ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 3

13/04/2016

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α1. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y = f(x) ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Λάθος

β. Ανάμεσα σε δύο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

Σωστό

γ. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{\beta}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} f(t)dt + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Σωστό

δ. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - l \right) = 0$$

Σωστό

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$.

Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\left(3e^{x}+1\right)-2$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Β3. Να ορίσετε την f^{-1} .

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x)<f^{-1}\left(\ln 5-2\right)-2.$$

ΛΥΣΗ

Β1. Για να ορίζεται η f , πρέπει:

$3e^{x}+1>0$, που αληθεύει για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι

$D_f=\mathbf{R}$

Β2. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}<3e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}+1<3e^{x_2}+1\Rightarrow$$

$$\ell n(3e^{x_1}+1)<\ell n(3e^{x_2}+1)\Rightarrow \ell n(3e^{x_1}+1)-2<\ell n(3e^{x_2}+1)-2\Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Σχόλιο: Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε εύκολα ότι $f'(x)=\dfrac{3e^{x}}{3e^{x}+1}>0,\ x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Β3. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y+2=\ell n(3e^{x}+1)\Leftrightarrow e^{y+2}=3e^{x}+1\Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{e^{y+2}-1}{3}, \frac{e^{y+2}-1}{3} > 0$$ οπότε:

$$x = \ell n\frac{1}{3}(e^{y+2}-1), y > -2.$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln\frac{1}{3}(e^{x+2}-1), x \in (-2, +\infty)$$

Β4. Έχουμε:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2 \Leftrightarrow \ln(3e^x+1) - 2 < \ln\frac{1}{3}\left(e^{\ln 5}-1\right) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(3e^x+1) < \ln\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3e^x + 1 < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 9e^x + 3 < 4 \Leftrightarrow$$

$$e^x < \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < \ln\frac{1}{9} \Leftrightarrow x < -\ln 9$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ2. i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Γ3. Αν για τους αριθμούς $a,\ \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$,

ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \le 2$$

να υπολογίσετε τους $a,\ \beta$.

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f,

τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1,+\infty)$.

Γ1. Έχουμε:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$$ και

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Επίσης $f'(0) = 0$, άρα

για $-1 < x < 0 \overset{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(0) = 0$ και

για $x > 0 \overset{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 0$.

Επιπλέον $f(0) = 0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

Γ2. i. Έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left[e^x - \ln(x+1) - 1\right] = +\infty$$

, αφού

$$\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty$$ και $$\lim_{x\to -1^+}\left[e^x - 1\right] = \frac{1}{e} - 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$.

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1,+\infty)$, μοναδική λύση την $x=0$, αφού:

για $x<0 \overset{f\ \text{γν. φθί.}}{\Longleftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$ και

για $x>0 \overset{f\ \text{γν. αύξ.}}{\Longleftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$.

ii. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της

<u>Κατακόρυφες:</u> Επειδή $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(e^x - \ln(x+1) - 1\right) = +\infty$, η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

<u>Οριζόντιες:</u> Η C_f **δεν** έχει οριζόντια ασύμπτωση αφού:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(e^x - \ln(x+1) - 1\right) = \lim_{x\to +\infty} e^x\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$$

, διότι είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} = \left(\frac{0}{0} - D,L\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

<u>Πλάγιες:</u> Επειδή:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - \ln(x+1) - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1 - 0 - 0 = 1$$

η C_f **δεν** έχει πλάγιες ασύμπτωτες

Γ3. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln((2\alpha+\beta-1)+1) - 1 + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln((\alpha+2\beta-2)+1) - 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha+\beta-1) + f(\alpha+2\beta-2) \le 0 \quad \textbf{(1)}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι:

$$f(2\alpha+\beta-1) = f(\alpha+2\beta-2) = 0, \quad \textbf{(2)}$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2\alpha+\beta-1) \neq 0$ τότε, επειδή $f(x) \ge 0$ για κάθε $x > -1$, θα πρέπει $f(2\alpha+\beta-1) > 0$ και η **(1)** μας δίνει:

$f(\alpha+2\beta-2) \le -f(2\alpha+\beta-1) < 0$ δηλαδή $f(\alpha+2\beta-2) < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως

$$f(2\alpha+\beta-1) = 0$$

οπότε από την **(1)** και $f(\alpha+2\beta-2)=0$.

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta-1=0 \\ \alpha+2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=1 \end{cases}.$$

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(e^x-\ln(x+1)-1\right)dx=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1\ln(x+1)dx-\int_0^1 1dx=$$

$$=\left[e^x\right]_0^1-\left[x\ln(x+1)\right]_0^1+\int_0^1\frac{x}{x+1}dx-\left[x\right]_0^1=e-1-\ln 2+I-1=e-2-\ln 2+I$$

$$I=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\left[x\right]_0^1-\left[\ln(x+1)\right]_0^1=1-\ln 2$$

Επομένως:

$$\mathrm{E}(\Omega)=e-2-\ln 2+1-\ln 2=e-1-2\ln 2\ \ \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(1,\ +\infty)$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>1$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1+x\ln x}{x\ln x},\ \text{για κάθε}\ \ x>1\ \ \text{με}\ \ f(e)=e^e$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x\cdot\ln x,\ x>1$ καθώς και ότι οι συναρτήσεις $g(x)=e^x,\ h(x)=\ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1,\ +\infty)$.

Δ2. i). Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii). Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$, $x>1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(e,\ f(e))$.

Δ4. i. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{f(x)}{e^{e-1}}\geq(1+e)x-e^2$

ii. Να αποδείξετε ότι: $\int_2^3 f(x)dx\geq\dfrac{5+5e-4e^2}{4}$

Δ5. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}\ \text{ για κάθε } x_1,\ x_2\in(1,\ +\infty)$$

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1+x\ln x}{x\ln x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x\ln x}+1\Leftrightarrow\ln|f(x)|=[\ln(\ln x)]'+(x)'\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow[\ln|f(x)|]'=[\ln(\ln x)+x]'\Leftrightarrow\ln|f(x)|=\ln(\ln x)+x+c$$

Για $x=e$ έχουμε:

$$\ln|f(e)|=\ln(\ln e)+e+c\Rightarrow\ln e^e=e+c\Rightarrow e=e+c\Rightarrow c=0$$

Επομένως $\ln|f(x)|=\ln(\ln x)+x$ (1).

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(1,\ +\infty)$ (ως παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$) και δεν έχει ρίζες αφού $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$, η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1,\ +\infty)$ και αφού $f(e)=e^e>0$ θα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$.

Άρα από την σχέση (1) έχουμε:

$$\ln f(x)=\ln(\ln x)+x\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln(\ln x)+\ln e^x\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln\left(e^x\cdot\ln x\right)\Leftrightarrow f(x)=e^x\cdot\ln x,\ x>1$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις $g(x)=e^x$, $h(x)=\ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο, δηλαδή ότι η εξίσωση:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow e^x=\ln x\Leftrightarrow e^x-\ln x=0 \text{ δεν έχει ρίζα στο } (1,\ +\infty)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $K(x)=e^x-\ln x,\ x\geq 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1,\ +\infty)$) με $K'(x)=e^x-\dfrac{1}{x},\ x\geq 1$. Η συνάρτηση $K'(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1,\ +\infty)$) με $K''(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0,\ x\geq 1$. Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$. Άρα:

$$x>1\Rightarrow K'(x)>K'(1)=e-1\Rightarrow K'(x)>0,\ x>1$$

Επομένως η συνάρτηση $K(x)$ είναι είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,\ +\infty\right)$. Άρα:

$$x>1 \Rightarrow K(x)>K(1)=e>0 \Rightarrow K(x)>0,\ x>1$$

Οπότε η συνάρτηση $K(x)$ δεν έχει ρίζα στο $\left(1,\ +\infty\right)$, δηλαδή ισοδύναμα οι συναρτήσεις $g(x)=e^x,\ h(x)=\ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $\left(1,\ +\infty\right)$.

Δ2. i) Η συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot \ln x,\ x>1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(1,\ +\infty\right)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(1,\ +\infty\right)$) με:

$$f'(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}>0, \text{ για κάθε } x>1$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα $\left(1,\ +\infty\right)$. Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$f\left((1,\ +\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to 1^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα $\left(1,\ +\infty\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$$

Αρα $f\left((1,\ +\infty)\right)=\left(0,\ +\infty\right)$

ii) Έχουμε $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}\Leftrightarrow xf(x)=\lambda\Leftrightarrow\varphi(x)=\lambda,\quad x>1$, όπου $\varphi(x)=xf(x),\ x>1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(1,\ +\infty\right)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(1,\ +\infty\right)$) με:

$$\varphi'(x)=f(x)+xf'(x)=e^x\ln x+x\left(e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)=e^x\ln x+xe^x\ln x+e^x=e^x\left(\ln x+x\ln x+1\right)>0$$

, για κάθε $x\in\left(1,\ +\infty\right)$

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(1,\ +\infty\right)$ και επομένως το σύνολο τιμών της είναι $\varphi\left((1,\ +\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=\left(0,\ +\infty\right)$, αφού:

$$\lim_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(xf(x)\right)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)=+\infty$$

Άρα:

- Αν $\lambda\le 0$ η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ δεν έχει ρίζα στο $\left(1,\ +\infty\right)$

- Αν $\lambda > 0$ η εξίσωση $f(x) = \frac{\lambda}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,\ +\infty)$, αφού είναι «1-1» στο $(1,\ +\infty)$ (ως γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$).

Δ3. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,\ +\infty)$) με:

$$f''(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} = e^x \ln x + 2e^x \cdot \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} =$$

$$e^x\left(\ln x + 2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = e^x\left(\frac{x^2 \ln x + 2x - 1}{x^2}\right) > 0,\ x > 1$$

Αφού για κάθε $x \in (1,\ +\infty)$ είναι : $e^x > 0$, $x^2 > 0$, $x^2 \ln x + 2x - 1 > 0\left(x^2 \ln x > 0,\ 2x - 1 > 0\right)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(e,\ f(e))$ είναι:

$$y - e^e = \left(e^e + e^{e-1}\right)\left(x - e\right) \Leftrightarrow y = \left(e^e + e^{e-1}\right)x - e^{e+1} - e^e + e^e \Leftrightarrow y = \left(e^e + e^{e-1}\right)x - e^{e+1}$$

, αφού $f'(e) = e^e + e^{e-1}$

Δ4. i) Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$ η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (στο σημείο επαφής Α ιχύει η ισότητα). Επομένως θα έχουμε:

$$f(x) \geq \left(e^e + e^{e-1}\right)x - e^{e+1} \Leftrightarrow f(x) \geq e^{e-1}\left(e+1\right)x - e^{e+1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{e-1}} \geq \left(e+1\right)x - \frac{e^{e+1}}{e^{e-1}} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{e-1}} \geq \left(e+1\right)x - e^2$$

, για κάθε $x > 1$

ii) Ολοκληρώνοντας[1] την προηγούμενη ανισοισότητα έχουμε:

$$\int_2^3 \frac{f(x)}{e^{e-1}}dx \geq \int_2^3\left[\left(e+1\right)x - e^2\right]dx \Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \geq (e+1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 - e^2\left[x\right]_2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \geq (e+1)\left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) - e^2\left(3-2\right) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \geq \frac{5}{2}(e+1) - e^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \geq \frac{5+5e-2e^2}{2} \Leftrightarrow \int_2^3 f(x)dx \geq e^{e-1}\cdot\frac{5+5e-2e^2}{2}$$

---

[1] Το βήμα αυτό χρειάζεται απόδειξη: Αν f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x), x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$. **Απόδειξη**: $f(x) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$,άρα:

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^\beta \left(f(x) - g(x)\right)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\beta g(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$$

Δ5. Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$ (προηγούμενο ερώτημα) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα $\left[x_1,\ \dfrac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$, αντίστοιχα, αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις (η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στα $\left[x_1,\ \dfrac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$).

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in \left(x_1,\ \dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = 2\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'(\xi_2) = 2\frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

Από το γεγονός ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 2\frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Επιμέλεια: Συντακτική Ομάδα www.mathp.gr

Συντονισμός: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών.