

## ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 5

05/05/2016

### ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

---

#### ΘΕΜΑ 1°

**A1.** Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) της γραφικής παράστασης  $C_f$  μίας συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(x_0, f(x_0))$ ;

#### Απάντηση

Έστω  $f$  μια συνάρτηση και  $A(x_0, f(x_0))$  ένα σημείο της  $C_f$ . Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

και είναι ένας πραγματικός αριθμός  $\lambda$ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A$ , την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το  $A$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι:

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0), \quad \lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

#### Απάντηση

Δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού  $A$  **και**
- για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = g(x)$ .

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες γράφουμε  $f = g$ .

**A3.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^v$ ,  $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ότι ισχύει:

$$f'(x) = vx^{v-1}, \quad \text{δηλαδή } (x^v)' = vx^{v-1}.$$

#### Απόδειξη

Αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $\mathbb{R}$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}.$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1}.$$

Δηλαδή:  $(x^v)' = vx^{v-1}$

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

**Σωστό** (πρόταση του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 178)

**β.** Αν  $f(x) = \int_2^4 \sqrt{2+t^2} dt$ , τότε  $f'(3) = 0$ .

**Σωστό** (η παράγωγος της  $f$  είναι παντού 0 αφού η  $f$  είναι σταθερή συνάρτηση, ως ορισμένο ολοκλήρωμα).

**γ.** Μια συνάρτηση  $f$  είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον  $x'x$ ) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**Λάθος** (όχι σε ένα τουλάχιστον σημείο αλλά σε ένα ακριβώς σημείο).

**δ.** Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα τότε υποχρεωτικά  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Λάθος** (δεν ισχύει υποχρεωτικά, αφού π.χ. η συνάρτηση  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  ενώ  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ , δηλαδή μπορεί και να μηδενίζεται σε κάποια σημεία).

**ε.** Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  έχει στο  $+\infty$  οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .

**Σωστό**<sup>1</sup> (Αν έχει οριζόντια ασύμπτωτη την  $y = a$  θα είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ . Τότε όμως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ οπότε ασύμπτωτη είναι πάλι η } y = a).$$

<sup>1</sup> Εδώ προφανώς εννοεί «πλάγια ασύμπτωτη» ευθεία της μορφής  $y = ax + \beta$  με  $a \neq 0$ , όπως ορίζεται στο σχολικό βιβλίο στη σείδα 280.

**ΘΕΜΑ 2°**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(2) = 5.$$

**B1.** Να βρείτε το  $f(5)$ .

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

**B3.** Να βρείτε το  $f^{-1}(2)$ .

**B4.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1\right) = 2.$$

**ΛΥΣΗ**

**B1.** Η σχέση  $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$  ισχύει για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , οπότε για  $x = 2$  έχουμε:

$$f(f(2)) + 2f(2) = 2 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow f(5) + 10 = 5 \Leftrightarrow f(5) = -5$$

**B2.** Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ , τότε έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \text{ (επειδή η } f \text{ είναι συνάρτηση) και}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2)$$

άρα:

$$f(f(x_1)) + 2f(x_1) = f(f(x_2)) + 2f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

οπότε η  $f$  είναι 1-1, και άρα αντιστρέφεται.

**B3.** Θέτουμε όπου  $x$  το  $f^{-1}(2)$  και έχουμε:

$$f(f(f^{-1}(2))) + 2f(f^{-1}(2)) = 2f^{-1}(2) + 1 \Rightarrow f(2) + 4 = 2f^{-1}(2) + 1 \Rightarrow$$

$$5 + 4 - 1 = 2f^{-1}(2) \Rightarrow f^{-1}(2) = 4.$$

**B4.** Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2 &\Leftrightarrow f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1 = f^{-1}(2) \Leftrightarrow \\ f^{-1}(2x^2 + 7x) = 5 &\Leftrightarrow 2x^2 + 7x = f(5) \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow \\ x_1 = -1 \quad \eta \quad x_2 = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με  $g$  παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$ , για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x+a) - x + 1 \text{ με } a, x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g'(x) \ln x = \frac{2g(x)}{x}, \text{ για κάθε } x > 1$$

**Γ1.** Αν  $f(x) - 1 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $a=1$ .

**Γ2.** Αν  $g(e) = -1$ , να δείξετε ότι  $g(x) = -\ln^2 x$ , για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

**Γ3.** Αν  $g(x) = -(\ln x)^2$  σε όλο το διάστημα  $(0, +\infty)$

**i)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή  $x_0 \in (0, 1)$  για την οποία η διαφορά  $f(x) - g(x)$  γίνεται ελάχιστη.

