| < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Προκύπτει ο πίνακας προσήμου της f''.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Η f είναι κοίλη στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει σημεία καμπής στις θέσεις $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, τα σημεία

$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, δηλαδή $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$

$B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, δηλαδή $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$

B3. Από το D_f προκύπτει ότι θα αναζητηθούν οι πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$.

Αναζήτηση στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 0\cdot x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

Άρα η f δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 1$.

Αναζήτηση στο $-\infty$

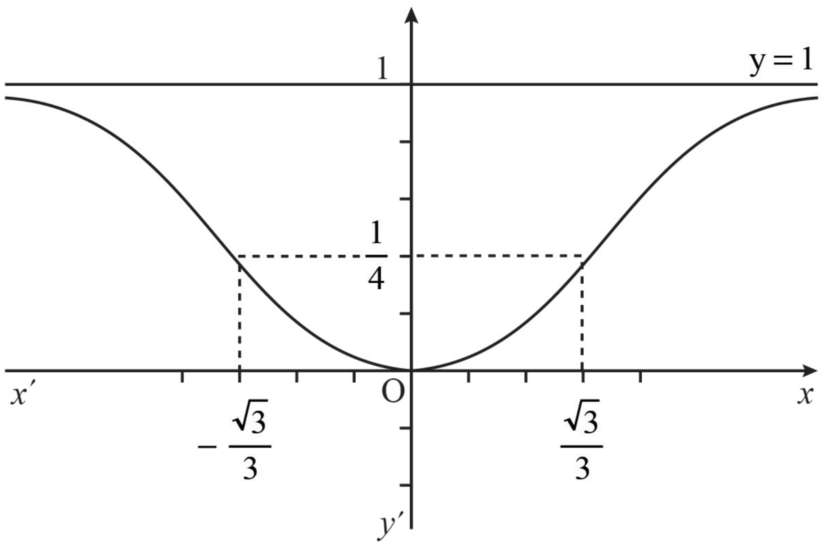
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - 0\cdot x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

Άρα η f δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 1$.

B4. Από τις απαντήσεις των ερωτημάτων B_1, B_2, B_3 προκύπτει ο πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−		−	0	+		+	
$f''(x)$		−	0	+		+	0	−	
$f(x)$		↘		↘		↗		↗	



Θέμα Γ

Γ1. Η $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει προφανής ρίζα την $x_0^2=0 \Leftrightarrow x_0=0$. Θεωρούμε

$h(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$e^{x^2}-1$		$+$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Εξ’ ορισμού ελαχίστου $\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει $h(x)\geq h(0)\Rightarrow h(x)\geq 0$. Άρα $x_0=0$ μοναδική διπλή ρίζα.

Γ2. Γνωρίζουμε ότι $|f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right| \Rightarrow |f(x)|=|h(x)| \underset{\forall x\in\mathbb{R}}{\overset{h(x)\geq 0}{\Rightarrow}}$

$|f(x)|=h(x)$ οπότε $f(x)=h(x)$ ή $f(x)=-h(x)$

δηλαδή $f(x)=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$ ή $f(x)=-\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$ άρα υπάρχουν τέσσερις συναρτήσεις, δύο χωρίς απόλυτο και δύο δίκλαδες διότι

η συνάρτηση $h(x)=e^{x^2}-x^2-1$ έχει μοναδική ρίζα $x=0$.

Γ3. Γνωρίζουμε ότι $f'(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)'=2x\left(e^{x^2}-1\right)$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η $f'(x)$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=2\left(e^{x^2}-1\right)+2x\cdot 2xe^{x^2}$$

$$f''(x)=2e^{x^2}-2+4x^2e^{x^2}=4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}-2=$$

$$4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right)\geq 0$$

Άρα η f είναι κυρτή $\forall x\in\mathbb{R}$ και f' γνησίως αύξουσα $\forall x\in\mathbb{R}$.

Γ4. Θεωρούμε $g(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ με g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αφού η $f(x+3)$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=f'(x+3)\cdot(x+3)'-f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x)=f'(x+3)-f'(x)$$

Γνωρίζουμε ότι $x+3>x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x+3)>f'(x)\Rightarrow f'(x+3)-f'(x)>0$
$\Rightarrow g'(x)>0$ και η $g(x)$ είναι συνεχής άρα η g είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η g είναι ´´$1-1$´´ στο $\mathbb{R}$.

Από εκφώνηση $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$

$$\Rightarrow g(|\eta\mu x|)=g(x)\overset{1-1}{\Rightarrow}|\eta\mu x|=x$$

$$\overset{x>0}{\Rightarrow}|\eta\mu x|=|x|$$

και σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο (σελίδα 170) προκύπτει ότι $x=0$.

Θέμα Δ

Δ1

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx + \int_0^\pi f''(x)\eta\mu x\,dx = \pi \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx + \int_0^\pi (f'(x))'\,\eta\mu x\,dx = \pi \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx = \pi \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x)\,(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx = \pi \Rightarrow$$

$$[f(x)\,(-\sigma\upsilon\nu x)]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx = \pi \Rightarrow$$

$$f(\pi) + f(0) + f'(\pi)\,\eta\mu\pi - f'(0)\,\eta\mu 0 = \pi \Rightarrow$$

$f(\pi) = \pi$ διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$ οπότε $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}} = 1$$

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$$

Θεωρούμε $u(x) = \dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}$ για $x \neq 0$ με $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 1$

τότε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = u(x)\,\dfrac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[u(x)\,\frac{\eta\mu x}{x}\right] \Rightarrow$$

$$f'(0) = 1\cdot 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

Δ2

α) Είναι $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^{x}$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η $f(f(x))$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
Καθώς και η e^{x}, $f(x)$ είναι παραγωγίσιμες τότε $e^{f(x)}$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα $e^{f(x)}+x$ και η $f(f(x))+e^{x}$ είναι παραγωγίσιμες οπότε παραγωγίζουμε την ισότητα $\left(e^{f(x)}+x\right)'=\left(f(f(x))+e^{x}\right)'$

$e^{f(x)}f'(x)+1=f'(f(x))f'(x)+e^{x}$
Έστω ότι υπάρχει x_0 εσωτερικό του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$ (1)
Άρα για $x=x_0: e^{f(x_0)}f'(x_0)+1=f'(f(x_0))f'(x_0)+e^{x_0}$
$\Rightarrow 1=e^{x_0}\Rightarrow x_0=0$
όμως $f'(0)=1$ από ερώτημα Δ1 είναι **Άτοπο**
Αφού από σχέση (1) είναι $f'(0)=0$

β) Αφού η παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δεν παρουσιάζει ακρότατο σημαίνει $f'(x)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ και ως συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο και $f'(0)=1>0$ άρα $f'(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ και η f συνεχής οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3 Αφού η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και συνεχής γνωρίζουμε ότι
$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$
άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Οπότε αν $\lambda(x)=\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$, $D_\lambda=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}/f(x)=0\}$ και

$$|\lambda(x)|=\left|\frac{1}{f(x)}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right|=\left|\frac{1}{f(x)}\right||(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)|\leq\left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow -2\left|\frac{1}{f(x)}\right|\leq\lambda(x)\leq 2\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right)=-2\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=-2\left|\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}\right|=-2\cdot 0=0$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right)=2\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right|=2\left|\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}\right|=2\cdot 0=0$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\lambda(x)=0$

Δ4 $I=\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ell nx)}{x}dx$

Θέτουμε $u=\ell nx$

• $x=1$ το $u=0$
  $x=e^\pi$ το $u=\pi$

• $du=(\ell nx)'dx=\frac{1}{x}dx$

Άρα $I=\int_0^\pi f(u)du$

Επίσης, από $0<u<\pi$

$\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0)<f(u)<f(\pi)$

$\Rightarrow 0<f(u)<\pi$

$\Rightarrow \int_0^\pi 0du<I<\int_0^\pi \pi du$

$\Rightarrow 0<I<\pi\,[u]_0^\pi$

$\Rightarrow 0<I<\pi\,(\pi-0)$

$\Rightarrow 0<I<\pi^2$

Επιμέλεια απαντήσεων των θεμάτων: Τομέας Μαθηματικών

<u>Αξιολόγηση θεμάτων</u>

Τα θέματα χαρακτηρίζονται ως ποιοτικά, διατυπωμένα με σαφήνεια και με κλιμακούμενη δυσκολία.