Λύσεις θεμάτων πανελληνίων εξετάσεων

Στο μάθημα: « Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης»
ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΓΕ.Λ.

Δ΄Λυκείου Κατεύθυνσης
Δευτέρα, 27 Μαΐου 2013

Θέμα Α:

Α1. Θεωρία, σελ.194 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη του θεωρήματος των ενδιαμέσων τιμών)

Α2. Θεωρία, σελ. 246 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α3. Θεωρία, σελ. 222 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α4.
α) Λ , β) Σ , γ) Σ , δ) Λ , ε) Σ

Θέμα Β:

Β1. ‘Εχουμε από την δοθείσα σχέση ότι: $|z-2|^2+|z-2|=2$ (1). Θέτουμε $k=|z-2|\,(k\geq 0)$ και άρα η (1) γίνεται: $k^2+k-2=0$ που έχει ρίζες τις $\begin{matrix} k=-2 \text{ (απορρίπτεται)} \\ k=1 \text{ (Δεκτή)} \end{matrix}$.Έτσι $|z-2|=1$ που είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και $\rho=1$.
Τώρα έχουμε:

$$|z-2|\leq|z|+2=1+2=3$$
$$|z-2|\leq 3$$

Β2. Αφού οι z_1 και z_2 είναι ρίζες της $w^2+\beta w+\gamma=0$ θα είναι $z_1=\overline{z}_2$ και αφού ανήκουν στον Γ.Τ. του ερωτήματος Β1 θα είναι $|z_1-2|=|z_2-2|=1$ (Ι).Άρα

$z_1 = x + yi$
$z_2 = x - yi$
$x, y \in \mathbb{R}$

Ακόμα έχουμε διαδοχικά: $\left|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|2y\right| = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$ και άρα $\begin{matrix} z_1 = x + i \\ z_2 = x - i \end{matrix}$ και

έτσι από την (Ι) έχουμε: $\left|(x-2)+i\right| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.Άρα $\begin{matrix} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{matrix}$ και θα είναι

αφού αποτελούν ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$

$(2+\iota)^2 + \beta(2+i) + \gamma = 0 \Leftrightarrow (3 + 2\beta + \gamma) + (\beta + 4)i = 0 \Leftrightarrow \beta = -4, \gamma = 5$

Β3.Έχουμε: $u = (\frac{z_1 + i}{z_2 - i})^{2013} = [\frac{2(1+i)}{2(1-i)}]^{2013} = [\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}]^{2013} = (\frac{2i}{2})^{2013} = i^{2013} = i$

Άρα οι εικόνες των κορυφών του τριγώνου είναι :

$A(z_1) = (2,1)$
$B(z_2) = (-2,1)$
$\Gamma(u) = (0,1)$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο αφού $(B\Gamma)^2 = (A\mathrm{B})^2 + (\mathrm{A}\Gamma)^2 = 8$ και άρα το εμβαδόν του είναι:

$(AB\Gamma) = 2$ τ.μ.

Θέμα Γ:

Γ1.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (πράξεις παραγωγίσιμων) για $x \neq 1$ με

$f'(x) = -\frac{4}{x-1} + a, x \neq 1$

Για να είναι κάθετη η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$ στην ευθεία που δίνεται θα πρέπει:

$f'(2) = a - 4$

$f'(2)\frac{1}{3} = -1 \Leftrightarrow f'(2) = -3 \Leftrightarrow a - 4 = -3 \Leftrightarrow a = 1$

Γ2. Για α=1 η συνάρτηση γίνεται: $f(x)=\frac{4}{x-1}+x=\frac{x^2-x+4}{x-1}, x\neq 1$ με παράγωγο

$f'(x)=-\frac{4}{(x-1)^2}+1=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0, x\neq 1$ και άρα:

$x=3, x=-1$

Για χ<-1 και για χ>3 η $f'(x)>0$ και άρα η f ειναι γνησίως αύξουσα στα διάστηματα

$(-\infty,-1]$

$[3,\infty)$

ενώ

Για -1<χ<1 και 1<χ<3 $f'(x)<0$ άρα η f ειναι γνησίως φθίνουσα στο διάστηματα $\begin{matrix}[-1,1)\\(1,3]\end{matrix}$

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=-3$

Η f έχει ελάχιστο στο 3 το $f(3)=5$

(Μπορούμε να κατασκευάσουμε πίνακα μεταβολών της f)

Γ3. Για τις ασύμπτωτες της f :

Επειδή:

$\begin{matrix}\lim_{x\to 1^+} f(x)=\infty\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\end{matrix}$ η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=1$ (προκύπτει από τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης)

Για τις πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lambda_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+4}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$b_1=\lim_{x\to\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+4}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x-1}=0$$

Άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Ομοίως :

$$\lambda_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+4}{x(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$b_2=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x-1}=0$$

Άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Γ4.

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)f(x)-6}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{3}{2}$$

Θέμα Δ:

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$f'(x) = 2x + \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 + x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} > 0, x \in \mathbb{R}$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Δ2.Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως άυξουσα στο R θα είναι και συνάρτηση «1-1» και άρα θα έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x^3 - x + 1) = f(2)$$
$$x^3 - x + 1 = 2$$
$$x^3 - x - 1 = 0$$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $h(x) = x^3 - x - 1, x \in [1,3]$ έχουμε ότι:

- Η h είναι συνεχής στο $[1,3]$(ως πολυωνυμική)
- $h(1) = -1 < 0$
 $h(3) = 23 > 0$

Και άρα από **το Θεώρημα του Bolzano** θα υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο, ώστε $h(x_o) = 0$ (δηλαδή έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα$(1,3)$).

Δ3. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R θα είναι παραγωγίσιμη και σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά (άρα και συνεχής σε αυτά). Σε κάθε ένα από τα δοθέντα διαστήματα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Αρα υπάρχουν αντίστοιχα : $\xi_1 \in (1,2)$, $\xi_2 \in (2,3)$, $\xi \in (1,3)$

τέτοια , ώστε:

$$\xi_1 \in (1,2)$$
$$f'(\xi_1) = f(2) - f \quad (1)$$
$$\xi_2 \in (2,3)$$
$$f'(\xi_2) = f(3) - f \quad (2) \quad \cdot$$
$$\xi \in (1,3)$$
$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{2} \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και λαμβάνοντας υπόψη την (3) θα έχουμε :

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(3) - f(2) = 2f'(\xi)$$