**ii)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων  $M, N$  με  $M(\xi, f(\xi))$  σημείο της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  και  $N(\xi, g(\xi))$  σημείο της γραφικής παράστασης  $C_g$  της  $g$  με  $\xi \in (0, +\infty)$ , στα οποία οι  $C_f$  και  $C_g$  δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα.

**Γ4. i)** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right]$

**ii)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  των  $f$  και  $g$  αντίστοιχα και των ευθειών  $x=1, x=e$ .

## ΛΥΣΗ

**Γ1.** Έχουμε:

$$f(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο  $x_1 = 0$ , το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του  $\mathbb{R}$ .

Επιπλέον, η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = 2x + a - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

**Γ2.** Για κάθε  $x \in (1, +\infty)$  έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} g'(x) \ln x = \frac{2g(x)}{x} &\Rightarrow g'(x) \ln x - \frac{2g(x)}{x} = 0 \Rightarrow g'(x) \ln^2 x - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} g(x) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow g'(x) \ln^2 x - (\ln^2 x)' g(x) = 0 \Rightarrow \frac{g'(x) \ln^2 x - (\ln^2 x)' g(x)}{\ln^4 x} = 0 \Rightarrow \left( \frac{g(x)}{\ln^2 x} \right)' = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύει  $\frac{g(x)}{\ln^2 x} = c$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .

Για  $x = e$  είναι:

$$x = e \Rightarrow \frac{g(e)}{\ln^2 e} = c \Rightarrow c = -1$$

Επομένως:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = -1 \Leftrightarrow g(x) = -\ln^2 x, x \in (1, +\infty)$$

**Γ3. i)** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 1 + \ln^2 x, x \in (0, +\infty), \text{ η οποία είναι συνεχής στο } (0, +\infty).$$

Θα βρούμε το ελάχιστο της  $K(x)$ .

Η συνάρτηση  $K(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $(0, +\infty)$ ) με:

$$K'(x) = 2x + 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = 2 \frac{x^2 + \ln x}{x}, x > 0$$

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση  $\Phi(x) = x^2 + \ln x$ ,  $x > 0$  η οποία είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$ .

(Οι ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης  $K(x)$  είναι όμοια με τις ρίζες και το πρόσημο αντίστοιχα της συνάρτησης  $\Phi(x)$ ). Η συνάρτηση  $\Phi(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  (ως

άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $(0, +\infty)$ ) με  $\Phi'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ , για κάθε

$x \in (0, +\infty)$ . Άρα η συνάρτηση  $\Phi(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ , άρα και στο διάστημα  $(0,1)$ , οπότε:

$$\Phi((0,1)) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} \Phi(x) \right) = (-\infty, 1), \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \ln x) = 1$$

Επειδή  $0 \in (-\infty, 1) = \Phi((0,1))$  υπάρχει  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο, ώστε  $\Phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow K'(x_0) = 0$ .

Έχουμε:

$$x > x_0 \Rightarrow \Phi(x) > \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) > 0 \Leftrightarrow K'(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \Rightarrow \Phi(x) < \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) < 0 \Leftrightarrow K'(x) < 0$$

Άρα η συνάρτηση  $K(x)$  είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0, x_0]$  (στο  $x_0$  είναι συνεχής) και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[x_0, +\infty)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $K$  φαίνονται στον επόμενο πίνακα μεταβολών.

x	0	$x_0$	$+\infty$
$K'(x)$		-	+
$K(x)$		↓	↑

Ολ. Ελ

Επομένως, η συνάρτηση  $K(x) = f(x) - g(x)$  παρουσιάζει **ένα μόνο** ελάχιστο (ολικό) στο  $x_0 \in (0,1)$ .

**ii)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (0, +\infty)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = g'(\xi)$ .

Η συνάρτηση  $K(x) = f(x) - g(x)$  έχει ακρότατο στο  $x_0 \in (0,1)$  και είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$  (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $(0,1)$ ) με:

$$K'(x) = f'(x) - g'(x), x \in (0,1).$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$K'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$$

Το  $x_0 = \xi$  είναι μοναδικό, ως μοναδική ρίζα της συνάρτησης  $\Phi$  του ερωτήματος (Γ3i) (αφού η  $\Phi$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0,1)$ ), άρα και μοναδική ρίζα της συνάρτησης  $K'$ .

**Γ4. i)** Έχουμε διαδοχικά:

$$I = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) - \frac{\ln^2 x}{x^2 + 1}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{\frac{(x-1)^x}{x-1}}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} - \frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2 + 1)}} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-1)^{x-1}}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} - \frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2 + 1)}} \right]$$

Θα βρούμε ξεχωριστά τα παραπάνω όρια.

Με χρήση του κανόνα του de l'Hospital για τα παραπάνω όρια έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{(x-1)\ln(x-1)} = \lim_{u \rightarrow u_0} e^u, \text{ όπου } u = (x-1)\ln(x-1)$$

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = -\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x-1} = \lim_{u \rightarrow u_0} e^u = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 \text{ (όπου } u = x-1, \text{ όταν } x \rightarrow 1 \Leftrightarrow u \rightarrow 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln^2 x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \frac{1}{x} \ln x}{3x^2 - 2x + 1} = 0$$

Επομένως:

$$I = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2 + 1)}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

**ii)** Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου  $\Omega$  είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^e |f(x) - g(x)| dx = \int_1^e |K(x)| dx = \int_1^e K(x) dx = \int_1^e (x^2 + 1 + \ln^2 x) dx =$$

$$= \int_1^e x^2 dx + \int_1^e 1 dx + \int_1^e \ln^2 x dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^e + [x]_1^e + J = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + e - 1 + J = \frac{e^3 + 3e - 4}{3} + J \text{ (V)}$$

, όπου  $J = \int_1^e \ln^2 x dx$ . Τώρα για το J έχουμε:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = e - 2 \int_1^e \ln x dx = \\
 &= e - 2 \int_1^e (x)' \cdot \ln x dx = e - 2 [x \ln x]_1^e + 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - 2e + 2 \int_1^e 1 dx = -e + 2 [x]_1^e = -e + 2e - 2 = e - 2
 \end{aligned}$$

Επομένως, από τη σχέση (V), έχουμε τελικά:

$$E(\Omega) = \frac{e^3 + 3e - 4}{3} + J = \frac{e^3 + 3e - 4}{3} + e - 2 = \frac{e^3 + 3e - 4 + 3e - 6}{3} = \frac{e^3 + 6e - 10}{3}$$

, δηλαδή  $E(\Omega) = \frac{e^3 + 6e - 10}{3}$  τ.μ

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 f(x) + f(1-x) &= 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και} \\
 f'(x) &\neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

**Δ1.** Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 2f(1)$

**Δ3.** Έστω η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα  $x'x$ , σχηματίζει με αυτόν γωνία  $45^0$ .

**Δ4. i)** Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 f(x) dx = 0$

Δίνεται επιπλέον ότι  $\int_0^1 f'(x) dx = 1$  καθώς και ότι η συνάρτηση  $f^{-1}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

**ii)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$  και τις ευθείες  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ .

**Δ5. i)** Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x) dx, \text{ όπου } \lambda > \frac{1}{2}$$

**ii)** Να βρείτε το όριο:



$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^\lambda}$$

### ΛΥΣΗ

**Δ1.** Αφού η  $f'$  είναι συνεχής και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η  $f'$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ , δηλαδή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , αντίστοιχα.

Από την σχέση  $f(x) + f(1-x) = 0$ , για  $x = \frac{1}{2}$  έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Αρα ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  είναι η  $x = \frac{1}{2}$ , η οποία είναι μοναδική διότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1».

**Δ2.** Για τη συνάρτηση  $f$  ισχύουν:

- είναι συνεχής στο  $[0,1]$  και
- είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$

Αρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, στο διάστημα  $[0,1]$  προκύπτει ότι υπάρχει  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(x_0) = f(1) - f(0) \Leftrightarrow f'(x_0) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f'(x_0) = 2f(1)$$

(γιατί για  $x = 1$  από την σχέση  $f(x) + f(1-x) = 0$  έχουμε  $f(1) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = -f(1)$ ).

**2<sup>ος</sup> τρόπος:** Αποδεικνύεται και με την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle για την συνάρτηση  $K(x) = f(x) - 2f(1)x$ ,  $x \in [0,1]$ , αφού στο διάστημα  $[0,1]$  πληρούνται οι προϋποθέσεις του.

**Δ3.** Για το σημείο  $A(x_1, g(x_1))$  στο οποίο η  $g$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  έχουμε:

$$g(x_1) = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}, \text{ αφού η } f \text{ είναι συνάρτηση «1-1»}$$

$$\text{Αρα } A\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Για να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_g$  της συνάρτησης  $g$ , στο σημείο  $A\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$  πρέπει να αποδείξουμε

ότι η  $g$  είναι παραγωγίσιμη<sup>2</sup> στο  $x_0 = \frac{1}{2}$  με  $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ . Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - 0}{f'(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{f'(x)} \frac{f(x) - f(0)}{x - \frac{1}{2}} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{f'(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(0)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Αφού:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} \left( f' \text{ συνεχής στο } \frac{1}{2} \right) \text{ και } f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(0)}{x - \frac{1}{2}}, \text{ δηλαδή } g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Επομένως,  $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$

**Δ4 i)** Έχουμε ότι:

$$f(x) + f(1-x) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 = 0 \quad (1), \text{ όπου } I_1 = \int_0^1 f(x) dx \text{ και}$$

$I_2 = \int_0^1 f(1-x) dx$ . Για το ολοκλήρωμα  $I_2$  έχουμε:

$$1-x = u \Leftrightarrow x = 1-u$$

Θέτουμε:  $dx = -du$ , , οπότε έχουμε:  
 $x = 1 \Leftrightarrow u = 0$   
 $x = 0 \Leftrightarrow u = 1$

$$I_2 = \int_0^1 f(1-x) dx = -\int_1^0 f(u) du = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx = I_1$$

Επομένως, από τη σχέση (1), έχουμε:

$$I_1 + I_2 = 0 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow I_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 0$$

**ii)** Είναι  $\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = 1$  (I)

από την σχέση  $f(x) + f(1-x) = 0$ , για  $x = 1$  έχουμε  $f(0) + f(1) = 0$  (II)

Από τις σχέσεις (I) και (II), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε  $f(0) = -\frac{1}{2}$  και  $f(1) = \frac{1}{2}$ .

<sup>2</sup> Η παραγωγή της συνάρτησης  $g$  γενικά από τον τύπο της δεν είναι δυνατή, αφού αυτό απαιτεί η  $f$  να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, το οποίο όμως δεν είναι δεδομένο αλλά ούτε προκύπτει ως συνέπεια των δεδομένων.

Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  είναι  $E(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f^{-1}(x)| dx$ .

Θέτουμε:

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$

$$dx = f'(u) du$$

$$x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0 \quad (\text{αφού η } f \text{ είναι «1-1»})$$

$$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$E(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f^{-1}(x)| dx = \int_0^1 |u| \cdot f'(u) du = \int_0^1 u f'(u) du = [u f(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) du = f(1) - 0 = \frac{1}{2},$$

δηλαδή  $E(\Omega) = \frac{1}{2}$  τ.μ.

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$

$$dx = f'(u) du$$

**Α5. i)** Θέτουμε ξανά:  $x = 0 \Leftrightarrow u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$  (αφού  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ )

$$x = f(\lambda) \Leftrightarrow u = f^{-1}(f(\lambda)) \Leftrightarrow u = \lambda$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} u f'(u) du = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx + [u f(u)]_{\frac{1}{2}}^{\lambda} - \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(u) du = \\ &= \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f(\lambda) \end{aligned}$$

**ii)** Με επαναλαμβανόμενη χρήση του κανόνα του de l' Hospital έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda f(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \cdot \ln \lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln \lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda}} = 0$$

**Επεξεργασία λύσεων: [www.mathp.gr](http://www.mathp.gr)**

**Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος**