ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ – ΑΥΤΟΤΕΛΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
& ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1,x_2,...,x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ,ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, $i=1,2,...,\kappa$;

(Μον. 3)

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i=1,2,...,\kappa$;

(Μον. 3)

γ. Να αποδείξετε ότι $f_1+f_2+...+f_\kappa=1$.

(Μον. 4)

Μονάδες 10

Α2. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s\,,\bar{x}+s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

β. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$

γ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

δ. Η διακύμανση $\left(s^2\right)$ είναι μέτρο διασποράς.

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί: $14, 12, 18, 4\alpha-1, 16$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του α.

Μονάδες 7

Β2. Για $\alpha=4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση $\left(s^2\right)$.

Μονάδες 7

Β3. Για $\alpha=4$ να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Β4. Για $\alpha=4$ να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ.

Μονάδες 5

Γ2. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 10

Γ3. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $\left(-1, f'(-1)\right)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} + 2018, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Μονάδες 9

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2+4)f'(x) - 2x}{x^2}$$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΠΑ.Λ. 2018 ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1: α. σχ. Βιβλίο, σελ.65

β. σχ. Βιβλίο, σελ. 65

γ. σχ. Βιβλίο, σελ. 65

Α2: σχ. Βιβλίο σελ. 22.

Α3. α. Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1: Επειδή το πλήθος είναι 5 (περιττός), υπάρχει μία μόνο μεσαία τιμή και επειδή καμία από τις άλλες τιμές δεν είναι 15, αυτή θα είναι αναγκαστικά η $4a-1$. Έχουμε, δηλ. $4a-1=15 \Rightarrow 4a=16 \Rightarrow a=4$.

Β2: Για $a=4$οι αριθμοί (διατεταγμένοι) είναι 12, 14, 15, 16 και 18.

Βρίσκουμε πρώτα τη μέση τιμή $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5}=\dfrac{12+14+15+16+18}{5}=\dfrac{75}{5}=15$. Οπότε

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{x}\right)^2}{5}=\frac{(12-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(16-15)^2+(18-15)^2}{5}=$$

$$=\frac{(-3)^2+(-1)^2+0^2+1^2+3^2}{5}=\frac{9+1+0+1+9}{5}=\frac{20}{5}=4$$

Β3. Βρίσκουμε την τυπική απόκλιση $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4}=2$. Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι

$CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{2}{15}\cong 0{,}133=13{,}3\%>10\%$, άρα το δείγμα **δεν** είναι ομοιογενές.

Β4. Σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου(εφ.3, σελ.99), η νέα μέση τιμή θα είναι

$\bar{x}'=-2\bar{x}+5=-2\cdot 15+5=-25$, ενώ η νέα τυπική απόκλιση $s'=|-2|s=2s=2\cdot 2=4$. Οπότε

$$CV=\frac{4}{|-25|}=\frac{4}{25}=0{,}16.$$

<u>2ος τρόπος (χωρίς τη χρήση της εφαρμογής)</u>

Μετά τις πράξεις οι νέοι αριθμοί είναι -19, -23, -25, -27, -31. Έχουμε

$$\bar{x} = \frac{-19-23-25-27-31}{5} = \frac{-125}{5} = -25$$

$$s^2 = \frac{(-19+25)^2 + (-23+25)^2 + (-25+25)^2 + (-27+25)^2 + (-31+25)^2}{5} = \frac{36+4+0+4+36}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

$$s = \sqrt{16} = 4$$

$$CV = \frac{4}{|-25|} = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο: $f'(x) = 6x^2 - 6kx$. Για να είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο Μ παράλληλη στον $x'x$, πρέπει:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 - 6k \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 6 - 6k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Γ2. Για $k = 1$ είναι $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ και $f'(x) = 6x^2 - 6x$. Η παράγωγος της f' είναι $f''(x) = 12x - 6$. Έχουμε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ και $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$, ενώ $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο της 1ης παραγώγου για τα ακρότατα, η f' παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$.

Γ3. Βρίσκουμε τα $f'(-1) = 6(-1)^2 - 6(-1) = 6 + 6 = 12$ και $f''(-1) = 12(-1) - 6 = -18$. Η εφαπτομένη θα έχει συντ. διεύθυνσης -18, άρα η εξίσωσή της θα έχει τη μορφή $y = -18x + \beta$ και επειδή το σημείο $(-1{,}12)$ είναι σημείο της (σημείο επαφής), θα ισχύει $12 = -18(-1) + \beta \Leftrightarrow \beta = 12 - 18 = -6$. Οπότε, τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -18x - 6$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+4}\right)' + 2018' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\left(x^2+4\right)' + 0 = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

Δ2. Κατ' αρχάς $x^2 + 4 \geq 4 > 0$ για κάθε $x \in \Re$, οπότε η f ορίζεται και είναι συνεχής στο $\Re$. Επίσης $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και το πρόσημο της f', αφού $\sqrt{x^2+4} > 0$, είναι ίδιο με το πρόσημο του αριθμητή, δηλ. το x . Συνεπώς:

- στο διάστημα $(-\infty{,}0)$, η f' είναι αρνητική και η f είναι (γνησίως) φθίνουσα.
- στο διάστημα $(-\infty{,}0)$, η f' είναι θετική και η f είναι (γνησίως) αύξουσα.

- στο σημείο με $x=0$, η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο, ίσο με $f(0)=\sqrt{0^2+4}+2018=\sqrt{4}+2018=2+2018=2020$.

Δ3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)x-2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}^2-2^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4-4}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{0}{\sqrt{0^2+4}+2}=0$$

ΘΑΝΑΣΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ , ΕΠΑ.Λ. ΚΩ