Λύσεις θεμάτων ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ -1- Πανελλαδικών Εξετάσεων 2016
Στο μάθημα: « Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής»
Γ΄Λυκείου,
09/02/2016

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α1. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται «1-1» σε ένα σύνολο Α;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

«Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$»

Α2. Αν $c > 0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{a}^{\beta} c\,dx$;

Απάντηση:

Το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση β − α και ύψος c .

Α3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Απόδειξη:

Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Α4. Σωστό/Λάθος

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Σωστό

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ΄ανάγκη $f(\beta)>0$.

Λάθος

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Σωστό

δ) Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A είναι συνεχής στο A και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A, τότε η f είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο A.

Λάθος

ε) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^{\beta} f(x)dx+\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx=0$$

Σωστό

ΘΕΜΑ 2^{o}

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

B3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

B4. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

ΛΥΣΗ

B1. Για το πεδίο ορισμού D_f της f έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{1-x}>0 \\ 1-x\neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+1)(1-x)>0 \\ x\neq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -1<x<1$$

Επομένως $D_f=(-1,\ 1)$

B2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f=(-1,\ 1)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων αφού οι επόμενες συναρτήσεις:

$$\begin{array}{l} g(x)=\dfrac{x+1}{1-x} \\ h(x)=\ln g(x) \\ \Phi(x)=2\ln g(x)+3 \end{array}$$

είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού της.

B3. Έστω $x_1, x_2 \in D_f=(-1,\ 1)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1=x_2$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 2\ln\frac{x_1+1}{1-x_1}+3=2\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}+3 \Leftrightarrow \ln\frac{x_1+1}{1-x_1}=\ln\frac{x_2+1}{1-x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1}=\frac{x_2+1}{1-x_2} \Leftrightarrow (x_1+1)(1-x_2)=(1-x_1)(x_2+1) \Leftrightarrow 2x_1=2x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f αντιστέφεται.

Για την αντίστροφή της έχουμε:

Πρέπει:

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3 \Leftrightarrow 2\ln\frac{x+1}{1-x}=y-3 \Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{1-x}=\frac{y-3}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x}=e^{\frac{y-3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1=(1-x)e^{\frac{y-3}{2}} \Leftrightarrow x+1=e^{\frac{y-3}{2}}-xe^{\frac{y-3}{2}} \Leftrightarrow x+xe^{\frac{y-3}{2}}=e^{\frac{y-3}{2}}-1 \Leftrightarrow x\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)=e^{\frac{y-3}{2}}-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{1+e^{\frac{y-3}{2}}}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow -1 < \frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)} < 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)} < 1 \\ -1 < \dfrac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{\frac{y-3}{2}}-1 < 1+e^{\frac{y-3}{2}} \\ -1-e^{\frac{y-3}{2}} < e^{\frac{y-3}{2}}-1 \end{pmatrix}$$

Οι τελευταίες σχέσεις είναι αληθείς για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x-3}{2}}-1}{1+e^{\frac{x-3}{2}}},\ x \in \mathbb{R}$$

Η $f^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο και σύνθεση των επόμενων συνεχών συναρήσεων

$$f_1(x) = e^{\frac{x-3}{2}}$$

$$f_2(x) = \frac{e^x-1}{1+e^x}$$

B4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\right) = \lim_{u\to\infty}(2u+3) = +\infty \quad \left(u = \frac{x+1}{1-x},\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{1-x} = +\infty\right)$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\right) = \lim_{u\to 0^+}(2\ln u+3) = -\infty \quad \left(u = \frac{x+1}{1-x},\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x+1}{1-x} = 0\right)$$

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x \neq 0,\ x \neq 1 \ \text{και}\ x \neq -1 \\ \kappa, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = f(x)\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x > 0$$

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ καθώς και την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Γ2. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία της.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1} \le \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)}, \text{ αν } x>1$$

και

$$e^{-x^2+1} \ge \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)}, \text{ αν } 0<x<1$$

Γ3. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα κοίλα της στο διάστημα $\left(0,\ +\infty\right)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στα σημεία $A\left(2,\ g(2)\right)$ και $B\left(1,\ g(1)\right)$ αντίστοιχα

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}\left(7-3x\right) \le e^{-x^2}\left(x-1\right), \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right) \text{ και}$$

$$e^{-x^2} \ge e^{-1}, \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$$

ΛΥΣΗ

Γ1. Η συνάρτηση f γίνεται:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x^2+1}\left(x-1\right)}{\ln x}, & \text{αν } x>0 \text{ και } x\neq 1 \\ \dfrac{e^{-x^2+1}\left(x-1\right)}{\ln\left(-x\right)}, & \text{αν } x<0 \\ \kappa, & \text{αν } x=1 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Για το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} = 0$,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x^2+1}\cdot \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = e\cdot(-1) = -e$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)} = 0$,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x^2+1}\cdot \lim\limits_{x\to 0^-}(x-1) = e\cdot(-1) = -e$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}(\ln(-x)) = -\infty$

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0,\ 1\}$ ώς πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Τέλος για να είναι η f συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_1 = 1$.

Έχουμε, σύμφωνα με τον κανόνα του de L΄ Hospital:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2+1}(-2x^2+2x+1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\left[e^{-x^2+1}(-2x^2+2x+1)x\right] = 1$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$.

Γ2. i) Η συνάρτηση $g(x) = f(x)\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $x>0$ γίνεται διαδοχικά:

Για $x=1$ έχουμε $g(1) = f(1)\cdot \ln 1 = 0$

$$g(x) = \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}(\ln 1 - \ln x^2) = \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}(-2\ln x) =$$
$$= -2e^{-x^2+1}(x-1)$$

Επομένως θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = -2e^{-x^2+1}(x-1)$, $x>0$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ \infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = -2\left[-2x(x-1)e^{-x^2+1} + e^{-x^2+1}\right] = -2e^{-x^2+1}(-2x^2+2x+1),\ x>0$$

Επειδή $-2e^{-x^2+1} < 0$, για $x>0$, το πρόσημο της $g'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $-2x^2+2x+1$

Ο πίνακας προσήμου της $g'(x)$ είναι ο επόμενος:

x	0 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Επομένως η συνάρτηση g είναι:

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ και

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$

ii) Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της $g'(x)$ του ερωτήματος (i) η συνάρτηση g έχει ελάχιστο (ολικό) στο σημείο $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, το $g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g(x) \geq g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow -2e^{-x^2+1}(x-1) \geq e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow e^{-x^2+1}(x-1) \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

Άρα:

- Για $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}$$

- Για $x-1<0 \; \text{και} \; x>0 \Leftrightarrow 0<x<1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}$$

Γ3. i) Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ (ή αλλιώς η $g(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(x) = -4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right) = -4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right) = -4e^{-x^2+1}(x+1)\left(2x^2-4x+1\right), \; x>0$$

Επειδή $-4e^{-x^2+1}<0 \;\gamma\iota\alpha\; x>0$, το πρόσημο της $g''(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $(x+1)(2x^2-4x+1)$.

Ο πίνακας του προσήμου της $g''(x)$ είναι ο επόμενος:

$0 \qquad\qquad \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad \infty$

x			
$g''(x)$	$-$	$+$	$-$
$g(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Επομένως η συνάρτηση g:

Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left(0,\ \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$

Είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα $\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$

Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$

Τα σημεία καμπής της είναι το και το $A\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, g\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το $A\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}e^{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}\right)$

και το $B\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ g\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το $B\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}e^{-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}\right)$

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(2,\ g(2))$ είναι:

$$y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y+2e^{-3}=6e^{-3}(x-2)\Leftrightarrow y=6e^{-3}x-14e^{-3}$$

Επειδή η g είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$ θα είναι:

$$y\geq g(x)\Leftrightarrow 6e^{-3}x-14e^{-3}\geq -2e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow -3e^{-3}x+7e^{-3}\leq e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow$$
$$e^{-4}(-3x+7)\leq e^{-x^2}(x-1)$$

, για κάθε $x\in\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$.

Επίσης, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B(1,\ g(1))$ είναι:

$$y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-2(x-1)$$

Επειδή η g είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα

$\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right)\subset\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ θα είναι:

$y\le g(x)\Leftrightarrow -2(x-1)\le -2e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow x-1\ge e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow 1\le e^{-x^2+1}\Leftrightarrow e^{-x^2}\ge e^{-1}$, για κάθε $x<1$, αφού $x-1<0$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R},\ \mathrm{A}=(0,+\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A)=\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι:

$$f^{-1}(x)=e^x\left(x^2-2x+3\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x=1$.

Δ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x,f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x),x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $x\in\mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

ΛΥΣΗ

Δ1. Αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$, το 1^{o} μέλος της δοθείσας σχέσης είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) , όπως προφανώς παραγωγίσιμη είναι η συνάρτηση του $2^{ου}$ μέλους. Παραγωγίζοντας[1] λοιπόν τα μέλη της δοθείσας σχέσης έχουμε διαδοχικά (όχι ισοδύναμα):

$$e^{f(x)}(f^2(x)-2f(x)+3)=x$$
$$e^{f(x)}f'(x)[f^2(x)-2f(x)+3]+e^{f(x)}[2f(x)f'(x)-2f'(x)]=1$$
$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x)-2f(x)f'(x)+3f'(x)+2f(x)f'(x)-2f'(x)]=1$$
$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x)+f'(x)]=1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)(f^2(x)+1)=1$$
$$f'(x)=\frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1}>0, x\in(0,\infty) \Rightarrow H\ f\ \text{είναι γνησίως αύξουσα στο } (0,\infty) \text{ άρα και "1−1" και άρα αντιστρέψιμη}$$

Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης θέτουμε: $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ με $x\in A=(0,\infty)$ και $y\in f(A)=\mathbb{R}$.

Άρα, θα έχουμε από την δοθείσα σχέση: $e^{y}(y^2-2y+3)=f^{-1}(y), y\in\mathbb{R}$ ή $f^{-1}(x)=e^{x}(x^2-2x+3),\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Η συνάρτηση $f^{-1}(x)=e^{x}(x^2-2x+3),\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $\left(f^{-1}(x)\right)'=e^{x}(x^2-2x+3)+e^{x}(2x-2)=e^{x}(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$

Η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\left(f^{-1}(x)\right)''=e^{x}(x^2+1)+2xe^{x}=e^{x}(x+1)^2,\ x\in\mathbb{R},$$

δηλαδή $\left(f^{-1}(x)\right)''>0,\ x\in\mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η $f^{-1}(x)$ είνα κυρτή στο $\mathbb{R}$ (στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ τέμνει τον άξονα x΄x όταν $x=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=3$ δηλαδή στο σημείο $A(0,3)$. Αν θέσουμε $g(x)=f^{-1}(x),\ x\in\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Α είναι :

$$y-3=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x+3\ .(g'(0)=(f^{-1})'(0)=3)$$

[1] Μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς την παραγωγισιμότητα της f με ιδιότητες της ισότητας.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1\left|f^{-1}(x)-(x+3)\right|dx=\int_0^1[e^x(x^2-2x+3)-x-3]dx=\int_0^1 x^2e^xdx-2\int_0^1 xe^xdx+3\int_0^1 e^x-[\frac{x^2}{2}]_0^1-3[x]_0^1=4e-\frac{21}{2}\tau.\mu.$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f^{-1} είναι κυρτή δηλαδή ότι $f^{-1}(x)\geq x+3,\ x\in\mathbb{R}$).

Δ3. i)[2] Έχουμε:

$$f'(x)=\frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1},\ x\in(0,\infty)\ \text{και}\ \left(f^{-1}(x)\right)'=e^x(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα :

$$f'(f^{-1}(x)=\frac{e^{-f(f^{-1}(x))}}{[f(f^{-1}(x))]^2+1}=\frac{e^{-x}}{x^2+1}$$

$$f'(f^{-1}(x))\cdot[f^{-1}(x)]'=\frac{e^{-x}}{x^2+1}\cdot e^x(x^2+1)=1$$

ii) Η απόσταση των σημείων Α και Β είναι :

$$(AB)^2=2(x-f^{-1}(x))^2,\ x\in\mathbb{R}$$
$$(AB)=\sqrt{2}\left|x-f^{-1}(x)\right|,\ x\in\mathbb{R}$$
$$(AB)=\sqrt{2}(f^{-1}(x)-x),\ x\in\mathbb{R}$$

(Χρησιμοποιήσαμε $f^{-1}(x)\geq x+3>x,\ x\in\mathbb{R}\Rightarrow f^{-1}(x)-x>0$).

Αν θέσουμε : $h(x)=\sqrt{2}(f^{-1}(x)-x)=\sqrt{2}[e^x(x^2-2x+3)-x],x\in\mathbb{R}$ θα έχουμε ότι η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων) με $h'(x)=\sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1],x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε: $h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ μοναδικό, διότι η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x(x^2+1)-1,x\in\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1» αφού η $\varphi'(x)=e^x(x+1)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και άρα γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τώρα έχουμε:

- $x<0\Rightarrow\varphi(x)<\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)<0\Rightarrow e^x(x^2+1)-1<0\Rightarrow\sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1]<0\Rightarrow$ $\eta\ h(x)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma$ φθίνουσα $\sigma\tau o\ (-\infty,0]$
- $x>0\Rightarrow\varphi(x)>\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)>0\Rightarrow e^x(x^2+1)-1>0\Rightarrow\sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1]>0\Rightarrow$ $\eta\ h(x)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma$ αύξουσα $\sigma\tau o\ [0,\infty)$

---

[2] Αυτό το συμπέρασμα ισχύει και γενικότερα αφού : $f(f^{-1}(x))=x,x\in D_{f^{-1}}$ και παραγωγίζοντας τα μέλη της έχουμε $f'(f^{-1}(x))\cdot[f^{-1}(x)]'=1$. Επίσης τα σημεία $A(x,f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x),x)$ είναι συμμετρικά ως προς την $y=x$.

και άρα η συνάρτηση $h(x)$ (μπορεί να φανεί πιο καθαρά από τον πίνακα προσήμου της $h'(x)$) έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $h(0) = \sqrt{2}(f^{-1}(0)) = 3\sqrt{2}$, δηλαδή $(AB)_{\min} = 3\sqrt{2}$.

Επιμέλεια λύσεων

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών