ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΝΕΑ ΠΑΙΔΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ'ΛΥΚΕΙΟΥ 2016

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΕΡΟΣ Α'

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1η

Υπολογισμός Ορισμένου ολοκλήρωματος που βρίσκεται μέσα σε ορισμένο ολοκλήρωμα.

Χαρακτηριστική Άσκηση:

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει $\int_0^1 t^3\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dt = 504$.Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$.

Λύση:

Βήμα 1 ► **Θέτουμε** $c=\int_0^1 f(x)dx$ με $c\in\mathbb{R}$.

Βήμα 2 ► **Αντικαθιστούμε** το $c\in\mathbb{R}$ στην δοσμένη σχέση και έχουμε $\int_0^1 t^3c\,dt = 504$. Έτσι προκύπτει εξίσωση με άγνωστο το $c\in\mathbb{R}$.

Έχουμε: $$\int_0^1 t^3c\,dt = 504 \Leftrightarrow c\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = 504 \Leftrightarrow \frac{c}{4} = 504 \Leftrightarrow c = 2016.$$

Άρα, $\int_0^1 f(x)dx = 2016$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2η

Προσδιορισμός τύπου συνάρτησης μέσω σχέσης με ορισμένο ολοκλήρωμα, με τη συνάρτηση να βρίσκεται μέσα και έξω από το ολοκλήρωμα.

Χαρακτηριστική Άσκηση:

Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει:

$\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx = f(x)+e^x, x\in\Re.$ (1)

Λύση:

Βήμα 1 ► **Θέτουμε** $c=\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx$ με $c\in\mathbb{R}$. (2)

Βήμα 2 ► **Αντικαθιστούμε** το $c\in\mathbb{R}$ στην δοσμένη σχέση (1) και έχουμε $c=f(x)+e^x, x\in\Re$.

Βήμα 3 ► **Λύνουμε** ως προς την f (x) και την **αντικαθιστούμε** στην (2).

$c=\mathrm{f}(\mathrm{x})+\mathrm{e}^{\mathrm{x}} \Leftrightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{c}-\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$

$$c=\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx \Leftrightarrow c=\int_0^1 e^{1-x}(c-e^x)dx \Leftrightarrow$$

Είναι : $c=c\int_0^1 e^{1-x}\,\mathrm{dx}-\int_0^1 edx \Leftrightarrow c=c\left[-e^{1-x}\right]_0^1-e \Leftrightarrow$

$$c=c(-1+e)-e \Leftrightarrow c(2-e)=-e \Leftrightarrow c=\frac{e}{e-2}$$

Άρα, $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}-\mathrm{e}^{\mathrm{x}},\ \mathrm{x}\in\mathbb{R}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3η

Υπολογισμός ολοκληρώματος αντίστροφης συνάρτησης, μιας συνάρτησης f με συνεχή πρώτη παράγωγο και 1-1,όταν δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης.

Χαρακτηριστική Άσκηση:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x}+3x-1, x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{e+2} f^{-1}(x)dx$.

Λύση:

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$,είναι $f'(x)=e^{x}+3>0$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα , άρα και 1-1.

Οπότε ορίζεται η αντίστροφη της f με

$D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=\mathbb{R}$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

Θεωρούμε ότι η $f^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο R.

Βήμα 1 ► **Θέτουμε** $u=f^{-1}(x)$ η οποία είναι 1-1.

και έχουμε $f(u)=x$.

Βήμα 2 ► Παραγωγίζοντας έχουμε $f'(u)du=dx$

Βήμα 3 ► **Δεν ξεχνάμε να αλλάξουμε** τα όρια Ολοκλήρωσης.

Για $x=0$ είναι $f(u)=0\Leftrightarrow f(u)=f(0)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}u=0$

Για $x=e+2$ είναι $f(u)=e+2\Leftrightarrow f(u)=f(1)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}u=1$

Βήμα 4 ► Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{e+2} f^{-1}(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = \left[uf(u)\right]_0^1 - \int_0^1 f(u)du =$$

$$f(1) - \int_0^1 (e^x + 3x - 1)du = e + 2 - \left[e^x + 3\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 =$$

$$e + 2 - e - \frac{3}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2}\text{ τ.μ.}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4η

Και αν θέλουμε να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα συνάρτησης f(x) της οποίας γνωρίζουμε την παράγωγο $f'(x)$,αλλά δεν είναι εύκολο να βρούμε τον τύπο της ως αρχική της $f'(x)$, τι κάνουμε;

►Χρησιμοποιούμε «έξυπνα» την παραγοντική μέθοδο.

Χαρακτηριστική Άσκηση:

Έστω F(x) αρχική συνάρτηση της $f(x) = e^{-x^2}$ στο $\mathbb{R}$,με $F(1) = 0$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 F(x)dx$.

Λύση:

Έχουμε

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 x'F(x)dx = \left[xF(x)\right]_0^1 - \int_0^1 xf(x)dx =$$

$$F(1) - \int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1-e}{2e}$$

►Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $-\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

κάνουμε αλλαγή μεταβλητής.

▪Θέτουμε $u=-x^2$ και $du=-2xdx$.

▪Αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης

Για $x=0$ είναι $u=0$

Για $x=1$ είναι $u=-1$. Είναι

$$-\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^u du=-\frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-1}^{0}=\frac{1-e}{2e}.$$

►Σε επόμενη δημοσίευση ακολουθεί συνέχεια περιπτώσεων με ολοκληρώματα. (ΜΕΡΟΣ Β')

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ ΝΕΑ ΠΑΙΔΕΙΑ

Επιμέλεια : Μπότσαρη Μαίρη

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ΄ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Γ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2015,+\infty)\to R$ με $xf'(x)\ln x = -f(x)$ για κάθε $x \geq 2015$ και $f(2016)=1$.

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της f. 7 μονάδες

Γ2. Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω. 4 μονάδες

Γ3. Να δείξετε ότι $f(2015) + f(2017) > 2$. 7 μονάδες

Γ4. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$ 7 μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

1. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$ να αποδείξετε ότι f(x) = 0, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

4 μονάδες

2. Αν για τη συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ f ισχύει $\int_0^1 f^2(x)dx + \frac{1}{3} = \int_0^1 2xf(x)dx$, να αποδείξετε ότι f(x) = x, για κάθε $x \in [0,1]$.

7 μονάδες

Δ2. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και

$$\int_0^{f(x)} (2e^t + 1)dt = x \ , \ x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.

7 μονάδες

2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον x΄x, τον y΄y και την x = 2e - 1.

7 μονάδες

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ ΝΕΑ ΠΑΙΔΕΙΑ

Επιμέλεια Θεμάτων: Μπότσαρη Μαίρη

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ'ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. f παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$xf'(x)\ln x = -f(x) \Leftrightarrow f'(x)\ln x = \frac{-f(x)}{x}(x \neq 0)$$

$$f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow f'(x)\ln x + f(x)(\ln x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x)\ln x)' = 0 \Leftrightarrow f(x)\ln x = c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{c}{\ln x}, c \in \mathbb{R}(\ln x \neq 0)$$

Για $x = 2016$ είναι $f(2016) = \dfrac{c}{\ln 2016} = 1 \Leftrightarrow c = \ln 2016$

Άρα $f(x) = \dfrac{\ln 2016}{\ln x}, x \geq 2015$

Γ2. $f'(x) = \left(\dfrac{\ln 2016}{\ln x}\right)' = \dfrac{-\ln 2016}{x\ln^2 x} < 0$

$$f''(x) = \left(\frac{-\ln 2016}{x\ln^2 x}\right)' = \frac{\ln 2016(\ln x + 2)}{x^2\ln^3 x} > 0$$

(αφού $\ln x + 2 > 0$ και $\ln x > 0$, για $x \geq 2015$)

Άρα, η f στρέφει τα κοίλα άνω.

Γ3. ► **f** συνεχής στο [2015,2016]

f παραγωγίσιμη στο (2015,2016) και από ΘΜΤ

συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_1 \in (2015,2016)$:

$$f'(x_1) = f(2016) - f(2015)$$

► **f** συνεχής στο [2016,2017]

f παραγωγίσιμη στο (2016,2017) και από ΘΜΤ

συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_2 \in (2016,2017)$:

$$f'(x_1) = f(2017) - f(2016)$$

Επειδή $f''(x) > 0$,είναι η f $\nearrow$ (γν.αύξουσα)

Άρα,

$$x_1 < x_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow f(2016) - f(2015) < f(2017) - f(2016) \Leftrightarrow$$
$$2f(2016) < f(2015) + f(2017) \Rightarrow 2 < f(2015) + f(2017)$$

Γ4. Από ΘΜΤ στο **[x,x+1]** συμπεραίνουμε ότι υπάρχει

$$\xi \in (x, x+1) \text{ με } f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

Όμως, $x < \xi < x+1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1)$

Οπότε $\dfrac{-\ln 2016}{x \ln^2 x} < f(x+1) - f(x) < \dfrac{-\ln 2016}{(x+1)\ln^2(x+1)}$

Από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

1. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α,β].Τότε αφού $f(x)\geq 0$,για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,ισχύει

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$,άτοπο λόγω υπόθεσης.

Άρα, f(x) = 0, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

2. $\int_0^1 f^2(x)dx + \frac{1}{3} = \int_0^1 2xf(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x)-x)^2dx = 0$

(διότι $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$)

Όμως $(f(x)-x)^2 \geq 0$, $x\in[0,1]$,οπότε από (1) έχουμε

ότι f(x) – x = 0 , για κάθε $x\in[0,1]$ και έτσι f(x) = x, για κάθε $x\in[0,1]$.

Δ2.

$\int_0^{f(x)} (2e^t+1)dt = x \Leftrightarrow \left[2e^t+t\right]_0^{f(x)} = x \Leftrightarrow 2e^{f(x)} + f(x) - 2 = x \Leftrightarrow$

$2e^{f(x)} + f(x) = x + 2$

Παραγωγίζουμε την ισότητα(παραγωγίσιμες οι συναρτήσεις και των δύο μελών) και έχουμε

$2e^{f(x)}f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(2e^{f(x)}+1) = 1 \Leftrightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{2e^{f(x)}+1} > 0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα,άρα και 1-1.

►Χρειαζόμαστε να βρούμε το πρόσημο της f(x) προκειμένου να υπολογίσουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα.

►Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,οπότε και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άρα, f συνεχής στο [0,e].

Έχουμε: $f^{-1}(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$, f γν.αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και

Είναι $x \geq 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

►Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^{2e-1}|f(x)|dx \overset{f(x)\geq 0}{=} \int_0^{2e-1} f(x)dx$

▪ **Θέτουμε** $u=f(x)$ και έχουμε $f^{-1}(u)=x$.

Δηλαδή $2e^u+u-2=x$.

▪ Παραγωγίζουμε και είναι $(2e^u+1)du=dx$

▪ Αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης

Για x=0: $f^{-1}(u)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(u)=f^{-1}(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} u=0$

Για x=2e-1: $f^{-1}(u)=2e-1 \Leftrightarrow f^{-1}(u)=f^{-1}(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} u=1$

Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^1 u(f^{-1}(u))'du=\int_0^1 u(2e^u+1)du=2\int_0^1 ue^u du+\int_0^1 udu=$$

$$2\left(\left[ue^u\right]_0^1-\int_0^1 e^u du\right)+\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{5}{2}.$$

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ ΝΕΑ ΠΑΙΔΕΙΑ

Επιμέλεια : Μπότσαρη Μαίρη