

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 3

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 8 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x στο σημείο x_0 ;

(Μονάδες 5)

A2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

(Μονάδες 10)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

β. Ανάμεσα σε δύο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{\beta}^x f(t)dt = \int_{\alpha}^x f(t)dt + c, c \in \mathbb{R}$$

δ. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$$

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 5)

B3. Να ορίσετε την f^{-1} .

(Μονάδες 8)

B4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2.$$

(Μονάδες 7)

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

Γ2. i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 5)

Γ3. Αν για τους αριθμούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $2a + \beta > 0$ και $a + 2\beta - 1 > 0$,

ισχύει:

$$e^{2a+\beta-1} - \ln(2a + \beta) + e^{a+2\beta-2} - \ln(a + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους a, β .

(Μονάδες 5)

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την

ευθεία $x=1$.

(Μονάδες 5)

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(1, +\infty)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 1$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+x \ln x}{x \ln x}, \text{ για κάθε } x > 1 \text{ με } f(e) = e^e$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x \cdot \ln x$, $x > 1$ καθώς και ότι οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1, +\infty)$.

(Μονάδες 4)

Δ2. i). Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 4)

ii). Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{\lambda}{x}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, $x > 1$.

(Μονάδες 4)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(e, f(e))$.

(Μονάδες 4)

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{f(x)}{e^{e-1}} \geq (1+e)x - e^2$, για κάθε $x > 1$

(Μονάδες 3)

ii. $\int_2^3 f(x) dx \geq e^{e-1} \cdot \frac{5+5e-2e^2}{2}$

(Μονάδες 3)

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ5. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in (1, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2$$

(Μονάδες 3)

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια: Συντακτική ομάδα www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών