ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 7

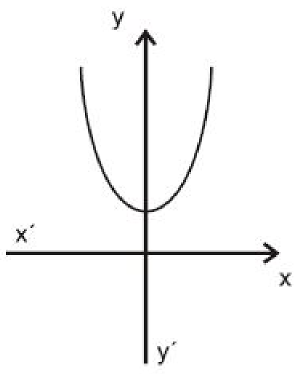
Απάντηση: Η απόδειξη της σελίδας 145 του Σχολικού Βιβλίου.

Α2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του ℝ. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

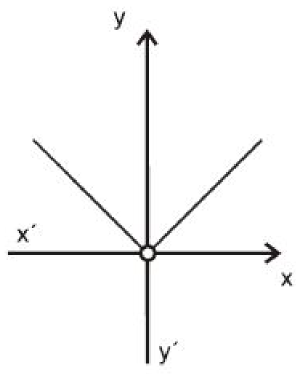
Απάντηση: Ο Ορισμός της σελίδας 145 του Σχολικού Βιβλίου.

Μονάδες 4

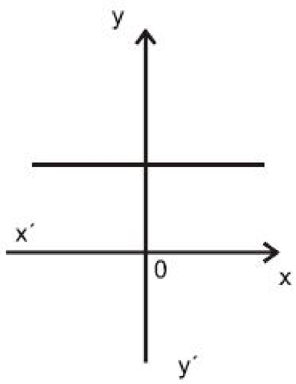
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



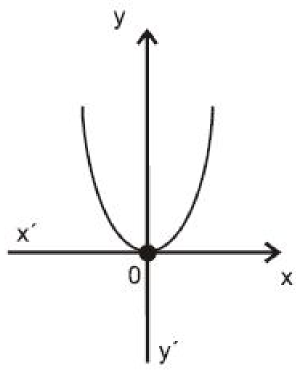
(f)



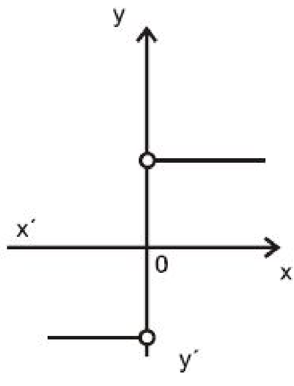
(g)



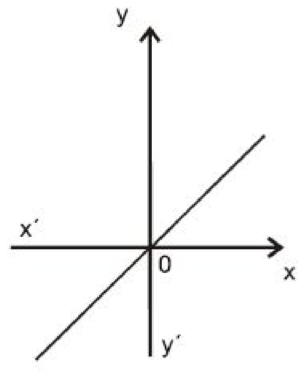
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Απάντηση: Της Τ μπορεί να είναι η f

Της Η μπορεί να είναι η g

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f,g:(0, +∞) → ℝ, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right] = 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

Απάντηση: Ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Απάντηση: Το παράδειγμα της παραγράφου 1.6 στο σχολικό βιβλίο με:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}+1,\ g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 0} g(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right) = 1 \neq 0$$

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f: ℝ → ℝ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

Απάντηση: Σωστή

β) Αν μια συνάρτηση f: ℝ → ℝ είναι ‘1-1’, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Απάντηση: Σωστή

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3], τότε ορίζεται η f o g με πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3].

Μονάδες 6

Απάντηση: Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \le 1 \end{cases}$

Β1. Να υπολογίσετε το α∈ $\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

ΛΥΣΗ:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων (πολυωνυμικών)
- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική.

Θα πρέπει να είναι συνχής και στο σημείο $x_0 = 1$, δηλαδή πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2 = a+1 \Leftrightarrow a = 1$$

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι α = 1 .

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2},4\right]$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \le 1 \end{cases}$$

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2},4\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,4)$ με με παράγωγο $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσμιμη στο $x_0 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=-1$$

Επομένως η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και άρα η f **δεν** ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

B3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Αν $A(x_0, f(x_0))$ τα σημεία στα οποία η σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$, τότε πρέπει να ισχύει $f'(x_0)=-\frac{1}{4}$. Είναι:

- Αν $x_0<1$, τότε $f'(x_0)=2x_0$ και άρα: $f'(x_0)=2x_0 \Leftrightarrow 2x_0=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0=-\frac{1}{8}$. Το αντίστοιχο σημείο είναι $A_1\left(-\frac{1}{8}, f\left(-\frac{1}{8}\right)\right)$ ή $A_1\left(-\frac{1}{8},\frac{65}{64}\right)$.
- Αν $x_0>1$, τότε $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$ και άρα: $f'(x_0)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0=\pm 2$ και επειδή $x_0>1$ δεκτή τιμή είναι η $x_0=2$. Το αντίστοιχο σημείο είναι $A_2(2, f(2))$ ή $A_2\left(2,\frac{3}{2}\right)$.
- Αν $x_0=1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά είναι:

- Στο $A_1: y-f\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{4}(x+\frac{1}{8}) \Leftrightarrow y-\frac{65}{64}=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{32} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{63}{64}$
- Στο $A_2:\ y-f(2)=-\frac{1}{4}(x+2) \Leftrightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+2$

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ:

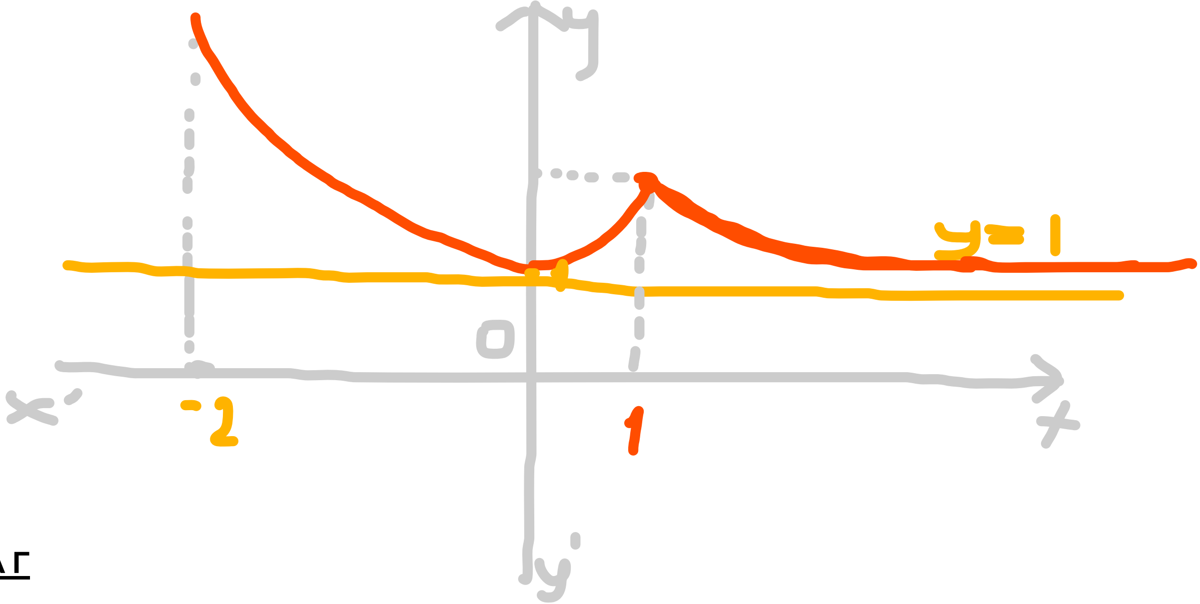
- Στο $-\infty$ η f δεν έχει πλάγιες και οριζόντιες ασυμπτωτες ως πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού.
- Δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζοντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο επόμενο σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f : [0, π] →ℝ, με τύπο: f(x) = 2ημx − x .

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$ με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1, x\in\left[0,\pi\right]$. Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

Ο πίνακας προσήμου της f' είναι:

Χ	0	$\frac{\pi}{3}$ π
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

(Το πρόσημο της f' βρίσκεται με την σκέψη ότι επειδή η f' είναι συνεχής στο [0,π] κσι θα διατηεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των ριζών. Δίνοντας μια οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των ριζών π.χ.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-1=-1$)

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_o\in[0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο

Α(x_o, f(x_o)) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Η f είναι δύο φορές με $f''(x) = -2\eta\mu x, x \in [0,\pi]$. Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,\pi]$ και επομένως η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο Α, εκτός του ίδιου του σημείου Α. Άρα η εφαπτομένη και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινό μόνο το σημείο Α.

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x dx$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

$\int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^\pi (2\eta\mu x - x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2\int_0^\pi \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^\pi x\sigma\upsilon\nu x dx = 2I - J$,

όπου $I = \int_0^\pi \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx,\ J = \int_0^\pi x\sigma\upsilon\nu x dx$.

Για το I : Θέτουμε:

$$u = \eta\mu x \Rightarrow du = \sigma\upsilon\nu x$$
$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$
$$x = \pi \Rightarrow u = 0$$

και άρα $I = 0$.

Για το J έχουμε:

$$J = \int_0^\pi x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^\pi x(\eta\mu x)' dx = [x\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x dx = 0 - 2 = -2$$

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f(x)-f(2x))\cdot \ln x\right]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

α) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x - x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} - 1\right) = 2\cdot 1 - 1 = 1$$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left[(f(x) - f(2x))\ln x\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x) - f(2x)}{x}x\ln x\right] (1)$$

$$K = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x) - f(2x)}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} - 2\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{2x} = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$K = (-1)\cdot 0 = 0$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$\ln(1+x) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)\ln(1+x) > x \Leftrightarrow (x+1)\ln(1+x) - x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x+1)\ln(1+x) - x > 0, x \geq 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη για $x \geq 0$ με:

$$h(x) = (x+1)\ln(1+x) - x > 0, x \geq 0$$

$$h'(x) = \ln(1+x), x \geq 0$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 0$. Επομένως:

$$x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow (x+1)\ln(1+x) - x > 0$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα (0, 1).

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1»

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(1+x)}{(x+1)x^2} = -\frac{h(x)}{(x+1)x^2} < 0$$

$$(h(x) > 0, (x+1)x^2 > 0)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ άρα και «1-1».

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f που, επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα $(0, +\infty)$ έχουμε:

$f\left((0,+\infty)\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = (0,1)$, διότι ;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(0,1)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα (αφού $f(x) > 0$):

$$f(x) + 1 > 2^{f(x)} \Leftrightarrow \ln(f(x)+1) > f(x)\ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(f(x)+1)}{f(x)} > \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(f(x)) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 1 (f \nearrow)$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0$, όπου 0 < α < 1, έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα (0, 1) και μία στο διάστημα (1, 2).

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=x(x-2)f(a)+x(x-1)f^{-1}(a)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi),x\in[0,2]$$

Η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0\Leftrightarrow g(x)=0$, $\Leftrightarrow g(x)=0,x\in(0,1)\cup(1,2)$

Στο $[0,1]$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως πολυωνυμική)
- $g(0)=2\eta\mu(\alpha\pi)>0$ $(0<\alpha<1\Leftrightarrow 0<\alpha\pi<\pi)$
- $g(1)=f(a)<0$ $(a>0\Leftrightarrow 0<f(a)<1)$

Άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Στο $[1,2]$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ (ως πολυωνυμική)
- $g(1)=f(a)<0$ $(a>0\Leftrightarrow 0<f(a)<1)$
- $g(2)=f^{-1}(a)>0$ (αφού από το το ερώτημα Δ2 το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(0,1)$).

Άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. Επειδή η εξίσωση $g(x)=0,x\in(0,1)\cup(1,2)$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού θα έχει το πολύ 2 ρίζες. Άρα η εξίσωση $g(x)=0,x\in(0,1)\cup(1,2)$ θα έχει ακριβώς 2 ρίζες μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Σχόλιο: Ο βαθμός της πολυωνυμικής εξίσωσης $g(x)=0,x\in(0,1)\cup(1,2)$ είναι 2 διότι ο συντελεστής του x^2 είναι : $g(x)=0\Leftrightarrow(f(a)+f^{-1}(a)+\eta\mu(\alpha\pi))x^2+(2f(a)-f^{-1}(a)-3\eta\mu(\alpha\pi))x+2$ και $f(a)+f^{-1}(a)+\eta\mu(\alpha\pi)$ >0.

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα (0, +∞) με F(e) = e·ln2, να αποδείξετε

ότι. $\ln 2<F(1)<\ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. για την F στο διάστημα $[1,e]$.

- F συνεχής στο $[1,e]$
- F παραγωγίσιμη στο $(1,e)$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(1,e):F'(\xi)=\frac{F(e)-F(1)}{e-1}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{F(e)-F(1)}{e-1}$. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$1<\xi<e \Rightarrow f(1)>f(\xi)>f(e) \Leftrightarrow \ln 2>\frac{e\ln 2-F(1)}{e-1}>\frac{\ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e-1)\ln 2>e\ln 2-F(1)>\frac{(e-1)\ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow \frac{(e-1)\ln(e+1)}{e}<e\ln 2-F(1)<(e-1)\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(e-1)\ln(e+1)-e^2\ln 2}{e}<-F(1)<(e-1)\ln 2-e\ln 2 \Leftrightarrow e\ln 2-(e-1)\ln 2<F(1)<\frac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2<F(1)<\frac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}$$

$$\frac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}<\ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right) \Leftrightarrow e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)<\ln 2^{e+1}-\ln(e+1) \Leftrightarrow e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)<e\ln 2^{e+1}-e\ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e+1)<e\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e+1)<\ln 2^e \Leftrightarrow e+1<2^e$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής.