ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ «Ο ΘΑΛΗΣ»

Λύσεις θεμάτων όλων των τάξεων
2006-2017

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

www.pe03.gr

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών,
Φθιώτιδας και Ευρυτανίας
www.pe03.gr

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Λύσεις Β΄ Γυμνασίου

1. Εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε

$$A=(111-144:12):11+1=(111-12):11+1=99:11+1=9+1=10$$

2. Επειδή ο 100 λήγει σε 0 και τα πολλαπλάσια του 10 λήγουν σε 0, θα πρέπει και ο αριθμός που εκφράζει τα νομίσματα των 2€ να λήγει σε 0. Άρα τα νομίσματα των 2€ θα είναι 5 ή 10 ή 15. Όμως παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να είναι 5 ή 15. Άρα θα είναι 10 . Πράγματι

$$10\cdot 2+8\cdot 10=100.$$

3. Έχουμε:

$$\frac{6}{100}\alpha=\frac{4}{100}\beta \;\; οπότε \;\alpha=\frac{2}{3}\beta$$. Έτσι έχουμε

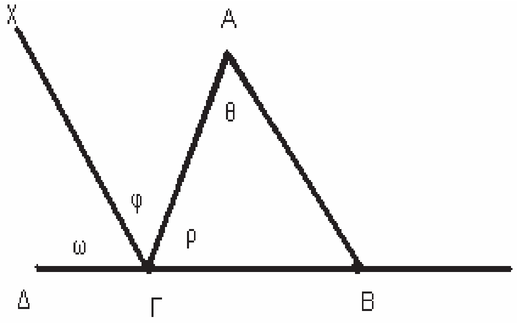
$$\kappa=\frac{9\cdot\frac{2}{3}\beta-3\beta}{6\cdot\frac{2}{3}\beta-\beta}=\frac{6\beta-3\beta}{4\beta-\beta}=\frac{3\beta}{3\beta}=1$$

4. Αφού η Γx είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$ θα ισχύει $\omega=\phi$. Επειδή Γx//ΑΒ θα ισχύει $\phi=\theta$ και αφού

ΑΒ=ΒΓ θα είναι $\theta = \rho$. Άρα $\omega = \phi = \theta = \rho$, και

$\omega + \phi + \rho = 180^0$, οπότε $\omega = \phi = \rho = 60^0$

Άρα $\hat{\text{A}} = \hat{\text{B}} = \hat{\Gamma} = 60^0$.



Λύσεις Γ΄ Γυμνασίου

1. Έχουμε

$$\Delta\hat{\Gamma}\text{E} = \text{A}\hat{\Gamma}\text{B} = 180^0 - 3x - 4x = 180^0 - 7x$$

$$\Delta\hat{\text{E}}\Gamma = \text{H}\hat{\text{E}}\text{Z} = 180^0 - 2x - 6x = 180^0 - 8x$$

Έτσι, έχουμε, στο τρίγωνο ΓΔΕ:

$\Delta\hat{\Gamma}\text{E} + \Delta\hat{\text{E}}\Gamma + \hat{\Delta} = 180^0$ οπότε

$180^0 - 7x + 180^0 - 8x + 5x = 180^0 \Leftrightarrow 10x = 180^0 \Leftrightarrow x = 18^0$.

2. $\text{A} = \alpha^2 \cdot (-2\beta)^2 \cdot (-\frac{\gamma}{2})^2 = \alpha^2 \cdot 4\beta^2 \cdot \frac{\gamma^2}{4} = \alpha^2\beta^2\gamma^2 =$

$= (\alpha\beta\gamma)^2 = 10^2 = 100.$

3. Έστω $\text{A}=27p+1$. Για p=2 έχουμε $\text{A}=27\cdot 2+1=55=5\cdot 11$, ενώ για $p\neq 2$ ο 27p είναι περιττός οπότε ο Α είναι άρτιος.

4. Αν υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί τότε

$$\left(\frac{3}{2}a\beta^{-1}+\frac{10}{3}a^{-1}\beta\right)^2=9$$, οπότε

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2+10=9$$ οπότε

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2=9-10=-1, \quad \textit{που δεν ισχύει.}$$

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Α΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω ότι α,β,γ,δ,ε είναι οι αριθμοί των μαθητών των πέντε αυτών τμημάτων. Έτσι έχουμε:

$$10(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=1090\Rightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=109 \quad (1)$$

Έστω ότι οι αριθμοί των μαθητών των τμημάτων αυτών είναι ανά δύο διαφορετικοί και έστω ότι:

$\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Επειδή $\alpha\geq 20$ και α,β,γ,δ,ε φυσικοί έχουμε:

$$\beta>\alpha\geq 20\Rightarrow\beta>20\Rightarrow\beta\geq 21$$

$$\gamma>\beta\geq 21\Rightarrow\gamma>21\Rightarrow\gamma\geq 22$$

$$\delta>\gamma\geq 22\Rightarrow\delta>22\Rightarrow\delta\geq 23$$

$$\varepsilon>\delta\geq 23\Rightarrow\varepsilon>23\Rightarrow\varepsilon\geq 24$$

Συνεπώς $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon \geq 110$, άτοπο λόγω της (1). Άρα, δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^2 x+3\lambda=\lambda^3+2\lambda x-2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x-2\lambda x=\lambda^3-3\lambda-2 \Leftrightarrow$$

$$x\left(\lambda^2-2\lambda\right)=\lambda^3-3\lambda-2$$

$$\lambda^2-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda\left(\lambda-2\right)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \;\; ή \;\; \lambda=2$$

1. Αν λ=0 είναι αδύνατη
2. Αν λ=2 είναι αόριστη
3. Αν λ≠0 και λ≠2 τότε

$$x=\frac{\lambda^3-3\lambda-2}{\lambda^2-2\lambda}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\left(\lambda-2\right)\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda\left(\lambda-2\right)} \Leftrightarrow x=\frac{\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda}$$

3. Η ανίσωση γράφεται:

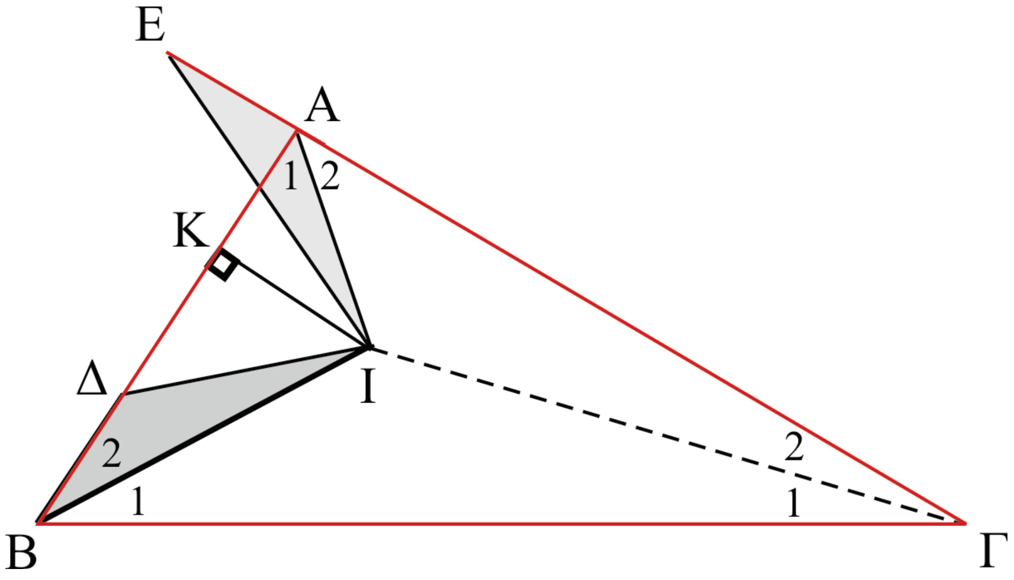
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+2\frac{\alpha}{\gamma}+2\frac{\gamma}{\beta}+2\frac{\beta}{\alpha} \geq 3\frac{\alpha}{\gamma}+3\frac{\gamma}{\beta}+3\frac{\beta}{\alpha},$$ αρκεί

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha} \geq 0,$$ αρκεί

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]\geq 0,$$

η οποία ισχύει.

4.



Αν ΓΕ=α τότε ΑΕ=α-β=ΒΔ και ΓΙ η τρίτη διχοτόμος.

Έχουμε $\overset{\triangle}{I\Gamma E}=\overset{\triangle}{I\Gamma B}$ διότι ΙΓ=ΙΓ, ΓΕ=ΓΒ και $\widehat{\Gamma}_1=\widehat{\Gamma}_2$ άρα

$\widehat{E}=\widehat{B}_1$, ΙΕ=ΙΒ.

Άρα $\overset{\triangle}{IAE}=\overset{\triangle}{IB\Delta}$ διότι ΒΔ=ΑΕ, ΙΕ=ΙΒ και $\widehat{E}=\widehat{B}_1=\widehat{B}_2$,

άρα ΙΑ=ΙΔ.

Β΄ τρόπος

Αρκεί το Ι να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Αν δηλαδή ΙΚ⊥ΑΔ, αρκεί ΚΑ=ΚΔ. Πράγματι ΚΑ=τ–α

και ΚΔ=|ΒΚ–ΒΔ|=|τ–β– (α–β)|=|τ–α|=τ–α, αφού τ>α.

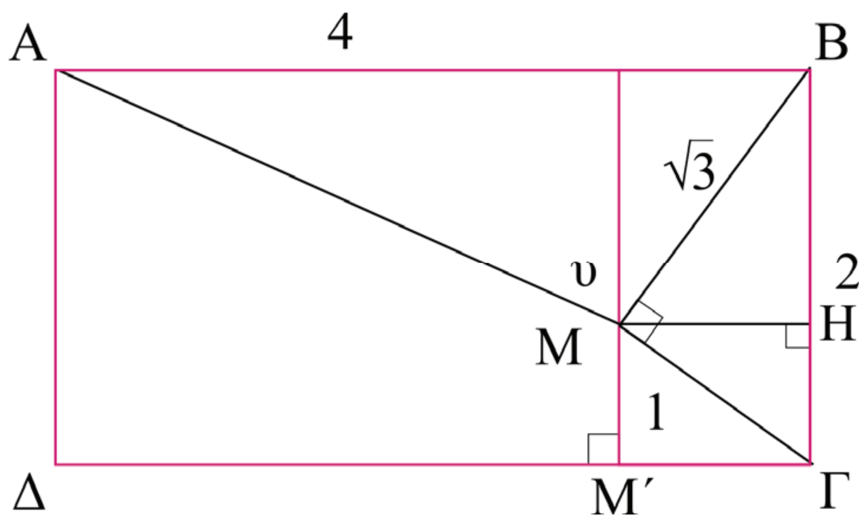
ΛΥΣΕΙΣ Β΄ τάξη Λυκείου

1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες , τότε

$x_1 + x_2 = 2006\kappa + 1 \quad (1)$ και $x_1 \cdot x_2 = 2007 \quad (2)$.

Από την (2) προκύπτει ότι οι x_1, x_2 θα είναι περιττοί. Αλλά τότε το άθροισμα τους $x_1 + x_2$ θα είναι άρτιος, οπότε δεν θα ισχύει η (1).

2.



Παρατηρούμε ότι $\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4 = 2^2$ οπότε το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο στο Μ. Επειδή

$$M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \; \acute{\varepsilon}\chi o \upsilon \mu \varepsilon \; M\hat{B}\Gamma = 30^0,$$

οπότε $M\hat{\Gamma}B = 60^0 \; \kappa\alpha\iota \; M\hat{\Gamma}\Delta = 30^0$. Έστω

$MM' \perp \Delta\Gamma$, τότε $MM' = \dfrac{1}{2}$ άρα $\upsilon = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. Το εμβαδόν του $\overset{\Delta}{MAB}$ είναι $E = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$..

<u>β΄ τρόπος</u>

$MB^2 = B\Gamma \cdot BH$ οπότε $3 = 2 \cdot \upsilon$ άρα $\upsilon = \dfrac{3}{2}$

3. Είναι

$$\kappa = (2+2^2+2^3+2^4)+2^4(2+2^2+2^3+2^4)+...+2^{2004}(2+2^2+2^3+2^4) =$$

$$= 30(1+2^4+2^8+...+2^{2004}) = \pi o\lambda.30$$

4. α) Από τη γνωστή ανισότητα: $\dfrac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta}$ όπου α, β θετικοί με $\alpha \neq \beta$, έχουμε:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{2} > \sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{6}$$

Οπότε $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} > 2\sqrt[6]{6}$.

Αρκεί λοιπόν

$$2\sqrt[6]{6} \geq \sqrt[3]{19}, \quad \acute{\eta} \quad 2^6 \cdot 6 \geq 19^2, \quad \acute{\eta} \quad 384 \geq 361$$

που ισχύει.

β) Αν $\lambda = \dfrac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ τότε

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{19}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \text{ οπότε } \lambda^2 < 2.$$

Η εξίσωση για $x \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την
$x^2 - 2\lambda x + 2 = 0$ με $\Delta = 4(\lambda^2 - 2) < 0$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

β΄ τρόπος

$$x^2 - 2\lambda x + 2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + 2 =$$
$$= (x-\lambda)^2 + (2-\lambda^2) \geq 2 - \lambda^2 > 0$$

ΛΥΣΕΙΣ Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Για $x = 0$ έχουμε $f(f(y)) = -f(y) \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}$.
Για $y = 0$ έχουμε $f(f(x)) = x - f(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$.
Άρα

$$f(f(x)) = -f(x) \text{ και } f(f(x)) = x - f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως
$-f(x) = x - f(0)$ ή
$f(x) = f(0) - x$ (1) και $f(-x) = f(0) + x$ (2), $\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$
Οπότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) + f(-x) = 2f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι σταθερή.

2. Έστω ότι η εξίσωση έχει μια ακέραια λύση ρ. Τότε

$$3^{\rho+1}-\rho\cdot 3^{\rho}-4\rho-1=0\Rightarrow 3^{\rho}(3-\rho)=4\rho+1$$

$$\Rightarrow 3^{\rho}=\frac{4\rho+1}{3-\rho}\ (\text{αφού προφανώς } \rho\neq 3)\Rightarrow \frac{4\rho+1}{3-\rho}>0$$

$$\Rightarrow (4\rho+1)(\rho-3)<0\Rightarrow -\frac{1}{4}<\rho<3\Rightarrow \rho\in\{0,1,2\}.$$

Όπως βρίσκουμε εύκολα, οι αριθμοί ρ=0 και ρ=1 δεν είναι λύσεις της εξίσωσης. Ο αριθμός ρ=2 όμως είναι λύση της εξίσωσης. Άρα η εξίσωση έχει τη μοναδική λύση ρ=2.

3. Επειδή

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right)=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_1=|z_1+z_2|^2$$

αρκεί να δείξουμε ότι: $\dfrac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\dfrac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}\geq|z_1+z_2|^2$.

Πράγματι

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\frac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}=(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)\left(\left(\frac{|z_1|}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2+\left(\frac{|z_2|}{\eta\mu\theta}\right)^2\right)\geq\left(|z_1|+|z_2|\right)^2\geq|z_1+z_2|^2$$

4. Από την ισότητα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ έχουμε ότι τα Κ, Λ, Μ βρίσκονται στο ίδιο τόξο χορδής ΒΓ. Έστω

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=\phi\,.$$

Αν ΚΒ· ΚΓ= ΛΒ· ΛΓ= ΜΒ· ΜΓ, τότε

$$\frac{1}{2}\mathrm{KB}\cdot\mathrm{K}\Gamma\,\eta\mu\phi=\frac{1}{2}\Lambda\mathrm{B}\cdot\Lambda\Gamma\,\eta\mu\phi=\frac{1}{2}\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M}\Gamma\,\eta\mu\phi\,.$$

$$\Rightarrow(\mathrm{KB}\Gamma)=(\Lambda\mathrm{B}\Gamma)=(\mathrm{MB}\Gamma)$$

Αυτό σημαίνει ότι τα Κ, Λ, Μ θα βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στην ΒΓ, άτοπο αφού το μέγιστο πλήθος κοινών σημείων ευθείας και κύκλου είναι 2.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
68^{ου} ΘΑΛΗΣ
24 Νοεμβρίου 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $\mathrm{A} = \left(200:8+12\cdot 100\right)+\left[200:\left(8+2\right)+762\right]\cdot\left[\left(-1\right)^{13}+\left(-1\right)^{12}+\left(-1\right)^{2007}\right]^2$

$= \left(25+1200\right)+\left(200:10+762\right)\cdot\left[\left(-1\right)+1+\left(-1\right)\right]^2$

$= 1225+\left(20+762\right)\cdot\left(-1\right)^2$

$= 1225+782\cdot 1 = 2007.$

2. Αν ω είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου, τότε ο ω είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6, 8 και 10. Επειδή $\text{ΕΚΠ}\left[6,8,10\right]=120$, έπεται ότι $\omega\in\left\{120,240,360,480,...\right\}$ και αφού $300<\omega<400$, θα είναι $\omega=360.$

Αν x,y,z είναι ο αριθμός των μαθητών της Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης, αντίστοιχα, τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\lambda \text{ και } x+y+z=360 .$$

Άρα είναι

$$x=5\lambda, y=4\lambda, z=3\lambda$$

$$\text{και } 5\lambda+4\lambda+3\lambda=360 \Leftrightarrow 12\lambda=360 \Leftrightarrow \lambda=30.$$

Άρα είναι: $x=5\cdot 30=150,\ y=4\cdot 30=120,\ z=3\cdot 30=90.$

3. Ο έμπορος πλήρωσε για την αγορά $200\cdot 3=600$ ευρώ.

Η απώλεια του σε κιλά ήταν $200\cdot\dfrac{10}{100}=20$ κιλά, οπότε του έμειναν

$$200-20=180 \text{ κιλά.}$$

Για να έχει κέρδος 20% επί της τιμής αγοράς πρέπει να εισπράξει

$$600+600\cdot\frac{20}{100}=720 \text{ ευρώ.}$$

Άρα πρέπει να πουλήσει το κιλό $720:180=4$ ευρώ.

4. (α) Αν $x=\mathrm{B\Gamma}$, $y=\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{AE}=\upsilon$, τότε $x=2y$ και

$$\frac{\left(x+y\right)\upsilon}{2}=\mathrm{E}=\left(\mathrm{AB\Gamma\Delta}\right)\Leftrightarrow 3y\cdot\upsilon=2\mathrm{E}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=\frac{2\mathrm{E}}{3}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=200cm^2 .$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta}\right)=\frac{1}{2}y\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot 200cm^2=100cm^2 .$$

(β) $\left(\mathrm{ABK\Gamma}\right)=2\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot\upsilon=2\left(y\cdot\upsilon\right)=2\cdot 200=400cm^2.$

Διαφορετικά

Το τετράπλευρο ΑΒΚΓ έχει καθέτους διαγώνιους, οπότε έχει εμβαδόν

$$(\mathrm{AB K \Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Gamma}\cdot \mathrm{AK} = \frac{1}{2}\cdot 2y\cdot 2\upsilon = 2(y\cdot \upsilon) = 2\cdot 200 = 400cm^2.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $$\mathrm{A} = -\left[\left(-2\right)^8 : \left(-4\right)^2 + \left(-4\right)^2\right] : \left(-2\right)^4 = -\left[2^8 : 4^2 + 4^2\right] : 2^4$$
$$= -\left[2^8 : \left(2^2\right)^2 + 4^2\right] : 2^4 = -\left(2^8 : 2^4 + 4^2\right) : 2^4$$
$$= -\left(2^4 + 4^2\right) : 2^4 = -32 : 16 = -2.$$
$$\mathrm{B} = -\left(x-3\right) - 3\left(y-4\right) - \left[x\left(y-2\right) - y\left(x+3\right)\right]$$
$$= -x + 3 - 3y + 12 - \left(xy - 2x - yx - 3y\right)$$
$$= -x - 3y + 15 - xy + 2x + xy + 3y = x + 15.$$
$$\mathrm{A} > \mathrm{B} \Leftrightarrow -2 > x + 15 \Leftrightarrow -x > 17 \Leftrightarrow x < -17.$$

2. (α) $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΒΓ και ε).
Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. Όμως, από την παραλληλία των ευθειών ε και ΒΓ προκύπτει ότι $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 40^\circ$ προκύπτει ότι
$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$
Άρα έχουμε
$$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma} = 70^\circ,$$
οπότε θα είναι
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = 180^\circ - 2\cdot 70^\circ = 40^\circ$$
$$\Rightarrow \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}x = 40^\circ.$$
(β) Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ, το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΚΓ, οπότε η ΚΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΚΓ. Άρα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}.$$
Επειδή είναι $\varepsilon \parallel \mathrm{B}\Gamma$ θα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z},$$
οπότε θα είναι και
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K},$$
οπότε το τρίγωνο ΚΑΖ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΑΖ .

3. (α) Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών έπεται ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των ψηφίων των μονάδων τους. Θεωρώντας τα τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι αυτά λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9, οπότε το τελευταίο ψηφίο κάθε τετραγώνου φυσικού αριθμού ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα πρέπει $b \in \{0,1,4,5,6,9\}$ και αφού ο αριθμός είναι περιττός πρέπει $b \in \{1,5,9\}$.

Επειδή ο Α διαιρείται με το 9 πρέπει να ισχύει ότι:
$$3a + 2b = \text{πολλαπλάσιο του } 9. \qquad (1)$$

- Για $b = 1$ λαμβάνουμε $3a + 2 = \pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b = 5$ λαμβάνουμε $3a + 10 = \pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b = 9$ λαμβάνουμε $3a + 18 = \pi o\lambda.9$, οπότε προκύπτει ότι $a \in \{3, 6, 9\}$. Άρα είναι $\mathrm{A} = 33399$ ή $\mathrm{A} = 66699$ ή $\mathrm{A} = 99999$.

4. (α) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B\hat{O}\Gamma} = 2\hat{\mathrm{A}} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R = \mathrm{B\Gamma} = \alpha$. Επιπλέον $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Άρα είναι $\mathrm{A\hat{O}\Gamma} = 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$, οπότε θα έχουμε

$$E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{OAE\Gamma}\right) = \pi\alpha^2 \cdot \frac{150^\circ}{360^\circ} = \frac{5\pi\alpha^2}{12}.$$

(β) Επειδή είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma} = 75^\circ$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΓ) και $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ - \mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 90^\circ - \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 75^\circ$, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(γ) Επειδή είναι $\mathrm{OA} \perp \mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{A\Delta} \parallel \mathrm{B\Gamma}$ θα είναι και $\mathrm{OA} \perp \mathrm{B\Gamma}$, οπότε η ΟΑ περνάει από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το τρίγωνο ΟΜΓ έχουμε

$$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 - \mathrm{M\Gamma}^2 \Leftrightarrow \mathrm{OM}^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \mathrm{OM}^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \mathrm{OM} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι $\mathrm{AM} = \mathrm{AO} + \mathrm{OM} = \alpha\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$\left(\mathrm{AB\Gamma}\right) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\alpha^2\left(2 + \sqrt{3}\right)}{4}.$$

.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Σύμφωνα με τη συζήτηση που είχε ο Γιάννης με τη Μαρία, αν x, y είναι οι αριθμοί, τότε θα ισχύουν:

$$\left\{\begin{array}{l} xy=(x-50)(y+40) \\ xy=(x+100)(y-20) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 40x-50y=2000 \\ -20x+100y=2000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=100 \\ y=20 \end{array}\right\}.$$

2. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών είναι

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0,$$

οπότε έχουμε

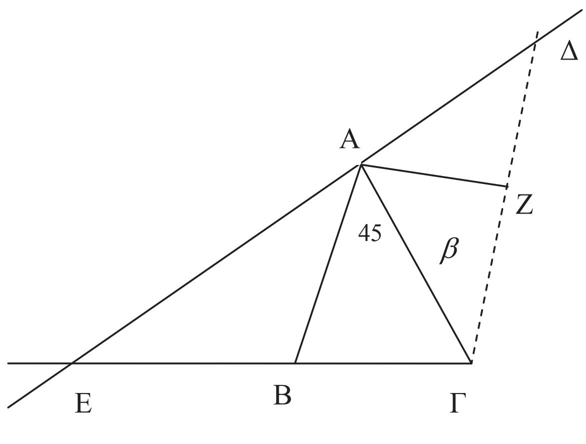
$$\mathrm{A}=\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\gamma-\alpha)(\beta^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\alpha-\beta)(\gamma^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+(\gamma-\alpha)\beta^2+(\alpha-\beta)\gamma^2+(\beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2+\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma))}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}==-\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}=1.$$

3.



(α) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ$. Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$, οπότε $\mathrm{AB}\parallel\Gamma\Delta$, αφού τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ = β, $\Gamma\Delta=\sqrt{\beta^2+\beta^2}=\beta\sqrt{2}$ και ύψος $\mathrm{AZ}=\frac{\Gamma\Delta}{2}=\frac{\beta\sqrt{2}}{2}$. Άρα έχει εμβαδόν

$$(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=\frac{\beta+\beta\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\beta\sqrt{2}}{2}=\frac{\beta^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}.$$

(β) Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΔΓ είναι όμοια, οπότε, αν $EA = x$, θα έχουμε:

$$\frac{x}{AB} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x}{\beta} = \frac{x+\beta}{\beta\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = x+\beta \Leftrightarrow x\left(\sqrt{2}-1\right) = \beta \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\beta}{\sqrt{2}-1} = \beta\left(\sqrt{2}+1\right).$$

4. Η δεδομένη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\underbrace{x^6 + 2x^3y^2 + y^4} + 3x^3 + 3y^2 = 40$$

$$\left(x^3 + y^2\right)^2 + 3\left(x^3 + y^2\right) + 2 = 42$$

$$\left(x^3 + y^2 + 1\right)\cdot\left(x^3 + y^2 + 2\right) = 42.$$

Οι αριθμοί όμως $x^3 + y^2 + 1$ και $x^3 + y^2 + 2$, είναι θετικοί ακέραιοι με $x^3 + y^2 + 1 < x^3 + y^2 + 2$ και γινόμενο

$$42 = 1\cdot 41 = 2\cdot 21 = 3\cdot 14 = 6\cdot 7.$$

Επομένως θα πρέπει:

$$x^3 + y^2 + 1 = 1 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 42 \quad (1)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 2 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 21 \quad (2)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 3 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 14 \quad (3)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 6 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 7 \quad (4)$$

Προφανώς οι σχέσεις $(1),(2),(3)$ είναι αδύνατες και από τη σχέση (4), έχουμε:

$$x^3 + y^2 = 5 \text{ που αληθεύει για } x = 1 \text{ και } y = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το τριώνυμο

$$\omega^2 + 3\omega - 40 = 0, \text{ όπου } \omega = x^3 + y^2,$$

η οποία, αφού $x, y > 0$ έχει τη μοναδική λύση $x^3 + y^2 = 5$, που αληθεύει μόνο για $x = 1$ και $y = 2$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισοδύναμα από την δεδομένη ισότητα, έχουμε:

$$\underbrace{x^6-2x^3+1}+\underbrace{x^4-2x^2y^2+y^4}+\underbrace{y^4-2y^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2+\left(y^2-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1=0 \text{ και } x^2-y^2=0 \text{ και } y^2-1=0\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(x=1 \text{ και } y=1\right) \text{ ή } \left(x=1 \text{ και } y=-1\right)$$

2. Για να έχει η εξίσωση διπλή λύση, πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μηδέν.

$$\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\kappa\mu=0 \Leftrightarrow \lambda^2=4\kappa\mu .$$

Στη περίπτωση αυτή η διπλή λύση είναι: $x_1=x_2=\dfrac{-\lambda}{2\kappa}$

Ο αριθμός $4\kappa\mu$ είναι άρτιος. Άρα και ο λ^2 είναι άρτιος, οπότε ο λ είναι άρτιος.
Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο λ (δεδομένου ότι είναι μονοψήφιος θετικός ακέραιος) είναι: $\lambda=2$ ή $\lambda=4$ ή $\lambda=6$ ή $\lambda=8$.

Αν $\lambda=2$ τότε: $4=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=1$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$\kappa=1 \text{ και } \mu=1.$$

Αν $\lambda=4$ τότε: $16=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=4$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa=1 \text{ και } \mu=4) \text{ ή } (\kappa=4 \text{ και } \mu=1) \text{ ή } (\kappa=2 \text{ και } \mu=2).$$

Αν $\lambda=6$ τότε: $36=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=9$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa=1 \text{ και } \mu=9) \text{ ή } (\kappa=9 \text{ και } \mu=1) \text{ ή } (\kappa=3 \text{ και } \mu=3).$$

Αν $\lambda=8$ τότε: $64=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=16$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa=2 \text{ και } \mu=8) \text{ ή } (\kappa=8 \text{ και } \mu=2) \text{ ή } (\kappa=4 \text{ και } \mu=4).$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τη διατεταγμένη τριάδα (κ,λ,μ) είναι:

$$(1,2,1),\ (1,4,4),\ (2,4,2),\ (1,6,9),\ (3,6,3),\ (2,8,8),\ (4,8,4).$$

Οι άλλες περιπτώσεις απορρίπτονται, διότι δεν δίνουν ακέραια λύση.
Οι εξισώσεις που προκύπτουν, με την αντίστοιχη διπλή λύση είναι:

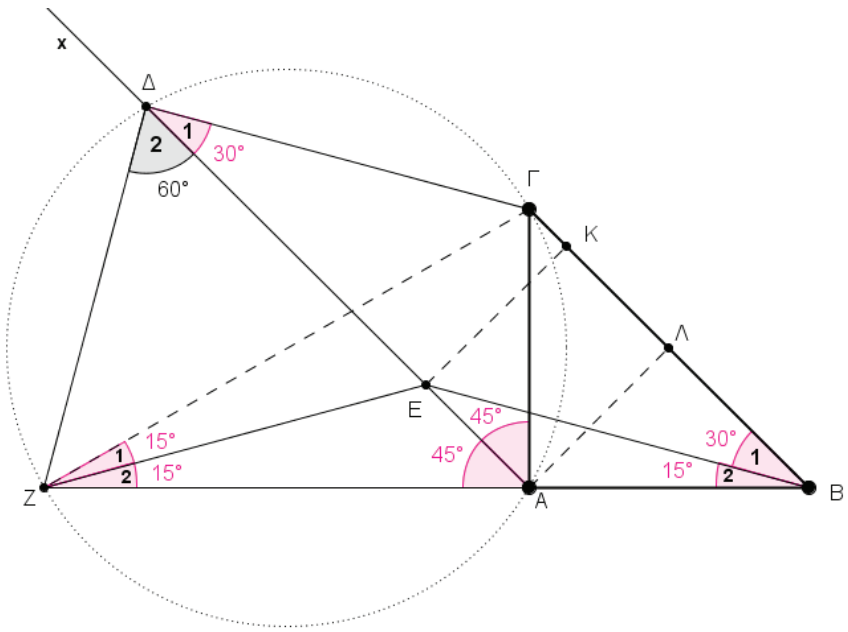
$$x^2+2x+1=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-1,$$

$$x^2+4x+4=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-2,$$

$$x^2+6x+9=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-3.$$

3. (α) Εφόσον το ΒΓΔΕ είναι ρόμβος, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\mathrm{B\Gamma}=\Gamma\Delta=\Delta\mathrm{E}=\mathrm{BE} \qquad (1)$$



Θεωρούμε $ΑΛ$ και $ΕΚ$ κάθετες στη $ΒΓ$.
Τότε $ΑΛ = ΕΚ$ (διότι $ΑΛΚΕ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).
Η $ΑΛ$ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, οπότε $ΑΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα $ΑΛ = ΕΚ = \frac{ΒΓ}{2} \overset{(1)}{=} \frac{ΒΕ}{2}$. Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΕΚ$, έχουμε:

$$ΕΚ = \frac{ΒΕ}{2} \text{ οπότε } \hat{Β}_1 = 30^o.$$

Από το ρόμβο $ΒΓΔΕ$ έχουμε $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = 30^o$ και επειδή $Γ\hat{Δ}Ζ = 90^o$ έχουμε τελικά ότι:

$$\boxed{\hat{Δ}_2 = 60^o} \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο $ΑΓΔΖ$ είναι εγγράψιμο (διότι $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$) και η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Ζ$. Άρα το $Δ$ είναι μέσο του τόξου $ΓΖ$, οπότε

$$\boxed{ΔΓ = ΔΖ \overset{(1)}{=} ΔΕ} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο.

(β) Προφανώς η $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Ζ$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $ΖΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Ζ}Α$.
Εφόσον το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο, θα ισχύει $ΕΖ = ΕΒ$ και επειδή $\hat{Β}_2 = 15^o$, θα ισχύει:

$$\hat{Ζ}_2 = 15^o \qquad (4)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΓΔΖ έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \hat{\Delta}_1 = 30^o$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{Z}}_1 = 15^o$.

4. Για $xyz \neq 0$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\frac{3xy}{z} + \frac{2yz}{x} = 70,\ \frac{7yz}{x} + \frac{4zx}{y} = 256,\ \frac{5zx}{y} + \frac{6xy}{z} = 52,$$

το οποίο, αν θέσουμε

$$\frac{xy}{z} = u,\ \frac{yz}{x} = v,\ \frac{zx}{y} = w$$

γίνεται

$$\left\{\begin{array}{ll} 3u + 2v = 70 & (1) \\ 7v + 4w = 256 & (2) \\ 5w + 6u = 52 & (3) \end{array}\right\}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε

$$9(u + v + w) = 378 \Leftrightarrow .$$

$$u + v + w = 42\ . \qquad (4)$$

Λόγω της (4) η εξίσωση (2) γίνεται

$$7v + 4(42 - u - v) = 256$$

$$\Leftrightarrow -4u + 3v = 88. \qquad (5)$$

Από τις (1) και (5) λαμβάνουμε $u = 2,\ v = 32$, οπότε από την (4) προκύπτει ότι $w = 8$. Άρα έχουμε το σύστημα

$$\frac{xy}{z} = 2,\ \frac{yz}{x} = 32,\ \frac{zx}{y} = 8 \qquad (6)$$

από το οποίο με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων έχουμε

$$xyz = 2 \cdot 8 \cdot 32\ . \qquad (7)$$

Από τις (6) και (7) λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{array}{l} 32x^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \\ 8y^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \\ 2z^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 16 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 256 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \pm 4 \\ y = \pm 8 \\ z = \pm 16 \end{array}\right\},$$

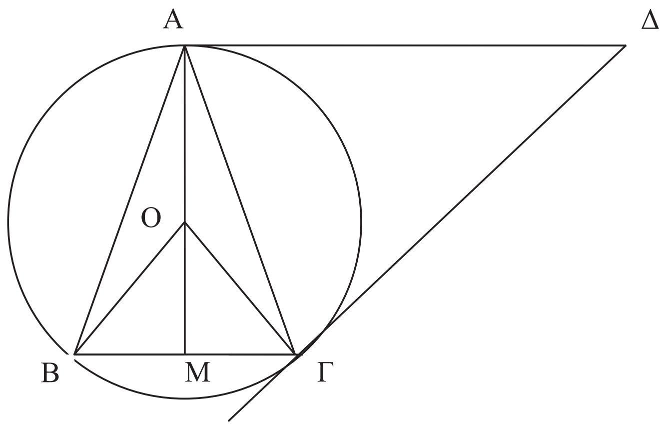
οπότε προκύπτουν συνολικά 8 τριάδες που είναι λύσεις του συστήματος:

$$(x, y, z) = (4,8,16) \text{ ή } (-4,-8,-16) \text{ ή } (4,8,-16) \text{ ή } (-4,-8,16)$$

$$\text{ή } (4,-8,-16) \text{ ή } (-4,8,16) \text{ ή } (4,-8,16) \text{ ή } (-4,8,-16).$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1.



(α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ισοσκελή ΄(ΔΑ = ΔΓ, ως εφαπτόμενες από το Δ στον περιγεγραμμένο κύκλο) και έχουν $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta$, ως εντός εναλλάξ. Άρα είναι όμοια.

(β) Παρατηρούμε ότι $B\hat{O}\Gamma = 2\hat{A} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R = B\Gamma = \alpha$.

Έστω η ΑΟ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Μ. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ και ΑΒ = ΑΓ η ΟΑ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ. Άρα είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον από το τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε $AM = \alpha\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$A\Gamma^2 = \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Επειδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια ($\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta$), θα έχουμε

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{A\Gamma^2}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \alpha\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Άρα είναι

$$\left(AB\Gamma\Delta\right) = \frac{\alpha + \alpha\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} \cdot \frac{\alpha\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{\alpha^2\left(9+5\sqrt{3}\right)}{4}$$

2. **(α)** Για να είναι το 2 κοινή ρίζα των δύο εξισώσεων πρέπει και αρκεί:

$$\begin{Bmatrix} 8\lambda - 2(\mu+4) - 2 = 0 \\ 4\mu - 4\cdot 2 - \lambda - 2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda = 2 \\ \mu = 3 \end{Bmatrix}.$$

(β) Για λ=2 και μ=3 η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2x^3 - 7x - 2}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{17}{8}.$$

Όμως έχουμε τις παραγοντοποιήσεις

$$2x^3-7x-2=(x-2)(2x^2+4x+1)$$
$$3x^2-4x-4=(x-2)(3x+2).$$

οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{2x^2+4x+1}{3x+2}=\frac{17}{8},\quad x\in\mathbb{R}-\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}.$$

$$\Leftrightarrow 16x^2-19x-26=0,\ x\in\mathbb{R}-\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-\frac{13}{16},\ x\in\mathbb{R}-\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{13}{16}.$$

3. Για $x=y=0$ από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) έχουμε:

$$f\left(f(0)-f(0)\right)=f\left(f(0)\right)-0$$

$$\Leftrightarrow f(0)=f\left(f(0)\right) \qquad (2)$$

Από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) θέτοντας όπου y το $f(x)$ έχουμε:

$$f\left(f(x)-f\left(f(x)\right)\right)=f\left(f(x)\right)-f(x) \qquad (3)$$

Αν τώρα στη (3) θέσουμε $x=0$ έχουμε:

$$f\left(f(0)-f\left(f(0)\right)\right)=f\left(f(0)\right)-f(0)$$

και σε συνδυασμό με την (2) καταλήγουμε $f\left(f(0)\right)=f(0)=0$.

Θέτοντας στην (1) όπου $x=0$, έχουμε:

$f\left(f(0)-f(y)\right)=f\left(f(0)\right)-y$ και δεδομένου ότι $f\left(f(0)\right)=f(0)=0$,

καταλήγουμε στη σχέση

$$f\left(-f(y)\right)=-y. \qquad (4)$$

Θέτοντας στην (1) όπου y το x έχουμε:

$$f\left(f(x)-f(x)\right)=f\left(f(x)\right)-x \Leftrightarrow f(0)=f\left(f(x)\right)-x \Leftrightarrow$$

$$f\left(f(x)\right)=x \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (4) όπου y το $f(x)$, έχουμε:

$$f\left(-f\left(f(x)\right)\right)=-f(x)$$

και σε συνδυασμό με την (5), καταλήγουμε στη σχέση

$$f(-x)=-f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

δηλαδή η f είναι περιττή.

4. Αν θέσουμε $x=\dfrac{a+b}{a-b}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{a}{b}=\frac{x+1}{x-1} \qquad (1)$$

(είναι $x \neq 1$, αφού $b \neq 0$). Ομοίως, αν θέσουμε $y = \dfrac{b+c}{b-c}$, $z = \dfrac{c+a}{c-a}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{b}{c} = \frac{y+1}{y-1} \qquad (2)$$

και $$\frac{c}{a} = \frac{z+1}{z-1}\ . \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{abc}{bca} = 1 \Rightarrow xy + yz + zx = -1.$$

Όμως έχουμε

$$0 \leq (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \geq 0$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2.$$

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$69^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Λύση

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 = \left(4 \cdot 25\right)^2 + 502 + \left(27 - 25\right) \cdot 249 - 10^4$$
$$= 100^2 + 502 + 2 \cdot 249 - 10000 = 10000 + 502 + 498 - 10000 = 1000$$

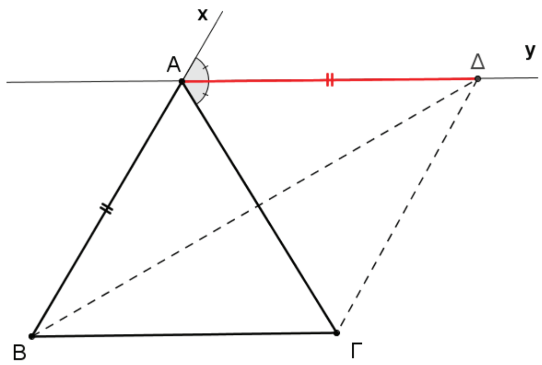
2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Ay είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$.

Δίνεται ακόμη ότι

$B\hat{A}\Gamma = 62^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή η Ay είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ θα είναι $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}x$. Όμως είναι $\Gamma\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}x = 180^0 - B\hat{A}\Gamma = 180^0 - 62^0 = 118^0$, οπότε καθεμία από τις γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}x$ είναι 59°.

Επειδή είναι $Ay \parallel B\Gamma$ έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\hat{B} = \Delta\hat{A}x = 59^0 \text{ και } \hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta = 59^0.$$

(β) Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ. έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B. \qquad (1)$$

Λόγω της παραλληλίας των ευθειών ΒΓ και Ay έχουμε ότι

$$A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma,$$

οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.

3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \alpha + 5(4+\alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 \ .$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{42}{10} < \frac{42}{\alpha} < \frac{42}{8} \Leftrightarrow 8 < \alpha < 10,$$

οπότε θα είναι $\alpha = 9$, αφού α θετικός ακέραιος. Άρα είναι:

$$A = 9 + 5(4+9) + 3(9-4) + 1919 = 9 + 5 \cdot 13 + 3 \cdot 5 + 1919 = 2008 .$$

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Λύση

Αν είναι A_1 ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στην παρέλαση, τότε ο A_1 είναι πολλαπλάσιο του 3 και επιπλέον έχουμε

$$\begin{Bmatrix} A_1 = \pi o\lambda.5 + 3 \\ A_1 = \pi o\lambda.7 + 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A_1 - 3 = \pi o\lambda.5 \\ A_1 - 3 = \pi o\lambda.7 \end{Bmatrix},$$

οπότε ο αριθμός $A_1 - 3$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7. Τότε ο αριθμός $A_1 - 3$ θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, δηλαδή θα είναι ένας από του αριθμούς

35, 70, 105, 140,...,

Επομένως ο αριθμός A_1 θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

38, 73, 108, 143,....

Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση είναι

$$100 < A < 200 \Rightarrow \frac{60}{100} \cdot 100 < \frac{60}{100} \cdot A < \frac{60}{100} \cdot 100 \Rightarrow 60 < A_1 < 120,$$

οπότε οι αποδεκτές τιμές για τον αριθμό A_1 είναι οι 73 και 108. Επειδή ο αριθμός A_1 είναι και πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι $A_1 = 108$, οπότε ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου είναι:

$$A = 108 \cdot \frac{100}{60} = 180.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα κορίτσια που συμμετείχαν στην παρέλαση ήταν $2 \cdot 108 = 216$, οπότε ο αριθμός Κ των κοριτσιών του Γυμνασίου είναι:

$$K = 216 \cdot \frac{100}{80} = 270 .$$

Άρα συνολικά το Γυμνάσιο έχει 180+270=450 μαθητές και μαθήτριες.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0},\quad \mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}$$

Αν είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, να προσδιορίσετε την τιμή του x.

Λύση

Επειδή $1-\left(-1\right)^{2009}=1-\left(-1\right)=2\neq 0$ έχουμε $\left[1-\left(-1\right)^{2009}\right]^0=1$, οπότε:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0}=\frac{3^4}{2^4}\cdot 2^4-3^4+x=x.$$

Επίσης έχουμε

$$\mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}=\frac{\left(4+1\right)^2}{5}+\frac{x}{2}=5+\frac{x}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}\Leftrightarrow x=5+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2x=10+x\Leftrightarrow x=10.$$

2. Το σημείο $\mathrm{A}(-\lambda+2,4\lambda-1)$), όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ,

(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ,

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α προς τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

Λύση

(α) Σύμφωνα με τις υποθέσεις πρέπει να συναληθεύουν οι ανισότητες:

$$-\lambda+2>0 \text{ και } 4\lambda-1>0\Leftrightarrow \lambda<2 \text{ και } \lambda>\frac{1}{4},$$

από τις οποίες, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\lambda=1$.

(β) Για $\lambda=1$ είναι $\mathrm{A}\left(1,3\right)$, οπότε

$$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$$

(γ)

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{OAB\Gamma}\right)=1\cdot 3=3$$

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

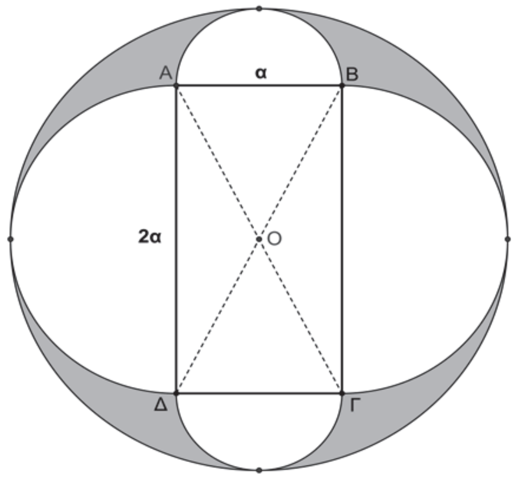
Λύση

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

4

Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $\frac{3\alpha}{2}$, τα μικρά ημικύκλια έχουν ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ και τα μεγάλα ημικύκλια έχουν ακτίνα α.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου $\pi\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 = \frac{9\pi\alpha^2}{4}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που είναι $2\alpha^2$, τα εμβαδά των δύο μικρών ημικυκλίων $2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{4}$ και τα εμβαδά των δύο μεγάλων ημικυκλίων



Σχήμα 2

$2\cdot\frac{1}{2}\pi\alpha^2 = \pi\alpha^2$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\text{E} = \frac{9\pi\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{4} - \pi\alpha^2 - 2\alpha^2 = \frac{4\pi\alpha^2 - 8\alpha^2}{4} = (\pi - 2)\alpha^2.$$

4. Αν ισχύει $\frac{45^\nu \cdot 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\text{A} = 2003\cdot(-1)^\nu - (-1)^{\nu+1} + 4\cdot(-1)^{\nu+2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{45^\nu . 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900 \Leftrightarrow \frac{45^\nu \cdot 4^\nu}{6^\nu} \Leftrightarrow \left(\frac{45\cdot 4}{6}\right)^\nu = 900 \Leftrightarrow 30^\nu = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2.$$

$$\Leftrightarrow 30^\nu = (2\cdot 3\cdot 5)^2 \Leftrightarrow 30^\nu = 30^2 \Leftrightarrow 30^{\nu-2} = 1,$$

από την οποία προκύπτει ότι $\nu - 2 = 0 \Leftrightarrow \nu = 2$, αφού για κάθε άλλη τιμή του $\nu - 2$ η τιμή της δύναμης $30^{\nu-2}$ δεν μπορεί να είναι 1.

Άρα έχουμε:

$$\text{A} = 2003\cdot(-1)^2 - (-1)^{2+1} + 4(-1)^{2+2} = 2003\cdot 1 - (-1) + 4\cdot 1 = 2003 + 1 + 4 = 2008..$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση
$$\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+1255=x \Leftrightarrow x-\frac{x}{8}-\frac{x}{4}=1255 \Leftrightarrow \frac{5x}{8}=1255 \Leftrightarrow x=\frac{1255\cdot 8}{5}=2008.$$

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε:
$$0 \le x \le y \le z,$$
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44.$$

Λύση
Η τελευταία εξίσωση γράφεται:
$$\begin{aligned} &xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44\\ \Leftrightarrow\ &xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=45\\ \Leftrightarrow\ &xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=45\\ \Leftrightarrow\ &(xy+x+y+1)(z+1)=45\\ \Leftrightarrow\ &(x+1)(y+1)(z+1)=45. \end{aligned} \qquad (1)$$
Επειδή οι x, y, z είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $x \le y \le z$, έπεται ότι:
$$1 \le x+1 \le y+1 \le z+1. \qquad (2)$$
Από τις (1) και (2) και αφού $45=1\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ προκύπτουν οι περιπτώσεις
$$(x+1, y+1, z+1)=(1,3,15) \text{ ή } (1,5,9) \text{ ή } (3,3,5) \text{ ή } (1,1,45)$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,\ 2,\ 14) \text{ ή } (0,\ 4,\ 8) \text{ ή } (2,\ 2,\ 4) \text{ ή } (0,0,44).$$

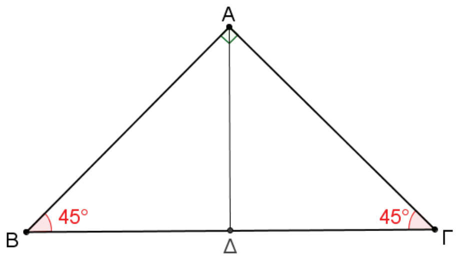
3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων που έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
"*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις)

Λύση
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$).
1η περίπτωση.
Θεωρούμε σημείο $Δ$ στη πλευρά $ΒΓ$ ώστε τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ να είναι ισοσκελή. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

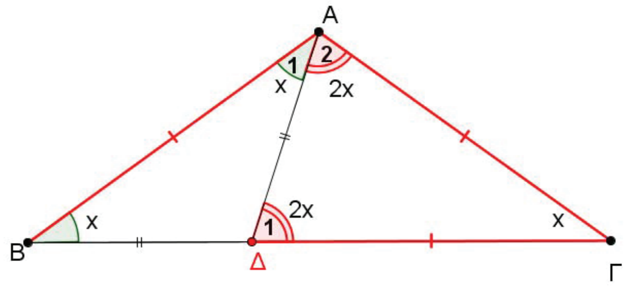
- Αν είναι $Β\hat{Α}Δ=\hat{Β}$ και $Γ\hat{Α}Δ=Γ\hat{Δ}Α$ τότε ισχύουν οι ισότητες των γωνιών (σχ. 3) : $\hat{Α}_1=\hat{Β}=\hat{Γ}=\hat{x}$ και $\hat{Α}_2=\hat{Δ}_1=2\hat{x}$, (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε από τη σχέση $\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}=180$ καταλήγουμε στην εξίσωση:
$$5\hat{x}=180^o \Leftrightarrow \hat{x}=36^o.$$
Στη περίπτωση αυτή είναι $\hat{Α}=108^o$ και $\hat{Β}=\hat{Γ}=36^o$.

- Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ με ίσες γωνίες $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ και $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}$, τότε προκύπτουν οι ίδιες γωνίες για το τρίγωνο $AB\Gamma$.

Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma\Delta$ με ίσες γωνίες $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ και $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}A$, τότε προκύπτουν οι γωνίες $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^0$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Πράγματι, από τις ισότητες $\hat{B} = B\hat{A}\Delta$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}\Gamma$ έπεται ότι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A} \Rightarrow 180^\circ - \hat{A} = \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$, οπότε θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$.



Σχήμα 3α



Σχήμα 3β

2η περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά $A\Gamma$ ώστε τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma\Delta$ να είναι ισοσκελή και διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $A\hat{B}\Delta = \hat{A}$ και $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}$, τότε (σχ. 4) ισχύουν οι ισότητες των γωνιών:

$$\hat{A} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x}$$

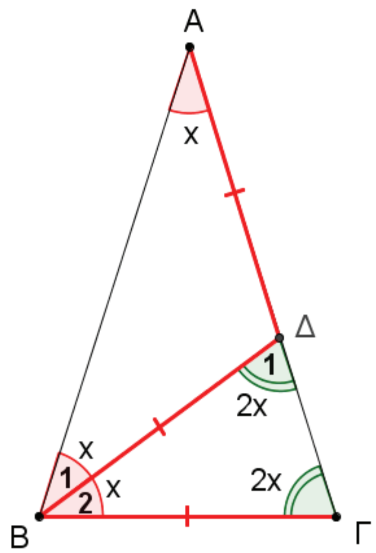
$$\text{και } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} = 2\hat{x},$$

αφού η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔAB, οπότε

$$\hat{x} + \hat{B}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 2x \Rightarrow \hat{B}_2 = x.$$

Από τη σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$5\hat{x} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 36^\circ.$$



Σχήμα 4

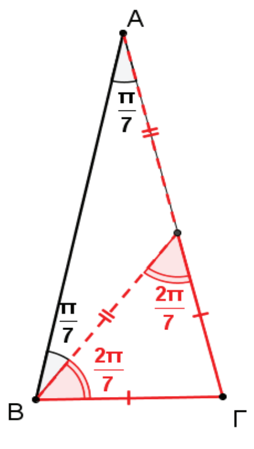
Στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\hat{A} = 36^\circ \text{ και } \hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^\circ.$$

- Αν $A\hat{B}\Delta = \hat{A} = x$ και $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{B}\Delta = y$, τότε

θα έχουμε $y = 2x$ και $3x + 2y = \pi$.οπότε λαμβάνουμε τελικά τις γωνίες

$$\hat{A} = \frac{\pi}{7},\ \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{3\pi}{7}.$$



Σχήμα 5

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $x,\ y$ και z ικανοποιούν τις ισότητες
$$x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2,$$
να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους $x,\ y,\ z$ ισούται με 0.

Λύση

(α) Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών δεδομένων ισοτήτων λαμβάνουμε:
$$x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$$
$$x + y + z = 0, \qquad (1)$$
από την οποία προκύπτει άμεσα το ερώτημα (α), αφού τότε είναι $z = -(x + y)$ και
$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 + \left[-(x+y)\right]^3 \\ &= x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy(x+y) \\ &= -3xy(-z) = 3xyz. \end{aligned}$$

(β) Από την ισότητα $x + y + z = 0$ προκύπτει ότι $z = -x - y$, οπότε η ισότητα $x^2 - y = z^2$ γίνεται
$$x^2 - y = (x+y)^2 \Leftrightarrow -y = 2xy + y^2$$
$$\Leftrightarrow y \cdot (y + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -2x - 1.$$

- Για $y = 0$ λαμβάνουμε $x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x$, οπότε η δεύτερη και η τρίτη των δεδομένων σχέσεων γίνονται:
$$x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1,$$
οπότε έχουμε τις τριάδες
$$(x, y, z) = (0,0,0) \text{ ή } (1,0,-1).$$

- Για $y = -2x - 1$ από την (1) λαμβάνουμε
$$z = -x - y = x + 1,$$
οπότε με αντικατάσταση των y, z στις αρχικές σχέσεις προκύπτει η εξίσωση
$$x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Έτσι λαμβάνουμε και τις τριάδες
$$(x, y, z) = (0,-1,1) \text{ ή } (-1,1,0).$$

Από την εύρεση όλων των δυνατών τριάδων προέκυψε ότι σε κάθε περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

$2^{ος}$ τρόπος για το (β)

Οι δεδομένες ισότητες $x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2$ με πολλαπλασιασμό επί y^2, z^2 και x^2, αντίστοιχα, γίνονται
$$\left(x^2 - z^2\right)y^2 = y^3,\ \left(y^2 - x^2\right)z^2 = z^3, \left(z^2 - y^2\right)x^2 = x^3,$$
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:
$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Λόγω του (α) λαμβάνουμε $xyz = 0$, δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από 2, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Λύση

Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 15 είναι της μορφής: $100x+15$, όπου x μη αρνητικός ακέραιος.
Άρα το άθροισμα των δεκαπέντε θετικών ακεραίων θα είναι:

$$S=(100x_1+15)+(100x_2+15)+\cdots+(100x_{15}+15)=100(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+15\cdot 15=$$
$$=25\cdot 4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+25\cdot 9=25\cdot\left[4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+9\right],$$

δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 25.

Παρατήρηση

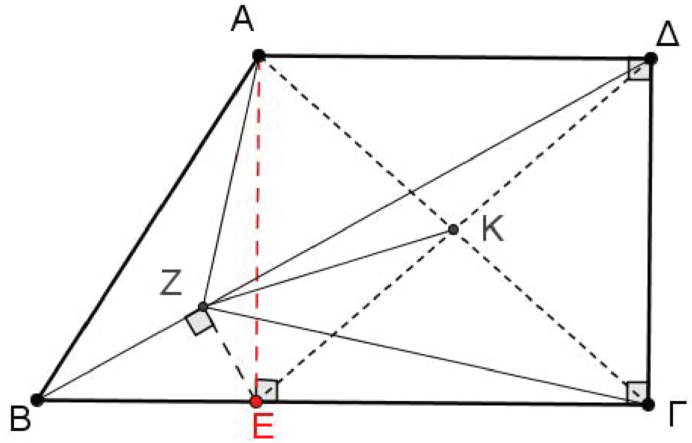
Η "κεντρική ιδέα" της άσκησης είναι ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta$", έχει τη μορφή $100x+\overline{\alpha\beta}$.
Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta\gamma$", έχει τη μορφή $1000x+\overline{\alpha\beta\gamma}$.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$. Φέρουμε το ύψος ΑΕ και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ζ}Γ$.

Λύση (1ος τρόπος)

Επειδή είναι $Α\hat{Ε}Γ=\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$ το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται, δηλαδή το σημείο Κ είναι μέσον των ΑΓ και ΕΔ και

$$ΑΓ=ΕΔ. \qquad (1)$$

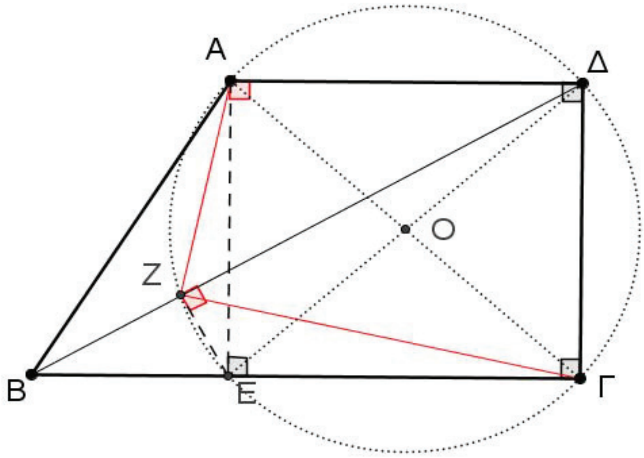


Σχήμα 6

Επειδή είναι $ΕΖ\perp ΒΔ$ το τρίγωνο ΕΖΔ είναι ορθογώνιο και η ΖΚ είναι η διάμεσος αυτού προς την υποτείνουσα. Άρα είναι

$$ΖΚ=\frac{ΕΔ}{2}. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $ZK = \frac{A\Gamma}{2}$, δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου ΑΖΓ προς την πλευρά ΑΓ ισούται με το μισό της πλευράς ΑΓ. Επομένως είναι $A\hat{Z}\Gamma = 90^\circ$.



Σχήμα 7

2^{ος} Τρόπος

Το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων του O.

Εφόσον $E\hat{Z}\Delta = E\hat{A}\Delta = 90^o$, το τετράπλευρο $EZA\Delta$ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια τα σημεία A, Δ, Γ, E, Z είναι ομοκυκλικά. Άρα $A\hat{Z}\Gamma = 90^o$ (διότι βαίνει στη διάμετρο $A\Gamma$).

3. Βρείτε τις τριάδες θετικών ακέραιων (x, y, z) με $x \ge y \ge z$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2,$$
$$x+y+z=300.$$

Λύση

Έχουμε

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2 \Leftrightarrow x^2y-x^2z+y^2z-y^2x+z^2x-z^2y=2$$
$$\Leftrightarrow (x^2y-y^2x)-(x^2z-y^2z)+(z^2x-z^2y)=2$$
$$\Leftrightarrow xy(x-y)-z(x-y)(x+y)+z^2(x-y)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[xy-z(x+y)+z^2\right]=2 \Leftrightarrow (x-y)(xy-zx-zy+z^2)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(x-z)=2.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον, από την υπόθεση $x \ge y \ge z$ έπεται ότι

$$x-y \ge 0 \text{ και } x-z \ge y-z > 0$$

και αφού

$$(x-y)+(y-z)=x-z,$$

έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$ είναι:

$$x-y=1, y-z=1, x-z=2.$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε από το προηγούμενο σύστημα λαμβάνουμε:

$$x-y=1, y-z=1 \Leftrightarrow x=y+1,\ z=y-1,$$

όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

$$(x,y,z)=(k+1,k,k-1), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Από την εξίσωση $x+y+z=300$ λαμβάνουμε:

$$(k+1)+k+(k-1)=300 \Leftrightarrow 3k=300 \Leftrightarrow k=100,$$

οπότε η ζητούμενη τριάδα είναι μόνον η

$$(x,y,z)=(101,\ 100,\ 99).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το Μ προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

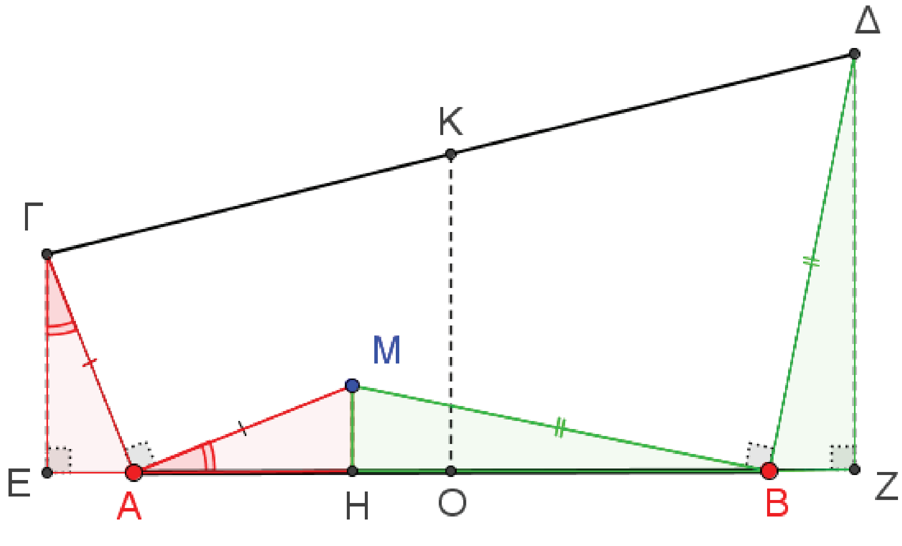
$$\text{ΑΓ} \perp \text{ΑΜ} \text{ και } \text{ΑΓ}=\text{ΑΜ}\ ,\ \text{ΒΔ} \perp \text{ΜΒ} \text{ και } \text{ΒΔ}=\text{ΜΒ},$$

και επιπλέον τα σημεία Γ, Μ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Λύση

Από τα σημεία Γ, Μ και Δ φέρουμε καθέτους ΓΕ, ΜΗ και ΔΖ προς την ευθεία ΑΒ. Τότε οι οξείες γωνίες $\text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Η}$ και $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε}$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $\text{Μ}\hat{\text{Β}}\text{Η}$ και $\text{Β}\hat{\Delta}\text{Ζ}$. Έτσι από την υπόθεση $\text{ΑΓ}=\text{ΑΜ}$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ , ΓΕΑ είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Gamma\text{Ε}=\text{ΑΗ} \qquad (1)$$
$$\text{ΕΑ}=\text{ΜΗ}. \qquad (2)$$



Σχήμα 8

Ομοίως από την υπόθεση $\text{ΒΔ}=\text{ΜΒ}$ και $\text{ΒΔ} \perp \text{ΜΒ}$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΗΒ, ΒΖΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Delta\text{Ζ}=\text{ΗΒ} \qquad (3)$$
$$\text{ΒΖ}=\text{ΜΗ}. \qquad (4)$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2}. \qquad (5)$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2} = \frac{\mathrm{AH} + \mathrm{HB}}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2}. \qquad (6)$$

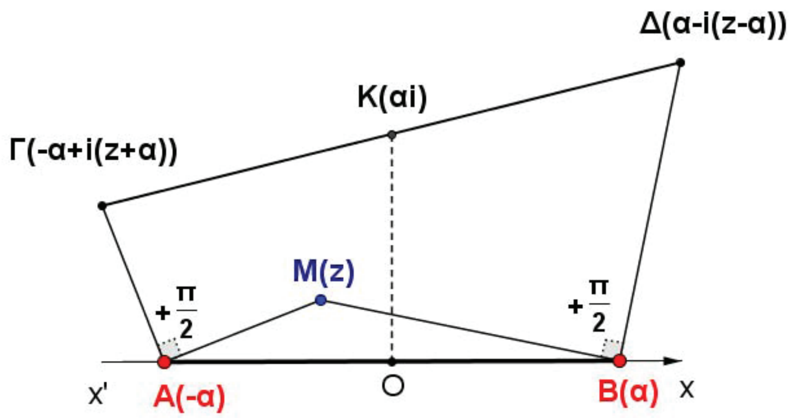
Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OE} - \mathrm{AE} = \mathrm{OZ} - \mathrm{BZ} = \mathrm{OB}. \qquad (7)$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το μισό του ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

2ος τρόπος

Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ ως άξονα των πραγματικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο και το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως την αρχή των αξόνων. Έστω ότι το σημείο Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z, το σημείο Β είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού a, οπότε το σημείο Α θα είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού $-a$. Τότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $z+a$ και επειδή είναι $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM}$, $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AM}$ έπεται ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}\right) = 90^\circ$, οπότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $i(z+a)$. Επομένως στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, άρα και στο σημείο Γ, αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $-a+i(z+a)$.



Σχήμα 9

Με το ίδιο σκεπτικό, αλλά με την παρατήρηση ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}}\right) = -90^\circ$, καταλήγουμε ότι στο σημείο Δ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $a - i(z-a)$.

Επομένως το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού

$$\frac{-a+i(z+a)+a-i(z-a)}{2} = ai,$$

οπότε το σημείο Κ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του μιγαδικού αριθμού z, άρα ανεξάρτητο από τη θέση του σημείο Μ.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα των θετικών ακέραιων κοινών διαιρετών των αριθμών α, β και των αριθμών Α και Β ταυτίζονται.

Έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών α, β. Τότε από τις σχέσεις $\delta \mid \alpha$ και $\delta \mid \beta$ λαμβάνουμε ότι ο δ διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους , οπότε

$$\delta \mid (4\alpha + 5\beta) = \mathrm{A} \text{ και } \delta \mid (3\alpha + 4\beta) = \mathrm{B} ,$$

δηλαδή ο δ είναι κοινός διαιρέτης των Α και Β.

Αντίστροφα, έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων Α και Β. Τότε από τις υποθέσεις $\delta \mid \mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta$ και $\delta \mid \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta$ έπεται ότι $\delta \mid \mathrm{A} - \mathrm{B} = \alpha + \beta$, οπότε προκύπτει ότι:

$$\delta \mid 5(\mathrm{A} - \mathrm{B}) - \mathrm{A} = \alpha \quad \text{και} \quad \delta \mid \mathrm{A} - 4(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \beta ,$$

οπότε ο δ είναι κοινός διαιρέτης και των αριθμών α και β.

Επομένως και οι αριθμοί Α και Β έχουν 120 κοινούς θετικούς ακέραιους διαιρέτες.

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Λύση

Έχουμε $\mathrm{A} = n(n - 1) + 1$ και $\mathrm{B} = n(n + 1) + 1$, οπότε και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί, αφού τα γινόμενα διαδοχικών ακέραιων $n(n - 1)$ και $n(n + 1)$ είναι άρτιοι ακέραιοι. Επιπλέον, είναι $\mathrm{B} - \mathrm{A} = 2n > 0$, οπότε $\mathrm{A} < \mathrm{B}$. Έστω $\mathrm{A} + 1, \mathrm{A} + 3, \ldots, \mathrm{A} + (2\kappa - 1)$, όπου κ θετικός ακέραιος, οι άρτιοι ακέραιοι που βρίσκονται μεταξύ των περιττών Α και Β. Τότε πρέπει

$$\mathrm{A} + (2\kappa - 1) = \mathrm{B} - 1,$$

δηλαδή

$$\mathrm{B} - \mathrm{A} = 2\kappa \Leftrightarrow 2n = 2\kappa \Leftrightarrow \kappa = n.$$

Επομένως μεταξύ των αριθμών Α και Β βρίσκονται n άρτιοι ακέραιοι, οι οποίοι είναι οι

$$\mathrm{A} + 1, \mathrm{A} + 3, \ldots, \mathrm{A} + (2n - 1),$$

ενώ το άθροισμά τους είναι

$$\Sigma = n\mathrm{A} + [1 + 3 + \ldots + (2n - 1)] = n^3 - n^2 + n + \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = n^3 + n .$$

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Λύση

Το πρώτο μέλος της δεδομένης εξίσωσης γράφεται:

$$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2$$
$$=xy(x-y)+(x-y)z^2-(x^2-y^2)z$$
$$=(x-y)\left[xy+z^2-xz-yz\right]$$
$$=(x-y)\left[x(y-z)-z(y-z)\right]$$
$$=(x-y)(y-z)(x-z).$$

Άρα η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$(x-y)(y-z)(x-z)=6.$$

Από την τελευταία μορφή προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον από την υπόθεση $x \geq y \geq z$ έπεται ότι $x-y \geq 0$ και $x-z \geq y-z > 0$, και αφού οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6, έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$, είναι:

$$x-y=1, y-z=2, x-z=3 \qquad (1)$$
$$\text{ή } x-y=2, y-z=1, x-z=3 \qquad (2)$$
$$\text{ή } x-y=1, y-z=1, x-z=6 \qquad (3)$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, η περίπτωση (3) δεν είναι αποδεκτή. Τα συστήματα (1) και (2) είναι αποδεκτά , αφού κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε:

- Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε:
  $$x-y=1,\ y-z=2 \Leftrightarrow x=y+1,\ z=y-2,$$
  όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων
  $$(x,y,z)=(k+1,k,k-2), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$
- Από το σύστημα (2) λαμβάνουμε τελικά:
  $$(x,y,z)=(k+2,k,k-1), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Στην πρώτη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+1,k,k-2), k\in\mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+1)^2+k^2+(k-2)^2=3k^2-2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2-2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(1,0,-2)$.

Στην δεύτερη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+2,k,k-1), k\in\mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+2)^2+k^2+(k-1)^2=3k^2+2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k=-\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2+2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(-1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(2,0,-1)$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των μελών των τριάδων που ικανοποιούν την δεδομένη εξίσωση είναι 5 και λαμβάνεται από τις τριάδες

$$(x,y,z)=(1,0,-2) \text{ και } (x,y,z)=(2,0,-1).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\text{ΑΓ} \perp \text{ΑΜ} \text{ και } \text{ΑΓ}=2\cdot\text{ΑΜ}, \quad \text{ΒΔ}\perp\text{ΜΒ} \text{ και } \text{ΒΔ}=2\cdot\text{ΜΒ}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

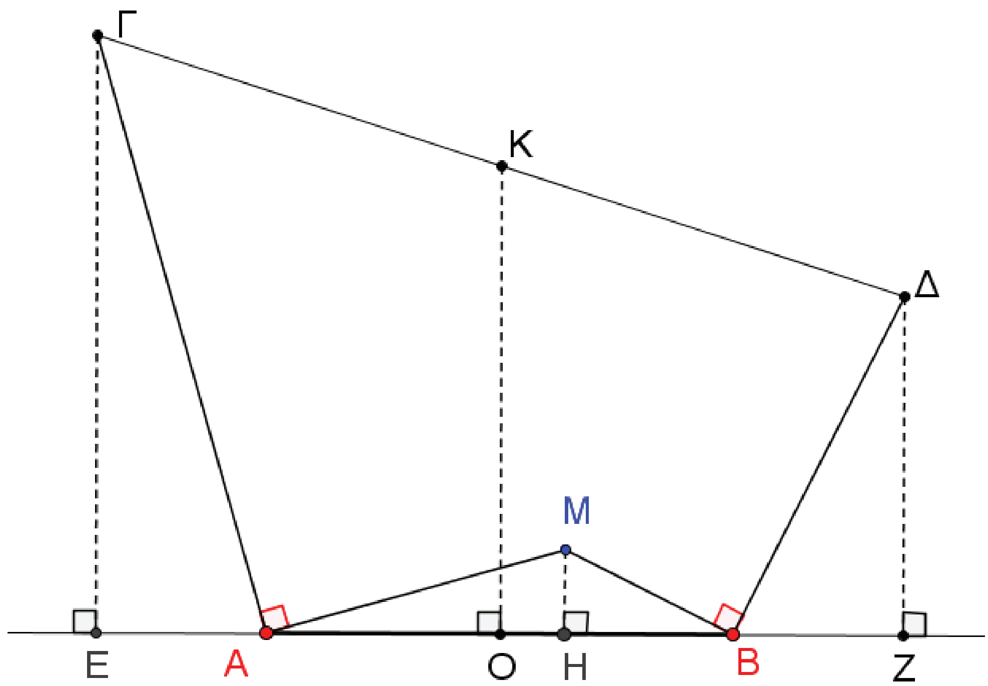
Λύση

Από τα σημεία Γ, Μ και Δ φέρουμε καθέτους ΓΕ, ΜΗ και ΔΖ προς την ευθεία ΑΒ. Τότε οι οξείες γωνίες $\text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Η}$ και $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε}$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $\text{Μ}\hat{\text{Β}}\text{Η}$ και $\text{Β}\hat{\Delta}\text{Ζ}$. Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ , ΓΕΑ είναι όμοια, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\Gamma\text{Ε}}{\text{ΑΗ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΜΗ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΜ}}=2,$$

οπότε προκύπτουν οι ισότητες:

$$\Gamma\text{Ε}=2\cdot\text{ΑΗ} \qquad (1)$$
$$\text{ΕΑ}=2\cdot\text{ΜΗ}. \qquad (2)$$



Σχήμα 10

Ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΗΒ, ΒΖΔ είναι όμοια, οπότε ομοίως θα έχουμε:

$$\Delta Z = 2 \cdot HB \qquad (3)$$

$$BZ = 2 \cdot MH\,. \qquad (4)$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2}\,. \qquad (5)$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2} = \frac{2 \cdot AH + 2 \cdot HB}{2} = \frac{2 \cdot AB}{2} = AB\,. \qquad (6)$$

Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$OA = OE - AE = OZ - BZ = OB\,. \qquad (7)$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Παρατήρηση

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με χρήση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Λύση.

Είναι

$$a = 4 - 2\frac{1}{5} = \frac{4}{1} - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1,$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a} = \frac{9}{5} : 1^{2009} - 1 - \frac{1}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{9}{5} : 1 - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{76}{45} - 1 = \frac{31}{45}.$$

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α, αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Λύση

(i) Οι δυνατές μορφές του ακέραιου αριθμού α είναι οι εξής: α = 4ρ, όπου ρ θετικός ακέραιος, ή α = 4ρ + 1 ή α = 4ρ + 2 ή α = 4ρ + 3 όπου ρ μη αρνητικός ακέραιος.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι α = 4ρ + 1, οπότε έχουμε:

$$39 < 4\rho + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\rho < 49 \Leftrightarrow 9{,}5 < \rho < 12{,}25$$

Επομένως, αφού ο ρ είναι μη αρνητικός ακέραιος, έπεται ότι ρ = 10 ή ρ = 11 ή ρ = 12 και α = 41 ή α = 45 ή α=49.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^0 και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του ΒΓ.

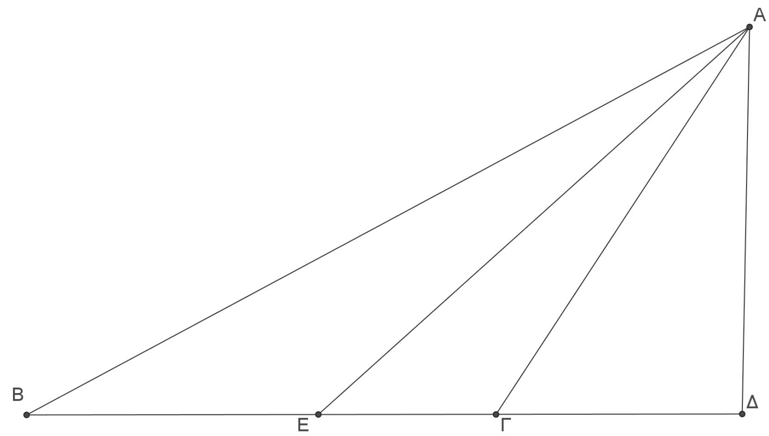
Λύση

α) Κατ' αρχή έχουμε: $\hat{\mathrm{A}} = 180^0 - \left(\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 180^0 - 140^0 = 40^0$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε: $\dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{1} = \dfrac{\hat{\Gamma}}{6}$ και $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 140^0$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\hat{\mathrm{B}}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \lambda \Rightarrow \hat{\mathrm{B}} = \lambda, \hat{\Gamma} = 6\lambda \text{ και } \lambda + 6\lambda = 140^0 \Rightarrow \lambda = 20^0.$$

Άρα είναι: $\hat{\mathrm{B}} = 20^0$ και $\hat{\Gamma} = 120^0$.



Σχήμα 1

β) Έστω ΑΔ το ύψος και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ, αφού διαφορετικά το τρίγωνο ΑΓΔ θα είχε άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180^0. Έτσι έχουμε:

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma + \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \left(90^\circ - \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A}\right) + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}. \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\hat{\mathrm{A}} = 40^0$, $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 180^0 - 120^0 = 60^0$, από τη σχέση (1) λαμβάνουμε $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 50^0$.

ΘΕΜΑ 4ο

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\dfrac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\dfrac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\dfrac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

α) Έχουμε $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{23}{40}$. Όμως στα $\frac{23}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου έχουν υπολογιστεί δύο φορές οι 12 μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ και βόλεϊ. Άρα οι 80 -12=68 μαθητές είναι τα $\frac{40}{40}-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου. Έτσι όλο το σχολείο έχει :

$$68:\frac{17}{40}=68\cdot\frac{40}{17}=4\cdot 40=160 \text{ μαθητές.}$$

β) Μόνο με το μπάσκετ ασχολούνται $160\cdot\frac{1}{5}-12=32-12=20$ μαθητές.

2^{ος} τρόπος

α) Αν x είναι ο αριθμός των μαθητών του Σχολείου, τότε , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{8}+80-12=x,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$10x+8x+5x+3200-480=40x \Leftrightarrow 17x=2720 \Leftrightarrow x=160.$$

β) $\frac{x}{5}-12=\frac{160}{5}-12=20$ μαθητές ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}.$$

Λύση

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)}{5}-7\cdot\frac{\left[(-1)^{3}\right]^{\nu}}{5}$$

$$=4\cdot(-1)^{\nu}-\frac{2}{5}-\frac{7\cdot\left(-1\right)^{\nu}}{5}=\left(4-\frac{7}{5}\right)\cdot\left(-1\right)^{\nu}-\frac{2}{5}=\frac{13\cdot\left(-1\right)^{\nu}-2}{5},$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν ν άρτιος, τότε $\mathrm{A}=\frac{13-2}{5}=\frac{11}{5}$.
- Αν ν περιττός, τότε $\mathrm{A}=-3$.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α.

Λύση

Αφού ο α διαιρούμενος με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2, θα είναι της μορφής $\alpha = 5\lambda + 2$, όπου λ μη αρνητικός ακέραιος. Όμως, αν ο λ ήταν άρτιος, τότε ο α επίσης θα ήταν άρτιος, που αντίκειται στην υπόθεση. Άρα ο λ είναι περιττός, δηλαδή είναι $\lambda = 2\kappa + 1,$ όπου κ μη αρνητικός ακέραιος.

Επομένως, έχουμε

$$\alpha = 5 \cdot \left(2\kappa + 1\right) + 2 = 10\kappa + 7,$$

σχέση που δείχνει ότι ο θετικός ακέραιος α διαιρούμενος με το 10 αφήνει υπόλοιπο 7, δηλαδή με άλλα λόγια, το τελευταίο ψηφίο του α είναι 7. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο α έχει κ δεκάδες και 7 μονάδες, οπότε το τελευταίο του ψηφίο είναι 7.

ΘΕΜΑ 3^{o}

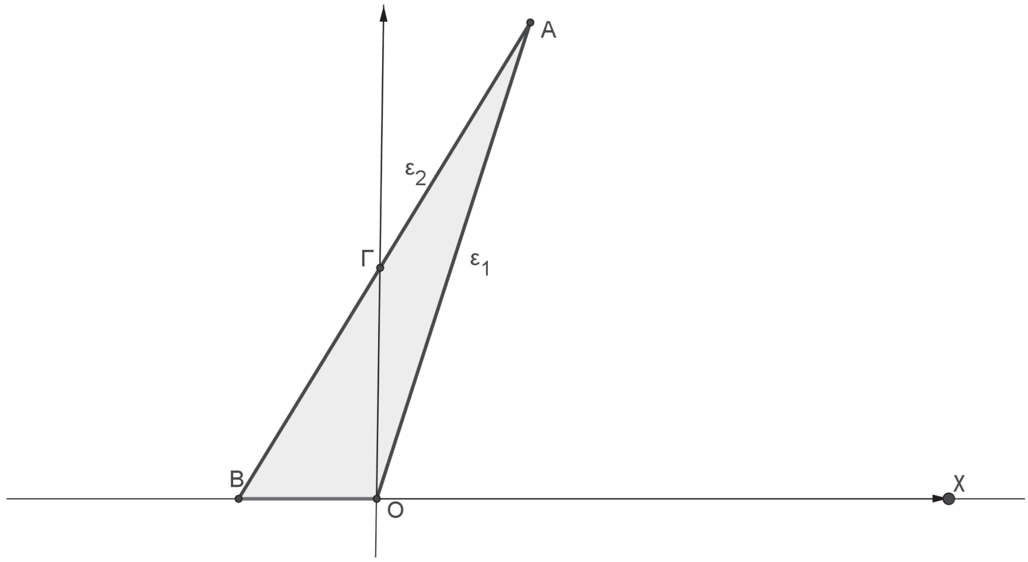
Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4 , ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο Γ(0,6).

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy, Α το κοινό σημείο των ευθειών και Β το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $y = 4x$, ενώ η ευθεία ε_2 έχει εξίσωση $y = 2x + \beta$, αφού είναι παράλληλη με την (η). Όμως διέρχεται από το σημείο Β(0,6), οπότε θα ισχύει $6 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε_2 είναι $y = 2x + 6$. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών βρίσκουμε ότι το κοινό σημείο τους είναι το $\mathrm{A}\left(3,12\right)$.



Σχήμα 2

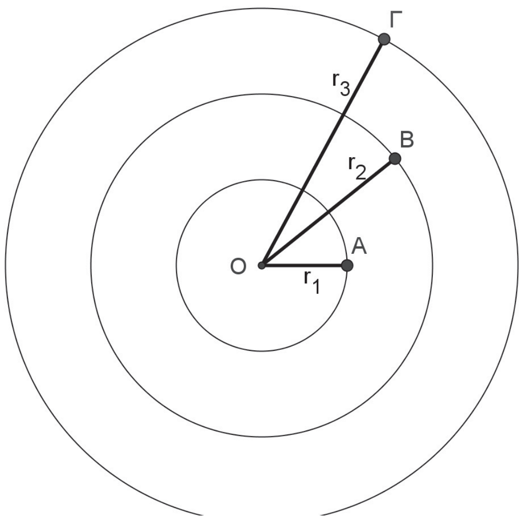
β) Η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $\mathrm{B}\left(-3,0\right)$, οπότε η τη βάση του τριγώνου έχει μήκος 3, ενώ το ύψος του ίσο με 12. Άρα έχουμε:

$$\mathrm{E(OAB)} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12 = 18 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_1, r_2 και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_2, r_3. Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)}$, όπου $\mathrm{E}(\Delta_1)$ και $\mathrm{E}(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε

$$\frac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)} = \frac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)} = \frac{\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right)}{\left(r_3 - r_2\right)\left(r_3 + r_2\right)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2}, \qquad (1)$$

αφού δίνεται ότι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$. Από την ίδια σχέση προκύπτει ότι $r_2 = \dfrac{r_1 + r_3}{2}$, οπότε, λόγω τη σχέσης $r_3 = 3r_1$ λαμβάνουμε $r_2 = \dfrac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$. Έτσι η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2} = \frac{3r_1}{3r_1 + 2r_1} = \frac{3r_1}{5r_1} = \frac{3}{5}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να βρούμε πρώτα τη σχέση $r_2 = \dfrac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$ και στη συνέχεια να εργαστούμε με το λόγο

$$\frac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)} = \frac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)} = \frac{\pi\left[\left(2r_1\right)^2 - r_1^2\right]}{\pi\left[\left(3r_1\right)^2 - \left(2r_1\right)^2\right]} = \frac{3r_1^2}{5r_1^2} = \frac{3}{5}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Λύση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 - 10x = 75 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 75 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \text{ ή } x = -5 .$$

Επειδή ο ζητούμενος αριθμός είναι θετικός, η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός 15.

ΘΕΜΑ 2^{o}

Αν οι αριθμοί μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \leq 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Λύση.

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή

$$\left(2^2\right)^{\mu-2} + \left(2^2\right)^{\nu+2} - 2\cdot 2^{\mu+\nu} \leq 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2}\right)^2 + \left(2^{\nu+2}\right)^2 - 2\cdot 2^{\mu+\nu} \leq 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2} - 2^{\nu+2}\right)^2 \leq 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$2^{\mu-2} - 2^{\nu+2} = 0 \Leftrightarrow 2^{\mu-\nu-4} = 1 \Leftrightarrow \mu - \nu - 4 = 0.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu} = 2^{\nu+4} + 2^{\nu} = 2^{\nu}\cdot\left(2^4 + 1\right) = 17\cdot 2^{\nu} = 34\cdot 2^{\nu-1},$$

που είναι πολλαπλάσιο του 34, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

ΘΕΜΑ 3^{o}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

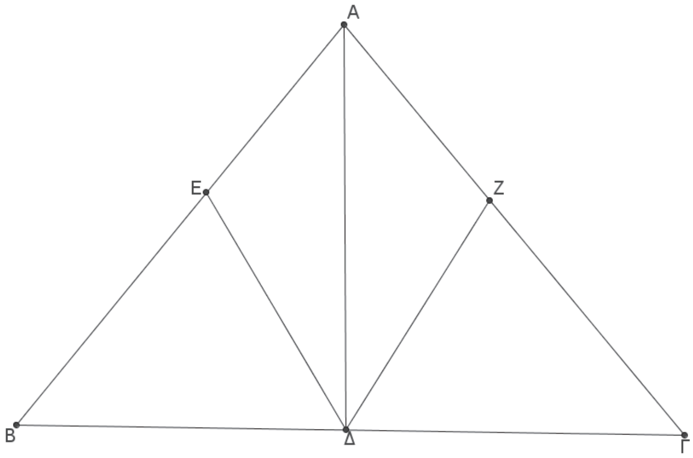
(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος του Α, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

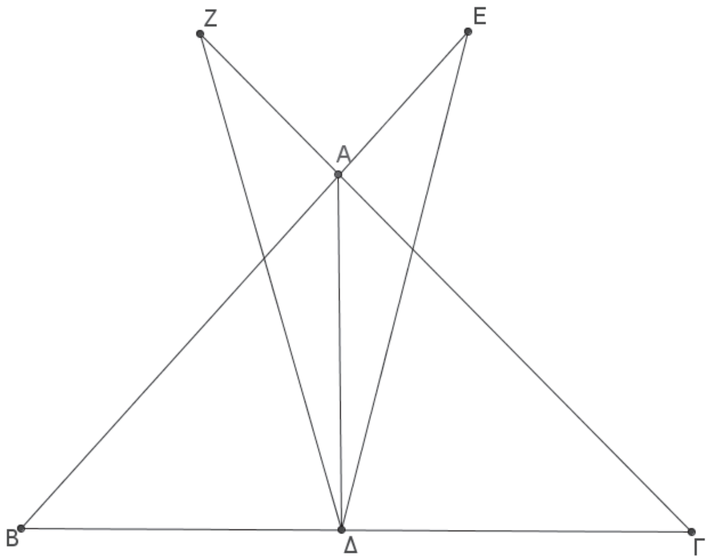
(α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($\mathrm{A}\Delta = \mathrm{A}\Delta, \Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$) και τις περιεχόμενες γωνίες των ίσων πλευρών ίσες, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, τα οποία είναι ορθογώνια με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^{\circ}$ και έχουν την πλευρά ΑΔ κοινή και τις οξείες γωνίες

$\Delta\hat{A}B$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$ ίσες. Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα , οπότε θα έχουν και $AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές



Σχήμα 4



Σχήμα 5

(β) Ομοίως όπως στο ερώτημα (α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z.$$

Επειδή οι γωνίες $\Gamma\hat{A}E$ και $B\hat{A}Z$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, έπεται ότι:

$$\Delta\hat{A}E - \Gamma\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z - B\hat{A}Z \Rightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B,$$

οπότε και στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Στη συνέχεια προχωράμε όπως στο ερώτημα (α).
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ προκύπτει και η ισότητα $\Delta\hat{Z}A = \Delta\hat{E}A$, οπότε εύκολα προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΓΖ είναι ίσα, οπότε θα είναι $\Delta B = \Delta \Gamma$, η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Άρα είναι ΑΒ = ΑΓ.
Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό θεώρημα της Γεωμετρίας, βάσει του οποίου, αν σε ένα τρίγωνο ένα ύψος του είναι και διχοτόμος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4^o

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή (όταν βέβαια είναι γεμάτη) σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν (για να γεμίσει η δεξαμενή) να είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Λύση

Έστω x, ο αριθμός των ωρών που χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή. Τότε οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός (μαζί με τις αντίστοιχες εξισώσεις που δημιουργούνται) είναι:

(1) Α-Β-Γ $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-2}{4}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+6-6 \Leftrightarrow x=\frac{12}{5}$

(2) Β-Α-Γ $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+8-6 \Leftrightarrow x=\frac{14}{5}$

(3) Α-Γ-Β $\quad \frac{x}{3}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{4}=1 \Leftrightarrow 5x=12+9-4 \Leftrightarrow x=\frac{17}{5}$

(4) Β-Γ-Α $\quad \frac{x}{4}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{3}=1 \Leftrightarrow 5x=12+12-4 \Leftrightarrow x=4$

(5) Γ-Β-Α $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+4 \Leftrightarrow x=\frac{16}{5}$

(6) Γ-Α-Β $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-1}{4}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+3 \Leftrightarrow x=3$

Ένας τρόπος ανοίγματος είναι Β-Γ-Α με αντίστοιχη διάρκεια $x=4$ ώρες (περίπτωση **(4)**).
Ένας δεύτερος τρόπος ανοίγματος είναι Γ-Α-Β με αντίστοιχη διάρκεια $x=3$ ώρες (περίπτωση **(6)**).
Στη περίπτωση **(4)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Β), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Β.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Β θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{4}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Γ η οποία θα λειτουργήσει $x-2$ ώρες και θα αδειάσει τα $\frac{x-2}{6}$ της δεξαμενής. Τέλος θα ανοίξει η βρύση Α η οποία θα λειτουργήσει $x-3$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-3}{3}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(4)**.

Στη περίπτωση **(6)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Γ), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Α (διότι ο μηχανισμός χρονομέτρησης αρχίζει μόλις πέσει νερό στη δεξαμενή).

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Α θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{3}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Β η οποία θα λειτουργήσει $x-1$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-1}{4}$ της δεξαμενής.

Τέλος η βρύση Γ θα λειτουργήσει x ώρες, και θα αδειάσει τα $\frac{x}{6}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(6)**.

Ανάλογα εξηγούνται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο} (

Αν α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \le \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (1)$$

που ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με την αληθή ανισότητα $0 \le \left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$.

Επιπλέον έχουμε

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \le \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, \qquad (2)$$

η οποία ισχύει γιατί γράφεται ως

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \le \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha+\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow 4\alpha\beta \le \left(\alpha+\beta\right)^2 \Leftrightarrow 0 \le \left(\alpha-\beta\right)^2.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των δύο ανισοτήτων (1) και (2) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

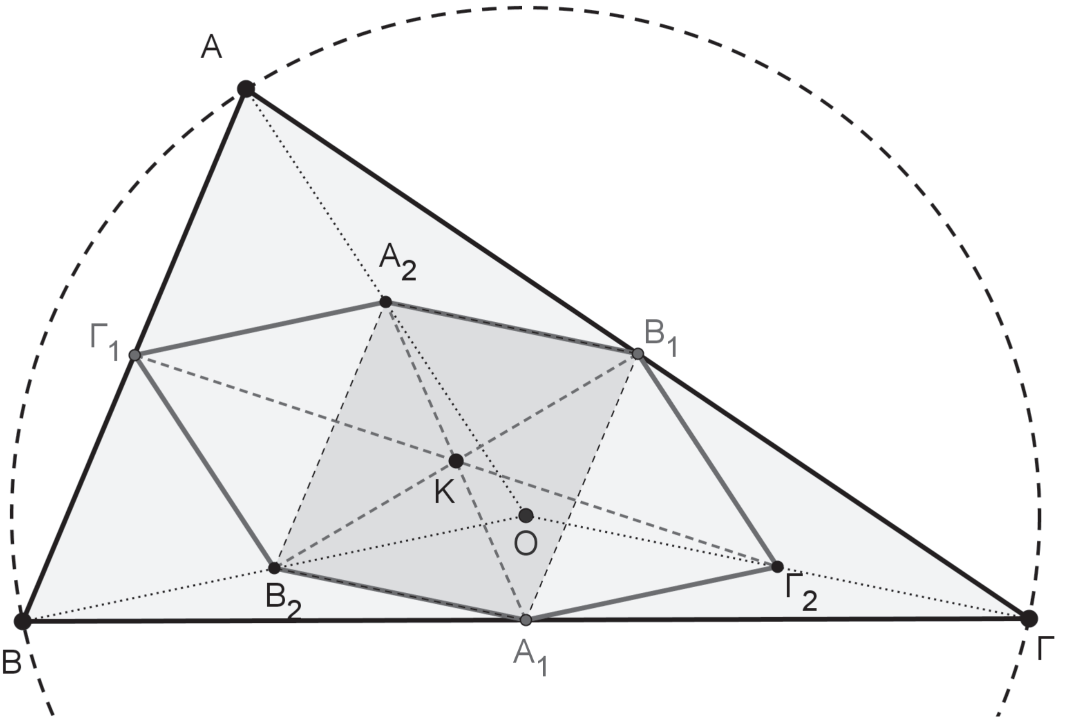
$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \le \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν $\mathrm{A_1, B_1, \Gamma_1}$ είναι τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma, A\Gamma, AB}$ αντίστοιχα και $\mathrm{A_2, B_2, \Gamma_2}$ είναι τα μέσα των $\mathrm{OA, OB, O\Gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $\mathrm{A_2B_1\Gamma_2A_1B_2\Gamma_1}$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{B_1B_2}$ και $\mathrm{\Gamma_1\Gamma_2}$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Εφόσον Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, θα ισχύει: $\mathrm{OA = OB = O\Gamma = R}$.



Σχήμα 6

Το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A_2B_1}$ συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $\mathrm{OA\Gamma}$, άρα:

$$\mathrm{A_2B_1} = \frac{\mathrm{O\Gamma}}{2} = \frac{R}{2} \qquad (1).$$

Το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A_1B_2}$ συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $\mathrm{OB\Gamma}$, άρα:

$$\mathrm{A_1B_2} = \frac{\mathrm{O\Gamma}}{2} = \frac{R}{2} \qquad (2).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι όλες οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες με $\frac{R}{2}$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $\mathrm{A_1B_1A_2B_2}$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται στο σημείο K.

Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $A_1\Gamma_2A_2\Gamma_1$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και σε αυτή τη περίπτωση οι διαγώνιες θα διχοτομούνται στο σημείο K.

ΘΕΜΑ 3ο .

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\frac{x-y+2}{2}.$$

Λύση

Οι άρρητες παραστάσεις ορίζονται γιατί δίνεται ότι: $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$.

Αν θέσουμε $\sqrt{x-2009}=a$ και $\sqrt{y+2009}=b$, τότε λαμβάνουμε $x=a^2+2009$ και $y=b^2-2009$, από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση $x+y=a^2+b^2$.

Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a+b=\frac{a^2+b^2}{2}+1 \Leftrightarrow a^2+b^2-2a-2b+2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow a-1=b-1=0 \Leftrightarrow a=b=1,$$

οπότε θα είναι $x=2010, y=-2008$ και $A=2010$.

ΘΕΜΑ 4ο

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} (x+y)^3=z-2x-y \\ (y+z)^3=x-2y-z \\ (z+x)^3=y-2z-x \end{matrix}\right\} \qquad (\Sigma)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση

Θέτουμε $x+y=\alpha$, $y+z=\beta$ και $z+x=\gamma$, οπότε το δοσμένο σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \alpha^3+2\alpha=\beta \\ \beta^3+2\beta=\gamma \\ \gamma^3+2\gamma=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\alpha^2+2)=\beta \\ \beta(\beta^2+2)=\gamma \\ \gamma(\gamma^2+2)=\alpha \end{cases}$$

Από τη τελευταία έκφραση του συστήματος συμπεραίνουμε ότι έχει τη προφανή λύση:

$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση.

Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ τότε πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις έχουμε:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=1.$$

Η τελευταία ισότητα δεν είναι δυνατό να ισχύει , οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha=0$ τότε θα ισχύει: $\beta=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\beta=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\gamma=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\beta=0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Άρα το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2+3x(x-2)+11x-10y=2015.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x(x+1)-2y=403\ . \qquad (1)$$

Επειδή για όλους τους θετικούς ακέραιους x, y οι αριθμοί $x(x+1)$ και $2y$ είναι άρτιοι θετικοί ακέραιοι και η διαφορά τους $x(x+1)-2y$ θα είναι άρτιος θετικός ακέραιος, οπότε δεν είναι δυνατόν να ισούται με 403.

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\big(x-f(y)\big)-f\big(y-f(x)\big)=2f\big(f(x)-f(y)\big)\text{, για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξτε ότι $f(x-f(x))=0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το x και παίρνουμε:

$$f\big(x-f(x)\big)-f\big(x-f(x)\big)=2f\big(f(x)-f(x)\big),$$

οπότε θα είναι $f(0)=0$.

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου x το 0 και παίρνουμε:

$$f\big(0-f(y)\big)-f\big(y-f(0)\big)=2f\big(f(0)-f(y)\big)$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0)=0$, καταλήγουμε:

$$f\big(-f(y)\big)-f(y)=2f\big(-f(y)\big)\Leftrightarrow f\big(-f(y)\big)=-f(y).$$

Θέτουμε (στη τελευταία ισότητα) όπου y το x και έχουμε τη σχέση:

$$f\big(-f(x)\big)=-f(x). \qquad (1)$$

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το 0 και παίρνουμε:

$$f\big(x-f(0)\big)-f\big(0-f(x)\big)=2f\big(f(x)-f(0)\big)$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0)=0$, καταλήγουμε:

$$f(x)-f\big(-f(x)\big)=2f\big(f(x)\big). \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $f(f(x)) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Θέτουμε τέλος στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το $f(x)$ και χρησιμοποιώντας τη προηγούμενη ισότητα έχουμε $f(x - f(x)) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3ο.

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί της μορφής $\overline{\boldsymbol{\alpha}\underbrace{\mathbf{000\cdots000}}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\boldsymbol{\alpha}}$, όπου $\boldsymbol{\alpha}$ είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{00\cdots00}\boldsymbol{\alpha}}$, μεσολαβούν $\boldsymbol{2\nu}$ το πλήθος μηδενικά. Να αποδείξετε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το $\boldsymbol{33}$ ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το $\boldsymbol{33}$".

Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι κάθε αριθμός της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$ διαιρείται με το 11. Πράγματι, κάθε αριθμός της παραπάνω μορφής γράφεται;

$$\begin{aligned}\overline{\alpha 00\cdots00\alpha} &= \alpha\cdot 10^0 + 0\cdot 10^1 + \cdots + 0\cdot 10^{2\nu} + \alpha\cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha + \alpha\cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha(1 + 10^{2\nu+1}) = \\ &= \alpha(1+10)(\underbrace{10^{2\nu} - 10^{2\nu-1} + \cdots + 1}_{\kappa}) = 11\alpha\cdot\kappa.\end{aligned}$$

Έστω τώρα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τρεις οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί. της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$. Θα αποδείξουμε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 3 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 3". **(1)**

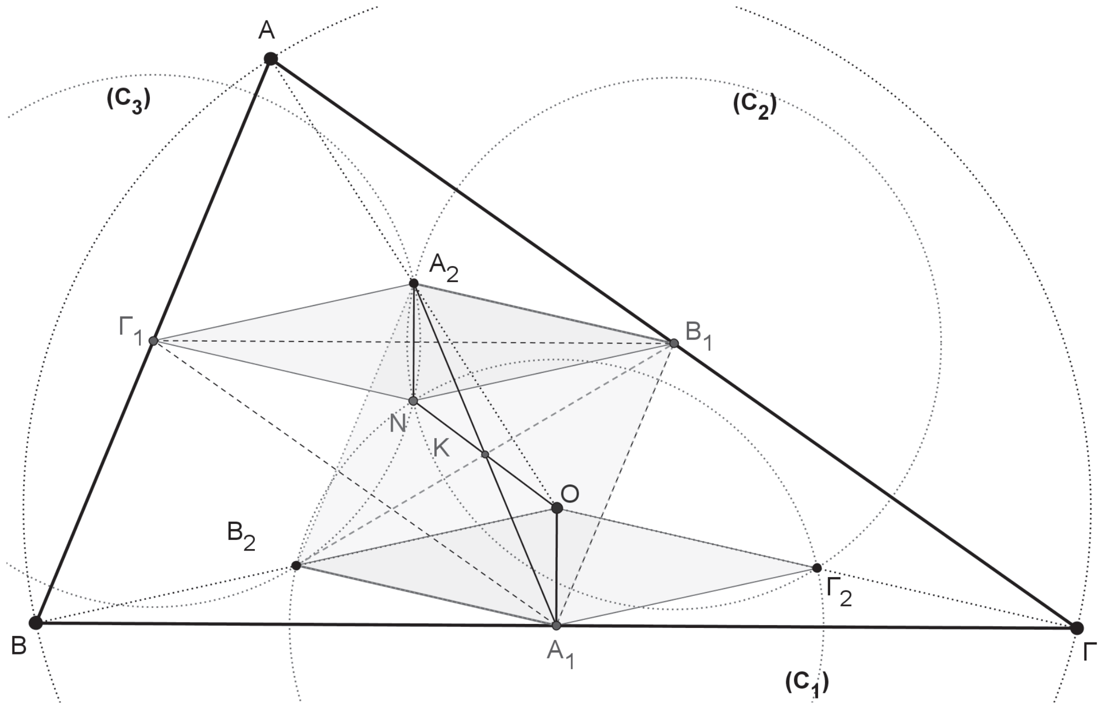
Αν κάποιος από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ διαιρείται με το 3, τότε προφανώς θα ισχύει η πρόταση.
Έστω ότι το 3 δεν διαιρεί κανένα από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
Τότε υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:
1) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k+1$, τότε προφανώς $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3m$
2) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k+2$, τότε προφανώς $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3n$
Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ένας τουλάχιστον αριθμός θα είναι της μορφής $3k+1$ και ένας τουλάχιστον της μορφής $3k+2$, οπότε το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών θα είναι προφανώς πολλαπλάσιο του τρία.
Επειδή καθένας από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ της μορφής $\overline{\alpha 00\cdots00\alpha}$ διαιρείται με το 11, έπεται ότι και το άθροισμα οσωνδήποτε από αυτούς θα διαιρείται με το 11.
Λαμβάνοντας υπόψιν τις προηγούμενες προτάσεις, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4ο .

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma}, \mathrm{A\Gamma}, \mathrm{AB}$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(\mathrm{A}_1, \frac{R}{2})$, $C_2(\mathrm{B}_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω N) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ των $\mathrm{OA}, \mathrm{OB}, \mathrm{O}\Gamma$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξτε ότι οι $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$, $\Gamma_1\Gamma_2$ και ON περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Το τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\Gamma_1$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\lambda = \dfrac{1}{2}$, οπότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\Gamma_1$ θα έχει ακτίνα $\dfrac{\mathrm{R}}{2}$.



Σχήμα 7

Οι κύκλοι τώρα που έχουν κέντρα τις κορυφές του τριγώνου $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\Gamma_1$ και ακτίνα $\dfrac{\mathrm{R}}{2}$ θα περνάνε από το περίκεντρο N του τριγώνου $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\Gamma_1$. (Το σημείο N είναι το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$)

Αν $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ είναι τα μέσα των $\mathrm{OA}, \mathrm{OB}, \mathrm{O}\Gamma$ αντίστοιχα, τότε:

$$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 = \mathrm{A}_1\Gamma_2 = \mathrm{B}_1\mathrm{A}_2 = \mathrm{B}_1\Gamma_2 = \Gamma_1\mathrm{A}_2 = \Gamma_1\mathrm{B}_2 = \frac{\mathrm{R}}{2}.$$

(Τα παραπάνω τμήματα $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2, \mathrm{A}_1\Gamma_2, \mathrm{B}_1\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1\Gamma_2, \Gamma_1\mathrm{A}_2, \Gamma_1\mathrm{B}_2$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα των ορθογωνίων τριγώνων $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}$, $\mathrm{OA}_1\Gamma$, $\mathrm{OB}_1\mathrm{A}$, $\mathrm{OB}_1\Gamma$, $\mathrm{O}\Gamma_1\mathrm{A}$ και $\mathrm{O}\Gamma_1\mathrm{B}$.)

Άρα τα δεύτερα κοινά σημεία των κύκλων $\mathrm{C}_1(\mathrm{A}_1, \dfrac{\mathrm{R}}{2})$, $\mathrm{C}_2(\mathrm{B}_1, \dfrac{\mathrm{R}}{2})$ και $\mathrm{C}_3(\Gamma_1, \dfrac{\mathrm{R}}{2})$ είναι τα σημεία $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$.

Τα τετράπλευρα $\Gamma_1 NB_1 A_2$ και $OB_2 A_1 \Gamma_2$ είναι ρόμβοι με πλευρές μήκους $\frac{R}{2}$ και οι πλευρές του ενός τετραπλεύρου, είναι παράλληλες με τις πλευρές του άλλου ($A_2B_1 = // B_2A_1$, $\Gamma_1A_2 = // A_1\Gamma_2, \ldots$).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Το τετράπλευρο A_2OA_1N είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η A_1A_2 περνά από το μέσο K του ON που είναι μέσο και του A_1A_2.

Το τετράπλευρο $\Gamma_1A_2\Gamma_2A_1$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η $\Gamma_1\Gamma_2$ περνά από το μέσο K του A_1A_2 που είναι μέσο και του $\Gamma_1\Gamma_2$.

Τέλος το τετράπλευρο $B_1\Gamma_1B_2\Gamma_2$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η B_1B_2 και περνά από το μέσο K του $\Gamma_1\Gamma_2$ που είναι μέσο και του B_1B_2.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A, του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4\cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2 = 4\cdot 25 - 64 + 7\cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

(β) Για την εύρεση του A αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών x, y. Επειδή είναι $\text{ΜΚΔ}(33,99) = 33$, έπεται ότι θα είναι $A = 33$.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

Λύση

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακέραιων με τον μικρότερό τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

$$\begin{array}{ccc} 16 & 32 & 248 \\ 16 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{array},$$

οπότε είναι $\beta = \text{ΜΚΔ}(16, 32, 248) = 8$.

Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha = 8\cdot 6 + \upsilon = 48 + \upsilon$, όπου υ ακέραιος με δυνατές τιμές από 0 μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του υ στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για $\upsilon = 1$, ο αριθμός $\alpha = 49$ που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άρα έχουμε $\alpha = 49$ και $\beta = 8$.

3. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $I\hat{\Delta}\Gamma = 70^0$ και $I\hat{E}\Gamma = 130^0$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $B\hat{I}\Delta$ και $E\hat{I}\Gamma$.

Λύση

α. Εφόσον $I\Delta // AB$ θα ισχύει: $\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = 70^o$,(ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων $I\Delta, AB$ τεμνομένων από την $B\Delta$).

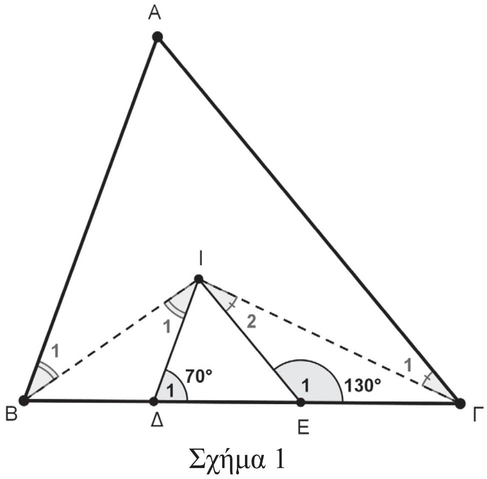
Επειδή είναι $IE // A\Gamma$, θα ισχύει: $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1 = 180^o - 130^o = 50^o$. (Οι γωνίες $\hat{\Gamma}, \hat{E}_1$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $IE, A\Gamma$ τεμνομένων από την $E\Gamma$).

Οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε θα ισχύει:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 180^o - \hat{B} - \hat{\Gamma} = 180^o - 70^o - 50^o = 60^o.$$

β. Επειδή η $I\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{70^o}{2} = 35^o$.

Επίσης, επειδή $I\Delta // AB$, θα ισχύει: $\hat{I}_1 = \hat{B}_1 = 35^o$, γιατί οι γωνίες $\hat{I}_1, \hat{B}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $I\Delta, AB$ που τέμνονται από την IB.



Σχήμα 1

Εφόσον $I\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, θα ισχύει: $\hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{50^o}{2} = 25^o$.

Επίσης είναι $IE // A\Gamma$, οπότε θα ισχύει: $\hat{I}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 25^o$, αφού οι γωνίες $\hat{I}_2, \hat{\Gamma}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $IE, A\Gamma$ που τέμνονται από την $I\Gamma$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Λύση

α. Επειδή θεωρούμε ότι τα 120+80=200 ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων είναι της ιδίας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδενδρο είναι 2600:200=13 κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120 \cdot 13 = 1560$ κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560 \cdot \frac{10}{100} = 156$ κιλά λάδι.

β. Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδενδρα του κτήματος του αγρότη παράγουν x κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $x \cdot \frac{150}{100} = \frac{3x}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80 \cdot x + 120 \cdot \frac{3x}{2} = 2600 \Leftrightarrow 80x + 180x = 2600 \Leftrightarrow 260x = 2600 \Leftrightarrow x = \frac{2600}{260} = 10.$$

Επομένως τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά $120 \cdot 15 = 1800$ κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει $1800 \cdot \frac{10}{100} = 180$ κιλά λάδι.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A=7x+10y-3w-87$.

Λύση

Έχουμε $x+y=3\cdot(-2)^2=3\cdot 4=12$ και

$$y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-24}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^{24}.$$

$$=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\right]^{24}=1^{24}=1.$$

Άρα είναι:

$$A=7x+10y-3w-87=7x+7y+3y-3w-87$$
$$=7(x+y)+3(y-w)-87=7\cdot 12+3\cdot 1-87=84+3-87=0.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,
(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

Λύση

Έστω $\overline{xyzw}=1000\cdot x+100\cdot y+10\cdot z+w$ ο ζητούμενος τετραψήφιος φυσικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με το **(α)** θα είναι $w=0$ ή 4 ή 8, οπότε σύμφωνα με το **(β)** θα είναι $z=0$ ή 2 ή 4, αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με το **(γ)** θα είναι $y=1$ ή 5.

Έτσι οι δυνατές μορφές του αριθμού είναι:

$$\overline{x100},\ \overline{x124},\ \overline{x148},\ \overline{x500},\ \overline{x524},\ \overline{x548}.$$

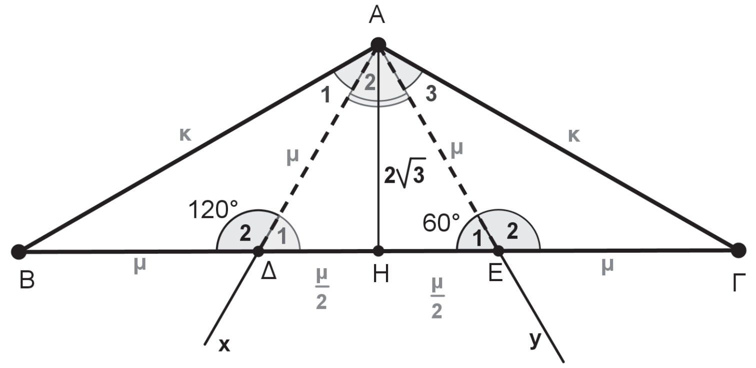
Λαμβάνοντας υπόψη και το (δ) καταλήγουμε στους αριθμούς $4500,\ 4524,\ 4548$, αφού το πρώτο ψηφίο τετραψήφιου φυσικού αριθμού δεν μπορεί να είναι το 0.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=120^0$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε , αντίστοιχα. Αν $A\hat{\Delta}B=120^0$, $A\hat{E}\Delta=60^0$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

Λύση

α. Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\Delta}_2 = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 120^o$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 = 60^o$. Από τα δεδομένα όμως έχουμε ότι $\hat{\mathrm{E}}_1 = 60^o$. Άρα το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 2

β. Εφόσον οι ημιευθείες $\mathrm{A\Delta}$ (Ax) και AE (Ay) είναι κάθετες προς τις ΑΓ και ΑΒ, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma - 90^\circ = 120^0 - 90^\circ = 30^o$.

Τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$ και $\mathrm{A\Gamma E}$ έχουν: $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$ (από το ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$), $\hat{\Delta}_2 = \hat{\mathrm{E}}_2 = 120^o$ και $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = 30^o$. Επομένως τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$, $\mathrm{A\Gamma E}$ είναι ίσα και συνεπώς $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από τα ορθογώνια τρίγωνα AEB και $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ που έχουν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 60^\circ = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 30^0$, δηλαδή $\mathrm{AB\Gamma}$ ισοσκελές.

γ. Έστω μ το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου $\mathrm{A\Delta E}$ και κ το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AH\Delta}$ έχουμε:

$$\mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{AH}^2 + \Delta\mathrm{H}^2 \text{ δηλαδή } \mu^2 = \frac{\mu^2}{4} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3\mu^2}{4} = 12 \Leftrightarrow \mu = 4.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AHB έχουμε:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2, \text{ δηλαδή } \kappa^2 = \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 48 \Leftrightarrow \kappa = 4\sqrt{3}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $12 + 8\sqrt{3}$.

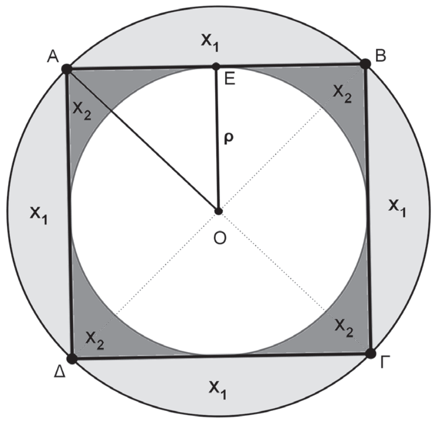
Η περίμετρος του τριγώνου $\mathrm{A\Delta E}$ είναι 12, οπότε ο λόγος του θα είναι $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ .Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $\mathrm{C(O,OA)}$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $\mathrm{C(O,\rho)}$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ που ορίζεται από τους κύκλους $\mathrm{C(O,\rho)}$ και $\mathrm{C(O,OA)}$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $\mathrm{E(X_1)}$ και $\mathrm{E(X_2)}$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O,x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O,\rho,OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΕ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος λαμβάνουμε $OA^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow OA^2=2\rho^2 \Leftrightarrow OA=\rho\sqrt{2}$, οπότε είναι

$$E(\Delta(O,\rho,OA))=\pi\left(\rho\sqrt{2}\right)^2-\pi\rho^2=2\pi\rho^2-\pi\rho^2=\pi\rho^2.$$

(β) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 προκύπτει από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας $\rho\sqrt{2}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Άρα είναι

$$E(X_1)=\pi\left(\rho\sqrt{2}\right)^2-(2\rho)^2=2\pi\rho^2-4\rho^2=(2\pi-4)\rho^2.$$

Το εμβαδόν του χωρίου X_2 προκύπτει από το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικό δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας ρ, δηλαδή

$$E(X_2)=(2\rho)^2-\pi\rho^2=4\rho^2-\pi\rho^2=(4-\pi)\rho^2.$$

Άρα είναι $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}=\frac{2\pi-4}{4-\pi}$ και ισχύει ότι:

$$\frac{E(X_1)}{E(X_2)}=\frac{2\pi-4}{4-\pi}>\frac{13}{5}\Leftrightarrow 5(2\pi-4)>13(4-\pi)\Leftrightarrow 23\pi>72\Leftrightarrow \pi>\frac{72}{23}\cong 3{,}1304,$$

το οποίο είναι αληθές, αφού είναι $\pi\cong 3{,}14$.

(γ) Θα πρέπει να είναι $\rho<x<\rho\sqrt{2}$ και τα εμβαδά των δύο κυκλικών δακτύλιων που ορίζονται να είναι ίσα, δηλαδή

$$\pi\left[\left(\rho\sqrt{2}\right)^2-x^2\right]=\pi\left(x^2-\rho^2\right)\Leftrightarrow 2\rho^2-x^2=x^2-\rho^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2=3\rho^2\Leftrightarrow x^2=\frac{3\rho^2}{2}\Leftrightarrow x=\rho\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2 - 5x = 14, \quad \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4}.$$

Λύση

Η εξίσωση $x^2 - 5x = 14$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-5) = 14$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 14. Επομένως θα είναι $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 7 και -2.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή τριωνύμου

$$x^2 - 5x - 14 = 0, \text{ με } \alpha = 1, \beta = -5, \gamma = -14,$$

οπότε είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 81$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x = 7$ ή $x = -2$.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4} \Leftrightarrow 2x - 2 + x^2 - 1 < x^2 - x \Leftrightarrow 3x < 3 \Leftrightarrow x < 1.$$

Επομένως η ζητούμενη ακέραια λύση του συστήματος είναι η $x = -2$.

2. Αν οι α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4.$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4 \\ &= \left(\alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2\right) - \left(\alpha^2\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta^3\gamma^2 + \beta^4\gamma^2\right) - \left(\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^4\right) \\ &= \alpha^2\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right) - \beta^2\gamma^2\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right) - \gamma^2\left(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2\right) \\ &= \left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right)\left(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2\right) - \gamma^2\left(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2\right) \\ &= \left(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2\right)\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2\right) = \left[\alpha^2 - (\beta\gamma)^2\right]\left[(\alpha+\beta)^2 - \gamma^2\right] \\ &= (\alpha + \beta\gamma)(\alpha - \beta\gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma). \end{aligned}$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{4}{y}, \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{3} + \frac{x}{3}.$$

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{y} = w$ και απαλείψουμε παρονομαστές, το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{cases} x-8w=2 \\ x-4w=13 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=2+8w \\ x=13+4w \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=2+8w \\ 2+8w=13+4w \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=2+8w \\ 8w-4w=13-2 \end{cases}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=2+8w \\ 4w=11 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=2+8\cdot\dfrac{11}{4} \\ w=\dfrac{11}{4} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=2+2\cdot 11 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=24 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{cases}\right\}.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x,y)=\left(24,\ \dfrac{4}{11}\right)$

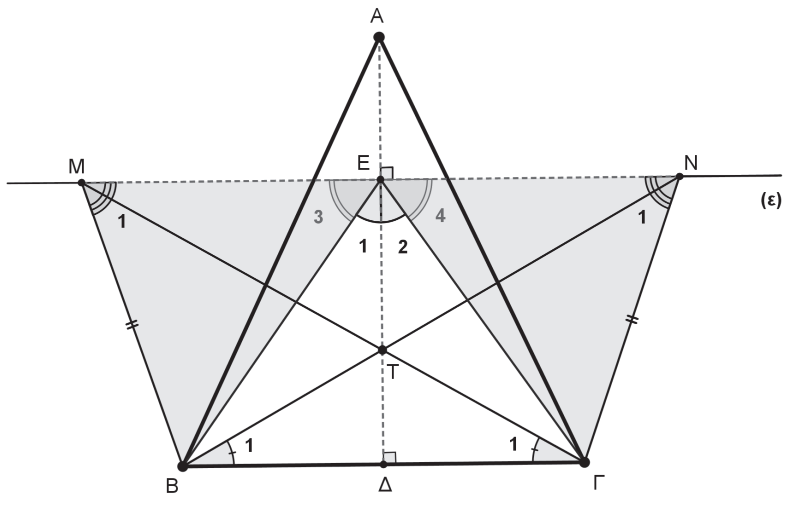
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ=ΑΓ)$ και το ύψος του $ΑΔ$. Από τυχόν σημείο $Ε$ του ύψους $ΑΔ$ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $ΒΓ$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $Μ, Ν$ έτσι ώστε $ΕΜ=ΕΝ$ και $ΜΒ<ΜΓ$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΜΓ$ και $ΝΒ$ τέμνονται πάνω στο ύψος $ΑΔ$.

Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα διότι έχουν τις υποτείνουσες $(ΑΒ=ΑΓ)$ και δύο οξείες γωνίες $(\hat{Β}=\hat{Γ})$ ίσες. Άρα $ΔΒ=ΔΓ$, δηλαδή το $Δ$ είναι μέσο της $ΒΓ$.

Τα τρίγωνα τώρα $ΕΔΒ$ και $ΕΔΓ$ είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ($ΕΔ$ κοινή και από τη προηγούμενη ισότητα $ΔΒ=ΔΓ$). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν $\hat{Ε}_1=\hat{Ε}_2$ και ΕΒ = ΕΓ.

Από την τελευταία ισότητα γωνιών, προκύπτει $\hat{Ε}_3=\hat{Ε}_4$ γιατί οι γωνίες $\hat{Ε}_3, \hat{Ε}_4$ είναι συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{Ε}_1, \hat{Ε}_2$.



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα $ΕΜΒ$ και $ΕΝΓ$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $ΕΜ=ΕΝ$ (από τα δεδομένα της άσκησης).

2. $ΕΒ=ΕΓ$ (από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων $ΕΔΒ$ και $ΕΔΓ$).

3. $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$ (συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{E}_1, \hat{E}_2$).

Άρα θα έχουν $MB = N\Gamma$ και $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$.

Τα τρίγωνα MNB και $MN\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $MN = MN$ (η πλευρά MN είναι κοινή).

2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).

3. $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).

Άρα θα έχουν και $M\Gamma = NB$.

Τα τρίγωνα τέλος $MB\Gamma$ και $NB\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $B\Gamma = B\Gamma$ (η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή)

2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$)

3. $M\hat{B}\Gamma = M\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = N\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}B = N\hat{\Gamma}B$

Άρα θα έχουν και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Αν τώρα συμβολίσουμε με T το σημείο τομής των $M\Gamma$ και NB, σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, συμπεραίνουμε ότι η $T\Delta$ είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $TB\Gamma$, δηλαδή η $T\Delta$ είναι κάθετη προς τη $B\Gamma$ στο σημείο Δ. Άρα το σημείο T, θα ανήκει στο ύψος $A\Delta$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$
$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$
$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες προκύπτει ότι πρέπει να αληθεύουν οι περιορισμοί: $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$, αλλά και οι περιορισμοί $x^2 \geq y + z,\ y^2 \geq z + x$ και $z^2 \geq x + y$. Στη συνέχεια με ύψωση στο τετράγωνο των δύο μελών των δεδομένων εξισώσεων λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - y - z = x^2 - 4x + 4 \\ y^2 - z - x = y^2 - 4y + 4 \\ z^2 - x - y = z^2 - 4z + 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 4x - y - z = 4 \\ -x + 4y - z = 4 \\ -x - y + 4z = 4 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε: $x + y + z = 6$.

Οι αριθμοί x, y, z προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος (1), αν τις γράψουμε στη μορφή

$$\left\{\begin{array}{l} 5x - (x + y + z) = 4 \\ 5y - (x + y + z) = 4 \\ 5z - (x + y + z) = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x - 6 = 4 \\ 5y - 6 = 4 \\ 5z - 6 = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{array}\right\}.$$

Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις ανισότητες $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$ αληθεύει μόνον ως γνήσια ανισότητα, έστω $x > 2$, τότε με πρόσθεση αυτών κατά μέλη προκύπτει ότι $x + y + z > 6$, που είναι άτοπο. Άρα θα είναι $x = y = z = 2$.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και οι κύκλοι $c_1(Α, ΑΒ)$ (με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $R_1 = ΑΒ$) και $c_2(Α, ΑΓ)$ (με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $R_2 = ΑΓ$). Ο κύκλος $c_1(Α, ΑΒ)$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο σημείο $Ε$ και την ευθεία $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο κύκλος $c_2(Α, ΑΓ)$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο σημείο $Κ$ και την ευθεία $ΑΓ$ στο σημείο $Ν$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΓΑ = ΓΒ$ και $\hat{Γ} = 30^{\circ}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι τετράγωνο.

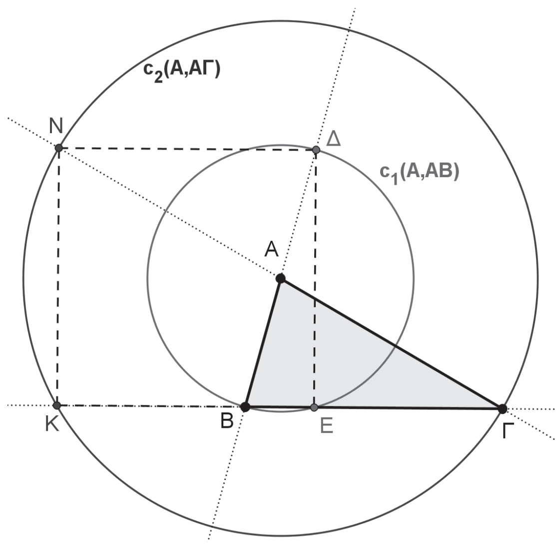
Λύση

α. Η $Β\Delta$ (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_1(Α, ΑΒ)$, οπότε Α είναι το μέσο του $Β\Delta$ και $Β\hat{Ε}\Delta = 90^o$.
Η $\Gamma Ν$ (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_2(Α, Α\Gamma)$, οπότε Α είναι το μέσο του $\Gamma Ν$ και $\Gamma\hat{Κ}Ν = 90^o$.

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $Ν\Delta\Gamma Β$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιες του διχοτομούνται, οπότε $Ν\Delta = //Β\Gamma$.

Από την ισότητα $Β\hat{Ε}\Delta = \Gamma\hat{Κ}Ν = 90^o$ προκύπτει ότι οι ευθείες $ΝΚ$ και $\Delta Ε$ είναι κάθετες προς την ευθεία $Β\Gamma$, οπότε θα είναι $ΝΚ // \Delta Ε$.

Από τις προηγούμενες παραλληλίες συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $\Delta ΕΚΝ$ είναι παραλληλόγραμμο και από την ισότητα $Β\hat{Ε}\Delta = \Gamma\hat{Κ}Ν = 90^o$ καταλήγουμε στο ότι το τετράπλευρο $\Delta ΕΚΝ$ είναι ορθογώνιο.



Σχήμα 5

.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΝΚ\Gamma$ ισχύει $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε η κάθετη πλευρά απέναντι από τη γωνία Γ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Άρα θα έχουμε

$$ΚΝ = \frac{Ν\Gamma}{2} = Α\Gamma = Β\Gamma,$$

οπότε, λόγω της ισότητας $Ν\Delta = Β\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι $ΚΝ = Ν\Delta$, δηλαδή δύο διαδοχικές πλευρές του ορθογώνιου $\Delta ΕΚΝ$ είναι ίσες, οπότε αυτό είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{4x^2+4x+1}{x}+\frac{4y^2+4y+1}{y}\geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } 4(x+y)+8+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να προκύψει με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι μέσω της σχέσης

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4,$$

αν θέσουμε $x+y=4$, η οποία αληθεύει γιατί

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 2+2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=4.$$

Η ισότητα ισχύει για $x=y=2$.

Διαφορετικά, αρκεί να γράψουμε

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\geq 1\Leftrightarrow xy\leq 4\Leftrightarrow x(4-x)\leq 4\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0$$

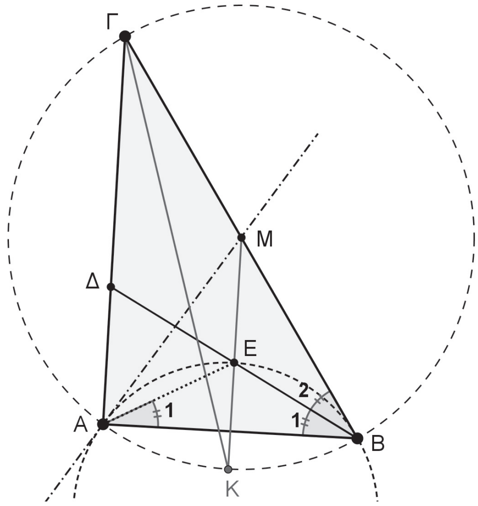
$$\Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Στην τελευταία σχέση η ισότητα ισχύει για $x=y=2$, οπότε και η ζητούμενη σχέση αληθεύει ως ισότητα για $x=y=2$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) και έστω Ε το μέσο της διχοτόμου ΒΔ. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΕΒ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΕ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Επειδή Ε είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ, θα ισχύει:



Σχήμα 6

$EA = EB$. Άρα το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$.

Επειδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, θα ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$, καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Άρα η ΓB είναι εφαπτόμενη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AEB και κατά συνέπεια $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε ως εξής:

Οι γωνίες $M\hat{A}E$ και $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι και οι δύο οξείες και η $M\hat{A}E$ είναι γωνία χορδής – εφαπτομένης, ενώ η $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AE του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB. Επομένως θα είναι $M\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2}$, οπότε $M\hat{A}B = \hat{B}$ και το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Το σημείο M είναι το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$, οπότε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τελικά η ME είναι η μεσοκάθετη της πλευράς AB, οπότε θα διέρχεται από το μέσο K του τόξου AB, από το οποίο διέρχεται και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος)

Αν θέσουμε $a=2x^2+3x+1,\ b=x^2+3x+2$, τότε $a-b=x^2-1$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} a^3-b^3=7(a-b)^3 &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=7(a-b)^3 \\ &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2-7a^2+14ab-7b^2\right)=0 \\ &\Leftrightarrow -(a-b)\left(6a^2-15ab+6b^2\right)=0 \\ &\Leftrightarrow a-b=0 \text{ ή } 2a^2-5ab+2b^2=0 \\ &\Leftrightarrow a=b \text{ ή } a=2b \text{ ή } 2a=b \\ &\Leftrightarrow x^2-1=0 \text{ ή } -3x-3=0 \text{ ή } 3x^2+3x=0 \\ &\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=-1 \\ &\Leftrightarrow x=-1 \text{ (τριπλή ρίζα) ή } x=0 \text{ ή } x=1. \end{aligned}$$

$2^{ος}$ τρόπος

Παρατηρούμε ότι και στους τρεις όρους των δύο μελών της εξίσωσης υπάρχει ο κοινός παράγοντας $(x+1)^3$, οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$(x+1)^3\left[(2x+1)^3-(x+2)^3-7(x-1)^3\right]=0 \Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα})$$

$$\text{ή } 8x^3+12x^2+6x+1-x^3-6x^2-12x-8-7x^3+21x^2-21x+7=0$$

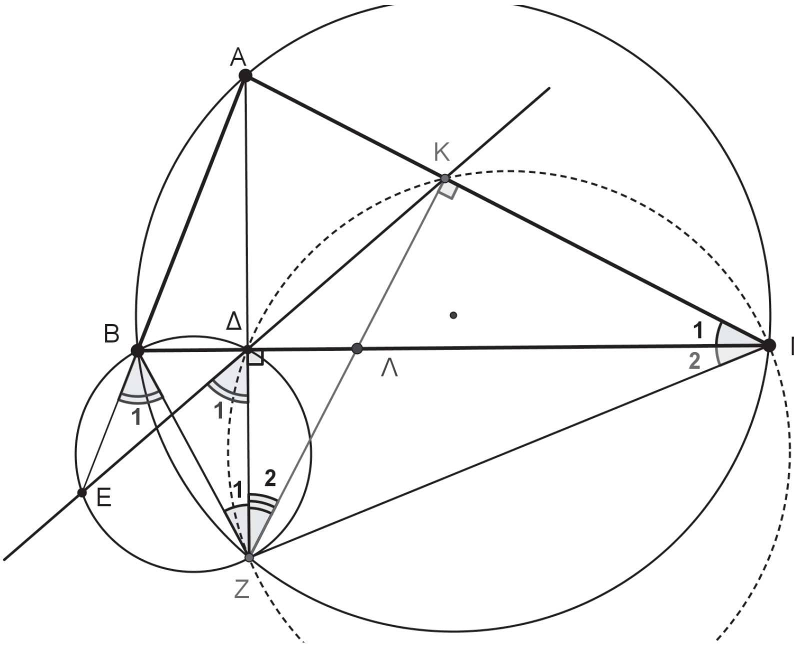
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } 27x^2-27x=0 \\ &\Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=1. \end{aligned}$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Το ύψος του $A\Delta$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Delta Z$ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E. Αν η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την ευθεία $A\Gamma$ στο K και η ευθεία ZK την $B\Gamma$ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Lambda$.

Λύση

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABZ\Gamma$ έχουμε: $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Delta ZE$ έχουμε: $\hat{B}_1=\hat{\Delta}_1$.



Σχήμα 7

Από τις δύο προηγούμενες ισότητες γωνιών προκύπτει $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$, οπότε το τετράπλευρο $\Delta K\Gamma Z$ είναι εγγράψιμο. Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB Z\Gamma$ έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$, δηλαδή στο τρίγωνο $BZ\Lambda$ η $Z\Delta$ είναι ύψος και διχοτόμος.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε "γύρους". Στον πρώτο "γύρο" ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου "γύρου" κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο "γύρο" ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου "γύρου". Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κλπ.

α. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.

β. Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρεθεί ο αριθμός των αθλητών που συμμετείχαν.

Λύση

Από την ανάλυση των κανόνων διεξαγωγής του τουρνουά μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω:

Στο $1^{\text{ο}}$ γύρο συμμετέχουν 2^m αθλητές, γίνονται 2^{m-1} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-1} νικητές.

Στο 2^{o} γύρο συμμετέχουν 2^{m-1} αθλητές, γίνονται 2^{m-2} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-2} νικητές.

Στο 3^{o} γύρο συμμετέχουν 2^{m-2} αθλητές, γίνονται 2^{m-3} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-3} νικητές και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία στο m^{o} γύρο βρίσκουμε ότι συμμετέχουν $2^{m-m+1}=2^{1}=2$ αθλητές, γίνεται $2^{m-m}=2^{0}=1$ αγώνας και ανακηρύσσεται $2^{m-m}=2^{0}=1$ νικητής.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

Συνολικά γίνονται m "γύροι" και $2^{m-1}+2^{m-2}+2^{m-3}+\cdots+2+1=2^{m}-1$ αγώνες.

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\alpha^{n}-1=(\alpha-1)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots+\alpha+1).$$

α. Αν τώρα ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε $m=3k$, όπου k θετικός ακέραιος, και το συνολικό πλήθος των αγώνων γράφεται:

$$2^{m}-1=2^{3k}-1=\left(2^{3}\right)^{k}-1=8^{k}-1=(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1)=7n,$$

όπου n θετικός ακέραιος.

β. Ο πρωταθλητής έχει παίξει και στους m γύρους, οπότε οι βαθμοί που θα συγκεντρώσει είναι:

$$10+20+30+\cdots+(m\cdot 10)=10(1+2+3+\cdots+m)=10\cdot\frac{m(m+1)}{2}=5m(m+1).$$

Άρα προκύπτει η εξίσωση:

$$5m(m+1)=210 \Leftrightarrow m(m+1)=42 \Leftrightarrow m=6,$$

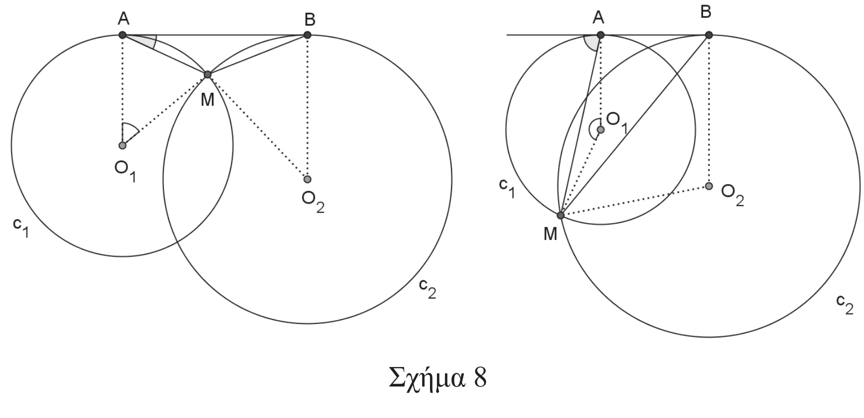
δηλαδή συμμετείχαν $2^{6}=64$ αθλητές.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1=(O_1,r_1)$ και $c_2=(O_2,r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των c_1,c_2 και ισχύει $r_1<r_2$, να αποδείξετε ότι $MA<MB$.

Λύση

Είναι $MA=2r_1\cdot\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right)$ και $MB=2r_2\cdot\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_2B}{2}\right)$, οπότε

$$\frac{MA}{MB}=\frac{r_1\cdot\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right)}{r_2\cdot\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_2B}{2}\right)}. \qquad (1)$$



Σχήμα 8

Η γωνία $\frac{M\hat{O}_1A}{2}$ ισούται πάντοτε με μια από τις δύο γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB, και επειδή αυτές οι δύο είναι παραπληρωματικές μεταξύ τους, τα ημίτονα και των τριών γωνιών είναι ίσα. Καθώς $M\hat{A}B$ είναι μια από τις γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB θα έχουμε $\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right) = \eta\mu(M\hat{A}B)$. Ομοίως, ισχύει ότι $\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right) = \eta\mu(M\hat{B}A)$ και η σχέση (1) γράφεται

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot \eta\mu(M\hat{A}B)}{r_2 \cdot \eta\mu(M\hat{B}A)} \qquad (2)$$

Από το θεώρημα ημιτόνων στο τρίγωνο MAB έχουμε $\frac{\eta\mu(M\hat{A}B)}{\eta\mu(M\hat{B}A)} = \frac{MB}{MA}$, οπότε η σχέση (2) δίνει

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot MB}{r_2 \cdot MA} \Rightarrow \left(\frac{MA}{MB}\right)^2 = \frac{r_1}{r_2} < 1 \Rightarrow MA < MB.$$

Σημείωση

Η προηγούμενη λύση αφορά τεμνόμενους κύκλους, αλλά και κύκλους εφαπτόμενους εξωτερικά.

Τα σημεία A, B, M πάντοτε δημιουργούν τρίγωνο, αφού τα A, B είναι διακεκριμένα από την υπόθεση, και το M δεν μπορεί να ταυτιστεί με κανένα από τα A, B (αφού σε διαφορετική περίπτωση η ευθεία AB θα είχε με κάποιον από τους δοσμένους κύκλους δύο τουλάχιστον κοινά σημεία και δεν θα ήταν εφαπτομένη του).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)$$

$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\mathrm{v}}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu=2$ ή $\nu=5$.

- Για $\nu=2$,έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{2-\frac{1}{5}}:\dfrac{2-\frac{2}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{9}{5}}:\dfrac{2-1}{9}=\dfrac{10}{9}:\dfrac{1}{9}=\dfrac{10}{9}\cdot 9=10.$

- Για $\nu=5$, έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{5-\frac{1}{5}}:\dfrac{5-\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{24}{5}}:\dfrac{\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{10}{24}:\dfrac{5}{18}=\dfrac{10}{24}\cdot\dfrac{18}{5}=\dfrac{180}{120}=\dfrac{3}{2}.$

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\omega$, οπότε θα είναι $\alpha=3\omega,\ \beta=9\omega$ και $\gamma=11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma-\alpha=56 \Leftrightarrow 11\omega-3\omega=56 \Leftrightarrow 8\omega=56 \Leftrightarrow \omega=7 .$$

Άρα είναι: $\alpha=3\cdot 7=21,\ \beta=9\cdot 7=63$ και $\gamma=11\cdot 7=77$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ<ΑΓ$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $Α\hat{Δ}Ε=90^\circ$.

2. Να βρείτε τη γωνία $Ε\hat{Δ}Ζ$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{Β}-\hat{Γ}=20^0$.

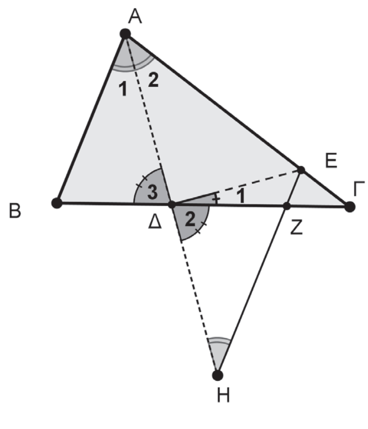
Λύση

1. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$, θα ισχύει: $\hat{Α}_1=\hat{Α}_2=\frac{\hat{Α}}{2}$.

Από την παραλληλία των ΑΒ και ΖΗ, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Α}_1=\hat{Η}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{Α}_2=\hat{Η}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, οπότε η διάμεσος ΕΔ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, δηλαδή θα είναι $ΕΔ\perp ΑΗ$ και $Α\hat{Δ}Ε=90^\circ$



2. Επειδή $Γ\hat{Δ}Ε=Α\hat{Δ}Ε=90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{Ε}_1=90^\circ-\hat{Δ}_2=90^\circ-\hat{Δ}_3 .$$

Σχήμα 1

Η $\hat{Δ}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας $Α\hat{Δ}Γ$, οπότε θα είναι $\hat{Δ}_3=\frac{\hat{Α}}{2}+\hat{Γ}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{Ε}_1=90^\circ-\hat{Δ}_2=90^\circ-\frac{\hat{Α}}{2}-\hat{Γ}=\frac{\hat{Α}}{2}+\frac{\hat{Β}}{2}+\frac{\hat{Γ}}{2}-\frac{\hat{Α}}{2}-\hat{Γ}=\frac{\hat{Β}-\hat{Γ}}{2}=\frac{20^\circ}{2}=10^\circ .$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Λύση

Έχουμε:

$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^{2}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^{2}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^{3} = 10^{2}$.

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2}$$

$$= \left(2 \cdot 10^{6-4} \right)^{-2} = \left(2 \cdot 10^2 \right)^{-2} = \frac{1}{\left(2 \cdot 10^2 \right)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^2} = \frac{1}{4 \cdot 100} = \frac{1}{400}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x .$$

Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \le 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \le 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \le 8 \Leftrightarrow x \le 3 .$$

$$\frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2} - \frac{6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x-6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \le 8 \cdot x \Leftrightarrow x - 6 - (2x-9) \le 8x$$

$$\Leftrightarrow x - 6 - 2x + 9 \le 8x \Leftrightarrow 3 \le 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $\frac{1}{3} \le x \le 3$, οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1,2 και 3.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Λύση

(α) Επειδή είναι $(\varepsilon)\,||\,(\delta)$, οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3\lambda-1=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=1$. Έτσι η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται $y=2x+2\mu$. Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$ ανήκει στην ευθεία (ε), οπότε θα ισχύει: $8=2\cdot 2+2\mu \Leftrightarrow 2\mu=4 \Leftrightarrow \mu=2$. Άρα έχουμε:

$$\lambda=1,\ \mu=2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon):\ y=2x+4.$$

(β) Επειδή ισχύουν $2\cdot(-4)+4=-4$ και $2\cdot(-1)+4=2$, τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε), οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας (ε). Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου Μ από τα σημεία Κ και Λ είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

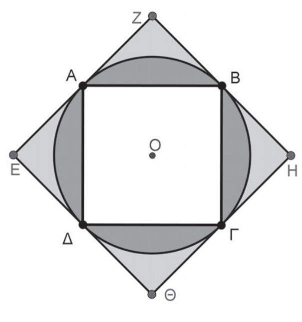
$$\mathrm{MK}=\sqrt{(2+1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

$$\mathrm{M\Lambda}=\sqrt{(-4+1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}<\dfrac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi=3{,}1415$).

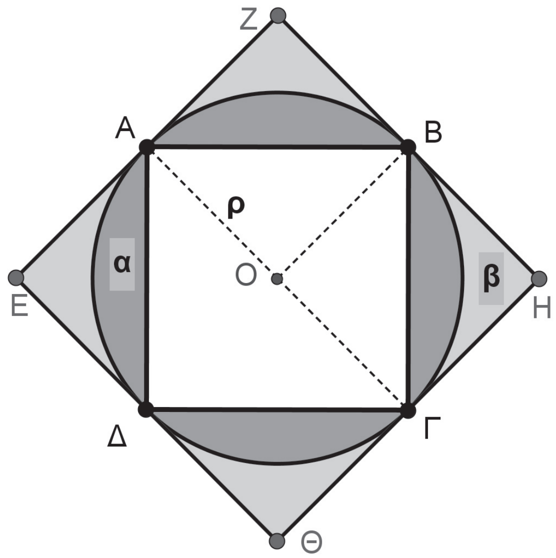
Λύση

1. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ, $\mathrm{OA}\perp\mathrm{EZ}$ και $\mathrm{OB}\perp\mathrm{ZH}$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΖΒ είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB}^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=2\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\rho\sqrt{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $2\rho^2$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, οπότε το άθροισμα Σ_1, θα είναι:

$$\Sigma_1=\pi\rho^2-2\rho^2=(\pi-2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι $\mathrm{OA} \perp \mathrm{EZ}$ και $\mathrm{O\Gamma} \perp \mathrm{H\Theta}$, έπεται ότι η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΗΖ είναι ορθογώνιο, οπότε $\mathrm{ZH} = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4-\pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi-2)\rho^2}{(4-\pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi-2) < 4(4-\pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots., \text{ που ισχύει.}$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} (x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0 \\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2} \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε

$$(x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x^2-7x+10=0.$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha=1$, $\beta=-7$, $\gamma=10$, οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=2$ ή $x=5$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-7)=-10$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2<5x^2+5x \Leftrightarrow x>3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι: $x=5$ ή $x=10$.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2\left(1+x^3\right)+(1+x)^3}{3\left(x^2+1\right)}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x)=\frac{2\left(1+x^3\right)+(1+x)^3}{3\left(x^2+1\right)},$$

τότε η παράσταση $\mathrm{A}(x)$ είναι ίση με τη διαφορά $\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)$. Έχουμε:

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}=\frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x\left(1+3x+3x^2+x^3\right)}{1+x^2+1+2x+x^2}$$

$$=\frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2}=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+x\right)^2+2\left(x^2+x\right)+1}{1+x+x^2}=\frac{\left(x^2+x+1\right)^2}{x^2+x+1}=x^2+x+1.$$

$$\Gamma(x)=\frac{2\left(1+x^3\right)+\left(1+x\right)^3}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)}{x^2+1}=\frac{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x+1.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}\left(x\right)=\mathrm{B}\left(x\right)-\Gamma\left(x\right)=x^2+x+1-\left(x+1\right)=x^2.$$

3. **(α)** Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa\left(x+2\right)-\frac{3\left(\kappa x-1\right)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Λύση

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2\kappa x+x=4\kappa\left(x+2\right)-3\left(\kappa x-1\right)\Leftrightarrow 2\kappa x+x=4\kappa x+8\kappa-3\kappa x+3\Leftrightarrow \kappa x+x=8\kappa+3$$

$$\Leftrightarrow\left(\kappa+1\right)x=8\kappa+3. \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $\kappa=-1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=-5$ και είναι αδύνατη.

2. Αν $\kappa\in\mathbb{Z}-\{-1\}$, δηλαδή, αν ο κ είναι ακέραιος διαφορετικός από το -1, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=\dfrac{8\kappa+3}{\kappa+1}$.

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x=\frac{8\kappa+3}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\kappa+8-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\left(\kappa+1\right)-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$

$$x=8-\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\kappa+1\in\{-1,1,-5,5\}\Leftrightarrow\kappa\in\{-2,0,-6,4\}.$$

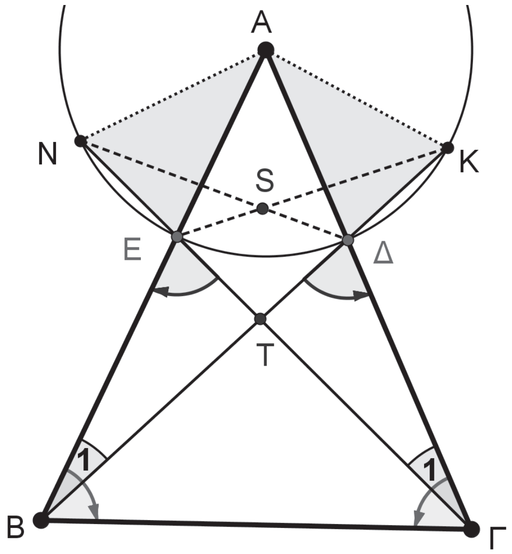
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το κ είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του -1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές AB και $\mathrm{A\Gamma}$ στα σημεία E και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες $\mathrm{B\Delta}$, $\Gamma\mathrm{E}$ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία K,N αντίστοιχα. Αν T είναι το σημείο τομής των $\mathrm{B\Delta}$, $\Gamma\mathrm{E}$ και S το σημείο τομής των $\Delta\mathrm{N}$, EK, να αποδείξετε ότι τα σημεία A,S και T βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$ είναι ίσα γιατί έχουν: (α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β) $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$) και (γ) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων $Α\Delta Β$ και $ΑΕΓ$, προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1$ και κατά συνέπεια:

$$Β\hat{Τ}Γ = Γ\hat{Τ}Β. \qquad (1)$$

- $Α\hat{\Delta}Β = Α\hat{Ε}Γ$ και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

$$Β\hat{Ε}Γ = Β\hat{\Delta}Γ \qquad (2)$$

- $$\Delta Β = \Delta Γ. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (1) των γωνιών $Β\hat{Τ}Γ = Γ\hat{Τ}Β$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $ΒΤΓ$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο $Τ$ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της $ΒΓ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $ΒΤΓ$ έχουμε: $ΤΒ = ΤΓ$ και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε: $ΤΕ = Τ\Delta$.

Από την ισότητα (2) των γωνιών $Β\hat{Ε}Γ = Β\hat{\Delta}Γ$, προκύπτει η ισότητα τω ισοσκελών τριγώνων $Α\Delta Κ$ και $ΑΕΝ$. Άρα $\Delta Κ = ΕΝ$ και επειδή $ΤΕ = Τ\Delta$, καταλήγουμε $ΤΚ = ΤΝ$.

Από τις ισότητες $ΤΕ = Τ\Delta$ και $ΤΚ = ΤΝ$ συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων $ΕΤΚ$ και $\Delta ΤΝ$.

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $SΕΝ = S\Delta Κ$ και στη συνέχεια η ισότητα $SΑΕ = SΑΚ$, οπότε το σημείο S ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{K}\left(x\right)=\frac{\left(x+2\right)\left(2x-1\right)\left(x-1\right)+x-4}{x^2-2},\ x\neq\pm\sqrt{2}\,.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2}\,.$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Λύση

(α) Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:

$$\frac{\left(x+2\right)\left(2x-1\right)\left(x-1\right)+x-4}{x^2-2}=\frac{\left(x+2\right)\left(2x^2-3x+1\right)+x-4}{x^2-2}$$

$$=\frac{2x^3-3x^2+x+4x^2-6x+2+x-4}{x^2-2}=\frac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2}$$

$$=\frac{2x\left(x^2-2\right)+x^2-2}{x^2-2}=\frac{\left(x^2-2\right)\left(2x+1\right)}{x^2-2}=2x+1.$$

(β) Για $x=2010$ η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την Α, οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{A}=\mathrm{K}\left(2010\right)=2\cdot 2010+1=4021\,.$$

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2}\,,$$

με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

Λύση

Για $a=b$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{2}{x-a}=\dfrac{1}{c^2}\Leftrightarrow x=a+2c^2$.

Έστω $a\neq b$. Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$\left(x-a\right)\left(x-b\right)=c^2\left(x-a+x-b\right),\ \text{με }\ x\neq a\ \text{ και }\ x\neq b$$

$$\Leftrightarrow x^2-\left(a+b+2c^2\right)x+ab+\left(a+b\right)c^2=0,\ \text{με }\ x\neq a\ \text{ και }\ x\neq b \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\Delta=\left(a+b+2c^2\right)^2-4ab-4\left(a+b\right)c^2=\left(a+b\right)^2-4ab+4c^4=\left(a-b\right)^2+4c^4>0\,,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2}=\frac{a+b+2c^2\pm\sqrt{\left(a-b\right)^2+4c^4}}{2}\,. \qquad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα a και b δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για $x=a$ η εξίσωση γίνεται: $\left(a-a\right)\left(x-b\right)=c^2\left(a-a+x-b\right)\Leftrightarrow 0=c^2\left(a-b\right)$, που είναι άτοπο, αφού είναι $c \neq 0$ και έχουμε υποθέσει ότι $a \neq b$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για $x = b$. Επομένως, για $a \neq b$, η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες (2).

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y = x^3 + 2x - 2,\ z = y^3 + 2y - 2,\ x = z^3 + 2z - 2.$$

Λύση

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y - z = (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 2) \qquad (1)$$

$$z - x = (y-z)(y^2 + yz + z^2 + 2) \qquad (2)$$

Επειδή είναι $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} + 2 > 0$ και ομοίως προκύπτει ότι $y^2 + yz + z^2 + 2 = \left(y + \dfrac{z}{2}\right)^2 + \dfrac{3z^2}{4} + 2 > 0$, αν υποθέσουμε ότι είναι $x > y$, τότε από την (1) λαμβάνουμε ότι $y > z$. Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε $z > x$.

Έτσι έχουμε $x > y > z > x$, άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $x < y$. Επομένως έχουμε $x = y$, οπότε θα είναι και $y = z$. Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ<ΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο c(O,R) στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα. Από το σημείο Ζ, θεωρούμε παράλληλη στην ΑΓ, που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Μ. Από το σημείο Ε, θεωρούμε παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι:

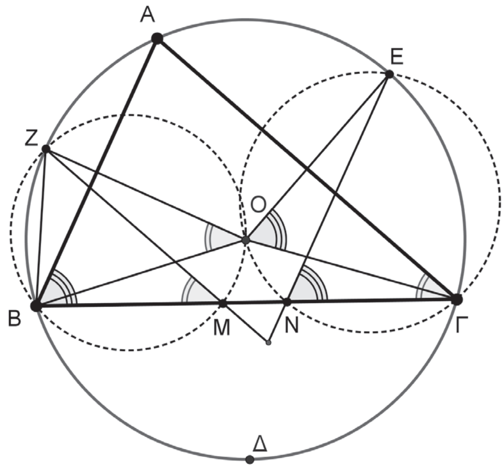
α) Τα τετράπλευρα ΒΜΟΖ και ΓΝΟΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω Κ) των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα ΔΙ, όπου Ι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

α) Εφόσον η ΖΜ είναι παράλληλη στην ΑΓ, θα ισχύει: $Z\hat{M}B = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}$.

Η γωνία $Z\hat{O}B$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνει στο τόξο ΖΒ (που είναι το μισό του τόξου ΑΒ). Άρα $Z\hat{O}B = \hat{\Gamma}$. Άρα είναι $Z\hat{M}B = Z\hat{O}B = \hat{\Gamma}$, οπότε το τετράπλευρο ΒΜΟΖ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 4

Ομοίως προκύπτει ότι $E\hat{N}\Gamma = E\hat{O}\Gamma = \hat{B}$ και ότι το τετράπλευρο ΓNOE είναι εγγράψιμο.

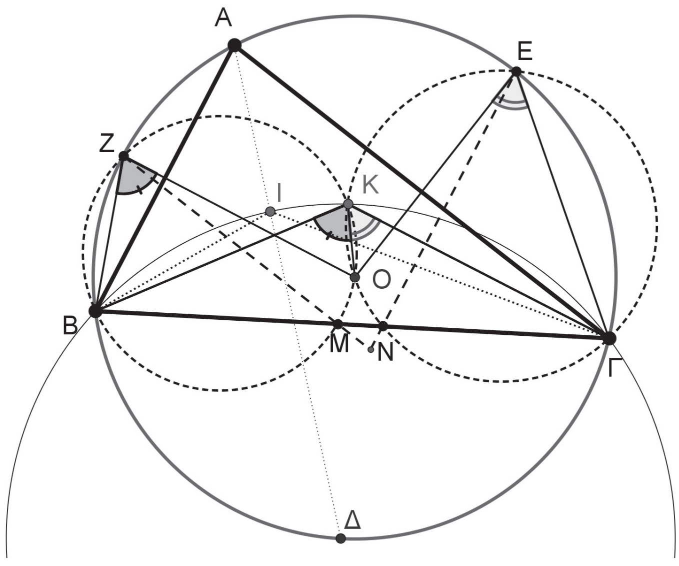
β) Επειδή το σημείο I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{I}B = \Delta\hat{B}I = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} \text{ και } \Delta\hat{I}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}I = \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι $\Delta B = \Delta I = \Delta\Gamma$ και επίσης εύκολα προκύπτει ότι: $B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία B, I, K, Γ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι

$$B\hat{K}\Gamma = \hat{A} + \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} = B\hat{I}\Gamma.$$



Σχήμα 5

Το τρίγωνο ΟΒΖ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OB}=\mathrm{OZ}=R)$, με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z}=\hat{\Gamma}$. Άρα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O}=90^o-\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$. Το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O\Gamma}=\mathrm{OE}=R)$, με $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}=\hat{\mathrm{B}}$. Άρα $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O}=90^o-\dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B}+\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O}+\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O}=90^o-\frac{\hat{\Gamma}}{2}+90^o-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$
$$=180^o-\left(90^\circ-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right)=90^\circ+\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα x^2+3x+2 και x^2+x-2 έχουν παράγοντα το $x+2$**,** οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+2\right)^4\left[\left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^4=0 \text{ ή } \left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } 2x^4+12x^2-14=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^4+6x^2-7=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^2=1 \text{ ή } x^2=-7 \text{ (αδύνατη)}$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

2^{ος} τρόπος

Αν θέσουμε $a=x^2+3x+2,\ b=x^2+x-2$, τότε $a-b=2x+4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$a^4+b^4=\left(a-b\right)^4 \Leftrightarrow a^4+b^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

$$\Leftrightarrow -ab\left(2a^2-3ab+2b^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } 2a^2-3ab+2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } a=b=0,$$

αφού η εξίσωση $2a^2-3ab+2b^2=0,$ αν $ab\neq 0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2u^2-3u+2=0,\ u=\frac{a}{b},$$

η οποία δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } a=b=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \text{ ή } x^2+x-2=0 \text{ ή } x^2+3x+2=x^2+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=-2 \text{ (διπλή)}$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4)}$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R},$, αν το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda\\ 2x-y=-\lambda\end{array}\right\}, \qquad (\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, δια κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda \\ 2x-y=-\lambda \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha\left(x^2+\left(2x+\lambda\right)^2\right)+2x+2x+\lambda=\lambda \\ y=2x+\lambda \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 5\alpha x^2+4\left(\alpha\lambda+1\right)x+\alpha\lambda^2=0 & (1) \\ y=2x+\lambda & (2) \end{matrix}\right\}$$

Αν ήταν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 16\left(\alpha\lambda+1\right)^2-20\alpha^2\lambda^2=4\left(-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4\right)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4\geq 0 . \qquad (3)$$

Όμως , το τριώνυμο $-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4$ έχει διακρίνουσα $\Delta'=80\alpha^2>0$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω $\lambda_1<0<\lambda_2$ (αφού είναι $\lambda_1\lambda_2=-\dfrac{4}{\alpha^2}<0$).

Επομένως θα έχουμε $-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4<0$, για $\lambda<\lambda_1$ ή $\lambda>\lambda_2$, άτοπο.

Για $\alpha=0$ η εξίσωση (1) έχει τη λύση $x=0$, οπότε προκύπτει ότι $y=\lambda$ και το σύστημα έχει τη λύση $\left(x,y\right)=\left(0,\lambda\right)$. Άρα είναι $\alpha=0$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=a_n-a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=a_1-a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0,ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n>10^3$ και $S_{n+1}\leq 8\cdot 10^3$.

Λύση

1. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1=\omega,\ d_n=d_1+\left(n-1\right)\omega=n\omega, n=2,3,\dots ..$$

οπότε θα είναι:

$$d_1+d_2+...+d_n=\left(a_1-a_0\right)+\left(a_2-a_1\right)+...+\left(a_n-a_{n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \omega+2\omega+...+n\omega=a_n-a_0 \Leftrightarrow a_n=a_0+\left(1+2+...+n\right)\omega$$

$$\Leftrightarrow a_n=a_0+\frac{n\left(n+1\right)}{2}\omega.$$

Για το άθροισμα S_{n+1} έχουμε:

$$S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n=(n+1)a_0+\left(\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\ldots+\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\left(1^2+1\right)+\left(2^2+2\right)+\ldots+\left(n^2+n\right)\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\omega+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\omega.$$

2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, τότε έχουμε $\omega=6$ και

$$a_n=1+3n(n+1),\ S_{n+1}=n+1+n(n+1)(n+2)=(n+1)\left[1+n(n+2)\right]=(n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$a_n>10^3 \text{ και } S_{n+1}\le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow a_n=1+3n(n+1)>10^3,\ S_{n+1}=(n+1)^3\le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow$$

$$n(n+1)>333,\ n+1\le 2\cdot 10 \Leftrightarrow n>18,\ n\le 19 \Leftrightarrow n=18 \text{ ή } n=19.$$

αφού είναι $17\cdot 18=306,\ 18\cdot 19=342$.

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος n είναι ο 18.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$ στο σημείο K και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$ στο σημείο M. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία $\mathrm{A,I,\Lambda,M}$ και $\mathrm{A,I,K,N}$ είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω) (c_1) και (c_2) αντίστοιχα, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

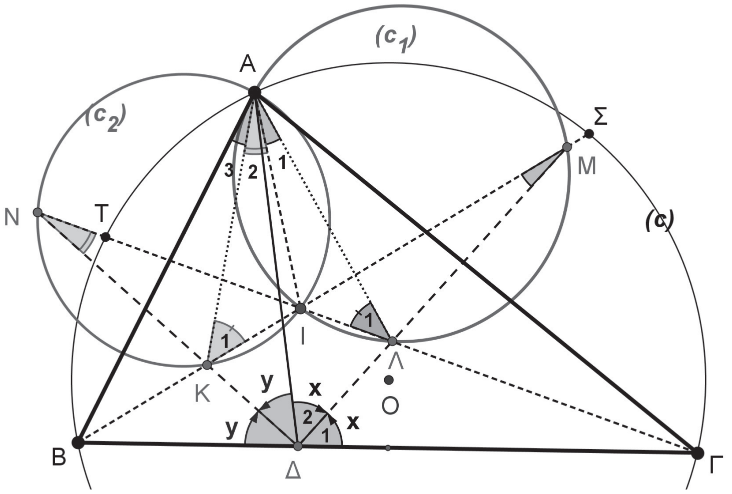
β) Αν η $\mathrm{A\Delta}$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, που αντιστοιχεί στη κορυφή A τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

α) Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία K,Λ είναι τα έκκεντρα των τριγώνων $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ αντίστοιχα.

Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}}_1=\mathrm{I\hat{A}\Gamma}-\Lambda\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\frac{\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma}{2}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\frac{180^0-2\hat{x}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-90^o+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\hat{x}=\hat{x}-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$



Σχήμα 6

Από το τρίγωνο $\mathrm{M\Delta B}$ έχουμε: $\hat{x} = \hat{\mathrm{M}} + \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{M}} = \hat{x} - \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$, δηλαδή $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{M}} = \hat{x} - \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο $\mathrm{AI\Lambda M}$ είναι εγγράψιμο.

Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}}_2 = \mathrm{I\hat{A}B} - \mathrm{K\hat{A}B} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{\mathrm{\Delta\hat{A}B}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{180^0 - 2\hat{y} - \hat{\mathrm{B}}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - 90^o + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} + \hat{y} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από το τρίγωνο $\mathrm{N\Delta\Gamma}$ έχουμε: $\hat{y} = \hat{\mathrm{N}} + \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{N}} = \hat{y} - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$, δηλαδή $\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\mathrm{N}} = \hat{y} - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο AIKN είναι εγγράψιμο.

β) Εφόσον I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\mathrm{A\hat{I}B} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}}{2} = 90^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } \mathrm{A\hat{I}\Gamma} = \hat{\mathrm{B}} + \frac{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\Gamma}}{2} = 90^o + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}.$$

Από το τρίγωνο AIK έχουμε:

$$\hat{\mathrm{K}}_1 = 180^o - \mathrm{A\hat{I}B} - \hat{\mathrm{A}}_2 = 180^o - 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\mathrm{N}} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{y} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^o - \hat{y}.$$

Από το τρίγωνο $\mathrm{AI\Lambda}$ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1 = 180^o - \mathrm{A\hat{I}\Gamma} - \hat{\mathrm{A}}_1 = 180^o - 90^o - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} - \hat{\mathrm{M}} = 90^o - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} - \hat{x} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = 90^o - \hat{x}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{B\Gamma}$ τότε $\hat{x} = \hat{y} = 45^o$, οπότε $\hat{\mathrm{K}}_1 = \hat{\Lambda}_1$.

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες $\hat{\mathrm{K}}_1, \hat{\Lambda}_1$ βαίνουν στη κοινή χορδή AI).

Παρατηρήσεις

α) Τα κέντρα των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκονται επάνω στην $\Sigma\mathrm{T}$.

β) Το σημείο A είναι το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου $\mathrm{\Delta KI\Lambda MN}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right).$$

Λύση

$$A=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)=\frac{88}{5}\cdot\frac{5}{44}-\frac{39}{5}\cdot\frac{5}{39}=2-1=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$B=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}.$$

Λύση
Είναι $\text{ΜΚΔ}(12,30,54)=6$. Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε $\kappa=2$ ή $\kappa=3$.

Για $\kappa=2$ έχουμε: $B=\dfrac{2-\frac{2}{2}}{2-\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{3-2}{2}}{2}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{8}{3}.$

Για $\kappa = 3$ ο διαιρέτης $\dfrac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$ της παράστασης Β γίνεται $\dfrac{\frac{3-3}{2}}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$, ενώ ο διαιρετέος γίνεται $\dfrac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{5} \neq 0$, οπότε η παράσταση Β δεν ορίζεται.

Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Λύση

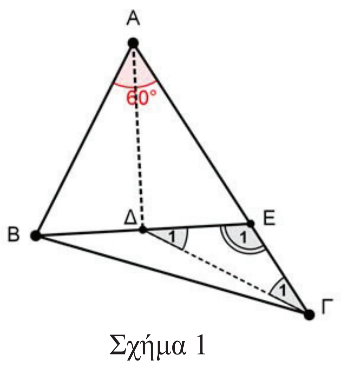
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι $2{,}5 \cdot \dfrac{6}{100} = 0{,}15$ ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι $2{,}5 - 0{,}15 = 2{,}35$ ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι $1050 + 407 = 1457$ ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει $1457 : 2{,}35 = 620$ κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει $800 \cdot \dfrac{8}{100} = 64$ κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό $800 - (620 + 64) = 116$ κιλά λάδι.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $A\Gamma = \dfrac{3}{2} \cdot AB$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $AE = AB$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με α το μήκος του τμήματος AB, δηλαδή: $AB = \alpha$.

Εφόσον $A\Gamma = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}\alpha$ και $AE = AB = \alpha$, έχουμε:

$$E\Gamma = A\Gamma - AE = \frac{3}{2}\alpha - \alpha = \frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($AB = AE$) και η γωνία του $\hat{A}$ είναι 60^o, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του $A\Delta$ είναι και διάμεσος.

Άρα είναι $\Delta E = \frac{\alpha}{2}$ και το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές, αφού $E\Gamma = E\Gamma = \frac{\alpha}{2}$.

Η γωνία $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου ABE. Άρα έχουμε

$$\hat{E}_1 = 180^\circ - A\hat{E}B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

οπότε : $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^o$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot \left(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3\right)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έχουμε:

$$x = 2^{-10}, y = 4^{-8} = \left(2^2\right)^{-8} = 2^{-16}, z = 8^{-6} = \left(2^3\right)^{-6} = 2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$A = x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182} = \left(2^{-10}\right)^2 \cdot \left(2^{-16}\right)^4 \cdot \left(2^{-18}\right)^6 \cdot 2^{182}$$
$$= 2^{-20} \cdot 2^{-64} \cdot 2^{-108} \cdot 2^{182} = 2^{-10}.$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\Pi = 3 \cdot \left(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3\right)^{-1} = 3 \cdot \left(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^4 \cdot 3^6\right)^{-1} = 3 \cdot \left[2^2 \cdot 3^3 \left(13 + 2^2 \cdot 3^3\right)\right]^{-1}$$
$$= 3 \cdot \left(2^2 \cdot 3^3 \cdot 121\right)^{-1} = 3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 121^{-1} = 2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 11^{-2}.$$

Άρα έχουμε

$$K = \frac{2^{-10}}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 121^{-1}} = \frac{3^2 \cdot 121}{2^8} = \frac{3^2 \cdot 11^2}{2^8} = \left(\frac{33}{2^4}\right)^2 = \left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha(x-3) + 2(\alpha - 1).$$

Λύση

Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4\cdot 3-5\alpha+2<\alpha(3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow 12-5\alpha+2<2\alpha-2\Leftrightarrow 16<7\alpha\Leftrightarrow \alpha>\frac{16}{7}.$$

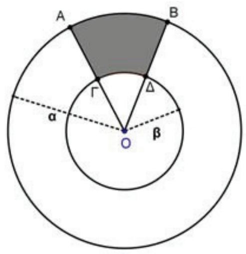
Ο αριθμός -3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4\cdot(-3)-5\alpha+2<\alpha(-3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow -12-5\alpha+2<-6\alpha+2\alpha-2.$$

$$\Leftrightarrow -8<\alpha\Leftrightarrow \alpha>-8$$

Επομένως οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης , όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις $\alpha>\frac{16}{7}$ και $\alpha>-8$, δηλαδή όταν $\alpha>\frac{16}{7}$.

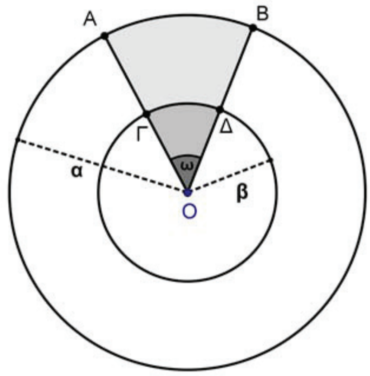
Πρόβλημα 3



Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega=\mathrm{A\hat{O}B}$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$

Λύση



Σχήμα 2

Το εμβαδόν του χωρίου ΑΒΔΓ ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων $\left(\mathrm{O},\widehat{\mathrm{AB}}\right)$ και $\left(\mathrm{O},\widehat{\Gamma\Delta}\right)$, δηλαδή είναι

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta\Gamma})=\pi\alpha^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}-\pi\beta^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\omega}{2}.$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, ισούται με $\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)=\pi(\alpha^2-\beta^2)$, οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta\Gamma})}{\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{(\alpha^2-\beta^2)\omega}{2\pi(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}.$$

Επειδή είναι $\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 2\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, έχουμε

$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)^3=\left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{1}{512}.$$

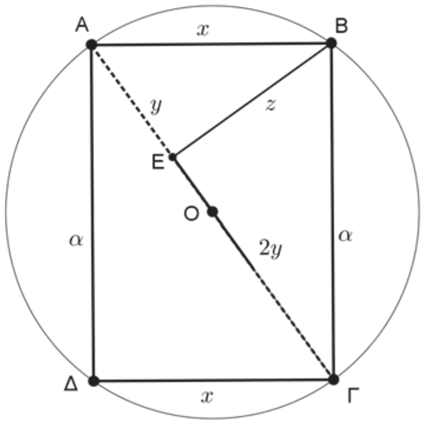
Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΔ=\alpha$ cm και $ΑΒ<ΑΔ$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο $ΑΓ$ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $ΕΓ=2\cdot ΑΕ$, να βρείτε:

(i) το μήκος της πλευράς ΑΒ

(ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Λύση



Σχήμα 3

(i) Έστω $ΑΒ=ΓΔ=x$, $ΑΕ=y$, $ΕΓ=2y$ και $ΒΖ=z$.

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα $ΑΒΕ$ έχουμε:

$$x^2=y^2+z^2\Rightarrow z^2=x^2-y^2. \qquad (1)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα $ΒΓΕ$ έχουμε:

$$\alpha^2=4y^2+z^2\Rightarrow z^2=\alpha^2-4y^2. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha^2-4y^2=x^2-y^2\Rightarrow x^2=\alpha^2-3y^2 \qquad (3)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο $ΑΔΓ$ έχουμε:

$$9y^2=x^2+\alpha^2\Rightarrow x^2=9y^2-\alpha^2. \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$9y^2-\alpha^2=\alpha^2-3y^2\Rightarrow y^2=\frac{\alpha^2}{6}\Rightarrow y=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6},$$

οπότε λαμβάνουμε και

$$x^2=\alpha^2-3\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2=\alpha^2-3\cdot\frac{\alpha^2}{6}=\frac{\alpha^2}{2}\Rightarrow x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) Διάμετρος του κύκλου είναι η $ΑΓ=3y$, οπότε η ακτίνα του είναι $R=\frac{3}{2}y=\frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$. Το εμβαδό του κύκλου είναι $E=\pi R^2=\pi\cdot\frac{6\alpha^2}{16}=\frac{3\pi\alpha^2}{8}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Λύση

Η εξίσωση $x(x-2)=24 \Leftrightarrow x^2-2x-24=0$ είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα $\Delta=100$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x=\frac{2\pm 10}{2} \Leftrightarrow x=6 \text{ ή } x=-4.$$

Δεκτή είναι η ρίζα $x=-4$, γιατί $(-4)^2=16<25$, ενώ $6^2=36>25$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Λύση

Ο αριθμητής της παράστασης γράφεται:

$$\begin{aligned}
&\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)\\
&=\alpha^3+\beta^3-(\alpha^2-\beta^2)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta+\beta\alpha-2\beta^2)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta)\\
&=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)\right]\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1).
\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής της παράστασης γράφεται:

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)$$

Άρα, αφού $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$, έχουμε

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}=\alpha-\beta.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\lambda^2-4(\lambda^2-1)=4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = -\lambda + 1$ και $x_2 = -\lambda - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(-5,2)$, όταν

$$-5 < -\lambda + 1 < 2 \text{ και } -5 < -\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow -6 < -\lambda < 1 \text{ και } -4 < -\lambda < 3$$
$$\Leftrightarrow -1 < \lambda < 6 \text{ και } -3 < \lambda < 4 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

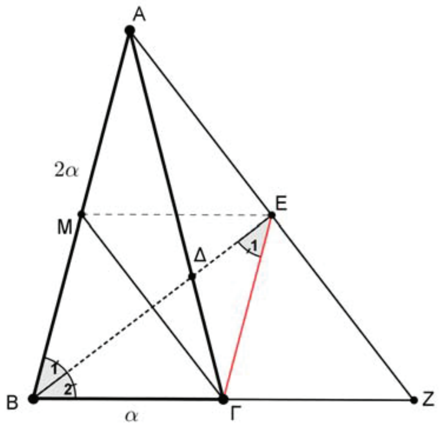
$$(-\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 1)^2 = 20 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 = 20 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 3,$$

Επομένως, αφού πρέπει $-1 < \lambda < 4$ το ζητούμενο ισχύει για $\lambda = 3$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = \alpha$ και $ΑΒ = ΑΓ = 2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή $ΕΓ // ΑΒ$, θα ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ και αφού η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, θα είναι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Επομένως έχουμε $\hat{B}_2 = \hat{E}_1$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή: $ΒΓ = ΓΕ = \alpha$.

Στη συνέχεια μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.

1ος τρόπος. Λόγω της παραλληλίας των ΕΓ, ΑΒ θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΖ, από τα οποία λαμβάνουμε:

$$\frac{ΓΖ}{ΒΖ} = \frac{ΕΓ}{ΑΒ} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow ΒΖ = 2 \cdot ΓΖ$$

Επομένως το σημείο Γ είναι το μέσο της ΒΖ, δηλαδή $ΒΖ = 2 \cdot ΒΓ = 2\alpha$. Επειδή είναι και $ΑΒ = 2\alpha$ το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΒΓΕΜ είναι ρόμβος, διότι: έχει $ΒΜ = // ΓΕ = \alpha$ (οπότε ΒΓΕΜ παραλληλόγραμμο) και $ΒΓ = ΓΕ = \alpha$ (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες). Άρα $ΜΕ = ΒΖ$ και κατά συνέπεια το Ε είναι μέσο του ΑΖ. Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΖ, η ΒΕ είναι διχοτόμος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\kappa\ \alpha \neq 0$ και $-1 < \alpha < 1$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha$,

όπου

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}},\ \mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Λύση

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι $1+\alpha > 0$ και $1-\alpha > 0$, οπότε

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha+1-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$\mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha-(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha = \frac{1}{\alpha} - 1 + \alpha = \frac{1-\alpha+\alpha^2}{\alpha}.$$

Επειδή είναι $1-\alpha+\alpha^2 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, για όλες τις τιμές του α, έπεται ότι η παράσταση Κ έχει το πρόσημο του α, δηλαδή θετικό, αν $0 < \alpha < 1$ και αρνητικό, αν $-1 < \alpha < 0$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\kappa^2 - 4\left(-1+\kappa^2\right) = 4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = \kappa + 1$ και $x_2 = \kappa - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(0,5)$, όταν

$$0 < \kappa + 1 < 5 \text{ και } 0 < \kappa - 1 < 5 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 4 \text{ και } 1 < \kappa < 6 \Leftrightarrow 1 < \kappa < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\kappa+1)^4 + (\kappa-1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2\kappa^4 + 12\kappa^2 + 2 = 82 \Leftrightarrow \kappa^4 + 6\kappa^2 - 40 = 0,$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\kappa^2 = 4 \text{ ή } \kappa^2 = -10 \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = -2.$$

Επομένως για $\kappa = 2$ ισχύει το ζητούμενο, αφού η τιμή $\kappa = -2$ απορρίπτεται λόγω της σχέσης $1 < \kappa < 4$.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3}=\frac{y}{2012y+5}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Λύση
Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+3}{x}=\frac{2012y+5}{y}=\frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012+\frac{3}{x}=2012+\frac{5}{y}=2012+\frac{7}{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{5}{y}=\frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{3}{x}=\frac{5}{y}=\frac{7}{z}=\frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x=3\lambda,\ y=5\lambda,\ z=7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747 θα έχουμε

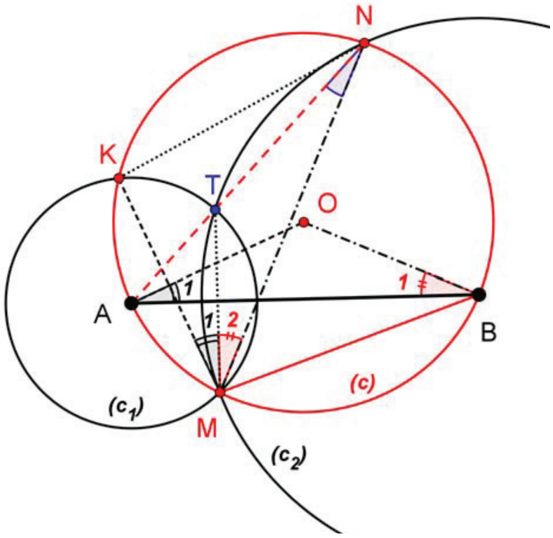
$$x^2+y^2+z^2=83\lambda^2 \,|\, 747 \Rightarrow \frac{747}{83\lambda^2}=\kappa\in\mathbb{Z}\Rightarrow \frac{9}{\lambda^2}=\kappa\in\mathbb{Z},$$

Επομένως οι μοναδικές αποδεκτές τιμές για το λ^2 είναι οι 1, 3 και 9.

- Για $\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$ έπεται ότι $(x,y,z)=(3,5,7)$ ή $(x,y,z)=(-3,-5,-7)$.
- Για $\lambda^2=3\Leftrightarrow\lambda=\pm\sqrt{3}$ προκύπτουν για τα x, y, z μη ακέραιες τιμές, άτοπο.
- Για $\lambda^2=9\Leftrightarrow\lambda=\pm3$ έπεται ότι $(x,y,z)=(9,15,21)$ ή $(x,y,z)=(-9,-15,-21)$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K και N αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Λύση
Γνωρίζουμε ότι η διάκεντρος τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 5

Η KM είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_1(A,AM)$. Άρα

η OA είναι μεσοκάθετη της KM. (1)

Η MT είναι κοινή χορδή των κύκλων $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η AB είναι μεσοκάθετη της MT. (2)

Η MN είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η OB είναι μεσοκάθετη της MN. (3)

Από τις καθετότητες (1) και (2), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{A}_1 = \hat{M}_1$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες).

Από τις καθετότητες (2) και (3), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{B}_1 = \hat{M}_2$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες)

και τελικά από το ισοσκελές τρίγωνο OAB, έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1.$$

Οι τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών μας οδηγούν στην ισότητα: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

Η γωνία $A\hat{N}M$ και $A\hat{B}M$ είναι ίσες, διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο τόξο $\overparen{AM}$.

Η γωνία $T\hat{N}M$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο $c_2(B,BM)$, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας $T\hat{B}M$, δηλαδή: $T\hat{N}M = A\hat{B}M$

Άρα $A\hat{N}M = T\hat{N}M$ και κατά συνέπεια τα σημεία A, T, N είναι συνευθειακά.

Ισχύει τώρα η ισότητα $A\hat{N}K = A\hat{N}M$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα AM και AK). Επομένως η NA είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{N}M$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Λύση
Επειδή $1+2+3+...+x=\dfrac{x(x+1)}{2}$, για κάθε θετικό ακέραιο x, η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{x(x+1)}=\frac{2011}{2013}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{2011}{2013}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x+1}=\frac{2011}{2013}\Leftrightarrow \frac{2}{x+1}=\frac{2}{2013}\Leftrightarrow x=2012.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Λύση
Από την υπόθεση έπεται ότι η εξίσωση

$$ax^2+bx+c=cx+b\Leftrightarrow ax^2+(b-c)x+(c-b)=0$$

έχει μοναδική λύση. Επομένως η διακρίνουσά της ισούται με 0, δηλαδή

$$\Delta=(b-c)^2+4a(b-c)=0\Leftrightarrow (b-c)(b-c+4a)=0\Leftrightarrow c-b=4a,$$

αφού $b\neq c$.
Όταν $c-b=4a$ η εξίσωση γίνεται:

$$ax^2-4ax+4a=0\Leftrightarrow a\left(x^2-4x+4\right)=0\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2.$$

Άρα το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το $\mathrm{M}(2,2c+b)$.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Λύση
Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+y}{x}=\frac{2012y+z}{y}=\frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012+\frac{y}{x}=2012+\frac{z}{y}=2012+\frac{7}{z}\Leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{7}{z}=\frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x=7\lambda^3$, $y=7\lambda^2$, $z=7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147 θα έχουμε

$$x^2+y^2+z^2=147\Leftrightarrow 49\lambda^6+49\lambda^4+49\lambda^2=147$$

$$\Leftrightarrow \lambda^6+\lambda^4+\lambda^2=3\Leftrightarrow \lambda^6-1+\lambda^4-1+\lambda^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^4+\lambda^2+1+\lambda^2+1+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^4+2\lambda^2+3\right)=0\Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=1,$$

αφού η εξίσωση $\lambda^4+2\lambda^2+3=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-8<0$.

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες ακεραίων είναι:

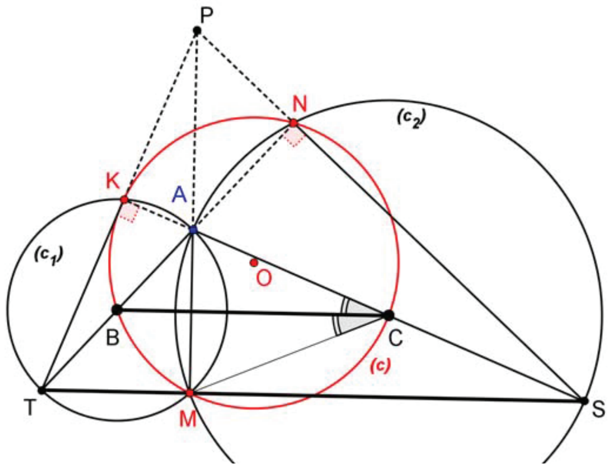
$$\left(x,y,z\right)=\left(7,7,7\right) \text{ ή } \left(x,y,z\right)=\left(-7,-7,-7\right)$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM, KT, NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι τα σημεία K, A, C, S και N, A, B, T είναι συνευθειακά.



Σχήμα 6

Η AM είναι η κοινή χορδή των κύκλων $c_1(B,BM)$ και $c_2(C,CM)$.

Άρα η διάκεντρός τους BC είναι μεσοκάθετη της AM.

Η BC όμως είναι παράλληλη με την TS (από την κατασκευή του σχήματος). Άρα η TS είναι κάθετος με την AM ($AM \perp TS$). Δηλαδή $A\hat{M}T = A\hat{M}S = 90^o$.
Από την τελευταία ισότητα γωνιών προκύπτει ότι τα σημεία A,T και A,S είναι αντιδιαμετρικά στους κύκλους $c_1(B,BM)$ και $c_2(C,CM)$ αντίστοιχα.
Επομένως, τα σημεία A,C,S και A,B,T είναι συνευθειακά.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K,A,C και N,A,B είναι συνευθειακά.
Στον κύκλο $c(O,R)$, το σημείο B είναι μέσο του τόξου KM (διότι BM, BK είναι ακτίνες του κύκλου $c_1(B,BM)$). Άρα οι εγγεγραμμένες στα τόξα BM και BK γωνίες, θα είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως

$$K\hat{C}B = M\hat{C}B \qquad (1).$$

Εφόσον η διάκεντρος BC είναι μεσοκάθετη της AM, τα τρίγωνα ABC και MBC είναι ίσα, οπότε :

$$A\hat{C}B = M\hat{C}B \qquad (2).$$

Από τις ισότητες των γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $K\hat{C}B = A\hat{C}B$ και κατά συνέπεια τα σημεία K,A,C είναι συνευθειακά.
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία N,A,B είναι επίσης συνευθειακά.
Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $AMTK$ και $AMSN$ συμπεραίνουμε ότι:

$$A\hat{K}T = A\hat{N}S = 90^o.$$

Επομένως προκύπτουν οι καθετότητες $TK \perp KS$ και $TN \perp NS$.
Σε συνδυασμό τώρα με την καθετότητα $AM \perp TS$, συμπεραίνουμε ότι τα AM, KT, NS είναι ύψη του τριγώνου ATS, οπότε θα συγκλίνουν στο ορθόκεντρό του.

Παρατηρήσεις

Έστω P το ορθόκεντρο του τριγώνου ATS. Τότε τα σημεία P,A,T,S αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα και κατά συνέπεια το σημείο A είναι ορθόκεντρο του τριγώνου PTS.

Το τρίγωνο KMN είναι ορθικό του τριγώνου PTS και κατά συνέπεια το σημείο A είναι έκκεντρο του τριγώνου KMN.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9}\ .$$

Λύση
$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} = 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{16}{9} \cdot 8 - \frac{74}{9}$$
$$= 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{128}{9} - \frac{74}{9} = 94 + \frac{54}{9} = 94 + 6 = 100.$$

Πρόβλημα 2
Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:
(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.
(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.
(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Λύση
(α) Μετά την αγορά τροφίμων έμειναν στον οικογενειάρχη 1360 ευρώ. Αυτά τα χρήματα αποτελούν το 85% των χρημάτων που του έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή. Άρα το 85% αντιστοιχεί σε ποσόν 1360 ευρώ, οπότε το ποσόν που του έμεινε μετά την αγορά του υπολογιστή είναι
$$1360 \cdot \frac{100}{85} = \frac{16 \cdot 100}{1} = 1600 \text{ ευρώ.}$$
Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:
το $(100 - 20)\% = 80\%$ του ποσού που πήρε αντιστοιχούν σε $1600\,\text{ευρώ}$.
Άρα τα χρήματα που πήρε από την τράπεζα είναι:
$$1600 \cdot \frac{100}{80} = 2000 \text{ ευρώ.}$$

(β) Τα τρόφιμα στοίχισαν το 15% των χρημάτων που έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή, δηλαδή

$$1600 \cdot \frac{15}{100} = 240 \text{ ευρώ.}$$

Το ποσό αυτό μπορεί να βρεθεί και με την αφαίρεση: $1600 - 1360 = 240$.

(γ) Ο οικογενειάρχης από τα 2000 ευρώ που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε $2000 - 1360 = 640$ ευρώ, δηλαδή ποσοστιαία επί τις εκατό

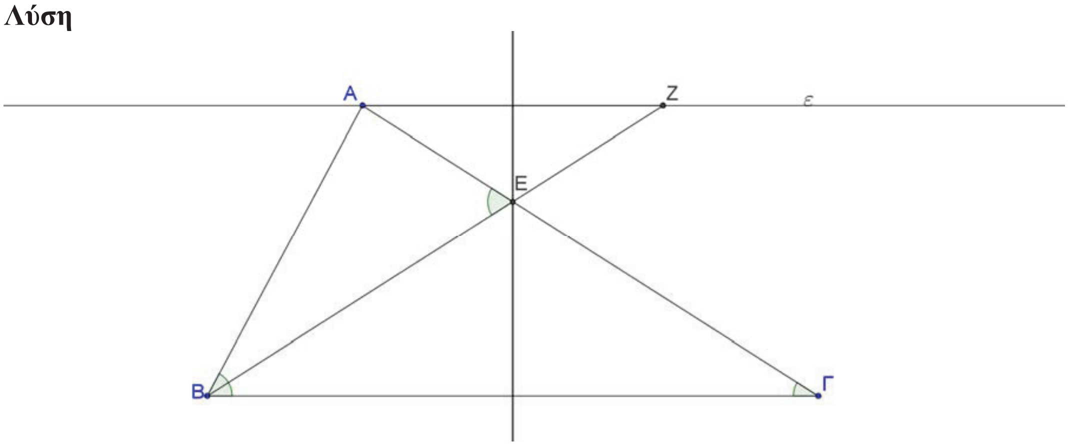
$$\frac{640}{2000} \cdot 100 = \frac{64}{2} = 32.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $AZ = AB$, **(β)** $A\hat{E}B = \hat{B}$.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη της ΒΓ έπεται ότι $EB = E\Gamma$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ προκύπτει $E\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Επειδή $AZ \parallel B\Gamma$ έπεται ότι: $E\hat{B}\Gamma = A\hat{Z}B$ (εντός εναλλάξ γωνίες). Από τη σχέση της υπόθεσης $\hat{B} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$, έχουμε:

$$A\hat{Z}B = E\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} = A\hat{B}Z.$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΖ.

(β) Η γωνία $A\hat{E}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΒΓ, οπότε

$$A\hat{E}B = E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{\Gamma} = \hat{B}.$$

Πρόβλημα 4

Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω α, β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, Τότε θα είναι $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\upsilon \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \upsilon .$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων)}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\upsilon) = 7 \cdot (108 + \upsilon) \Leftrightarrow \text{ (από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\upsilon = 756 + 7\upsilon \Leftrightarrow 18\upsilon = 36 \Leftrightarrow \upsilon = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110 .$$

2ος τρόπος.

Έχουμε: $\alpha = 18 \cdot 8 + \upsilon_1$, με $\upsilon_1 = 0,1,2,...,17$ και $\beta = 12 \cdot 9 + \upsilon_2$, με $\upsilon_2 = 0,1,2,...,11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\upsilon_1 = 5\upsilon_2$ είναι τα :

$$(\upsilon_1, \upsilon_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10,2)$ μας δίνει $\alpha = 154$ και $\beta = 110$ και το κλάσμα $\dfrac{154}{110}$ που είναι ισοδύναμο με το $\dfrac{7}{5}$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Λύση

Έχουμε: $4 < 5$, οπότε $\sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5}$. Είναι

$2,1^2 = 4,41, 2,2^2 = 4,84$ και $2,3^2 = 5,29$, οπότε η ζητούμενη τιμή του α είναι $\alpha = 2,2$.

Με αντικατάσταση βρίσκουμε: $\mathrm{A} = 2$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta} .$$

Λύση

Έχουμε $-4 < 1 - 2\beta < 5 \Leftrightarrow -5 < -2\beta < 4 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{2} < \dfrac{-2\beta}{-2} < \dfrac{-5}{-2} \Leftrightarrow -2 < \beta < \dfrac{5}{2}$. Επειδή ο β είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\beta = 1$ ή $\beta = 2$.

- Για $\beta = 1$ η ανίσωση γίνεται: $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < x \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < x \Leftrightarrow x > 1$.
- Για $\beta = 2$ η ανίσωση γίνεται:
  $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow 0 \cdot x < -1$, η οποία είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χΟψ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45^0 και επίσης διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(2,-6)$. Το σημείο Α ανήκει στον άξονα $\chi'\chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο Β ανήκει στον άξονα $\psi'\psi$ και στην ευθεία (ε).

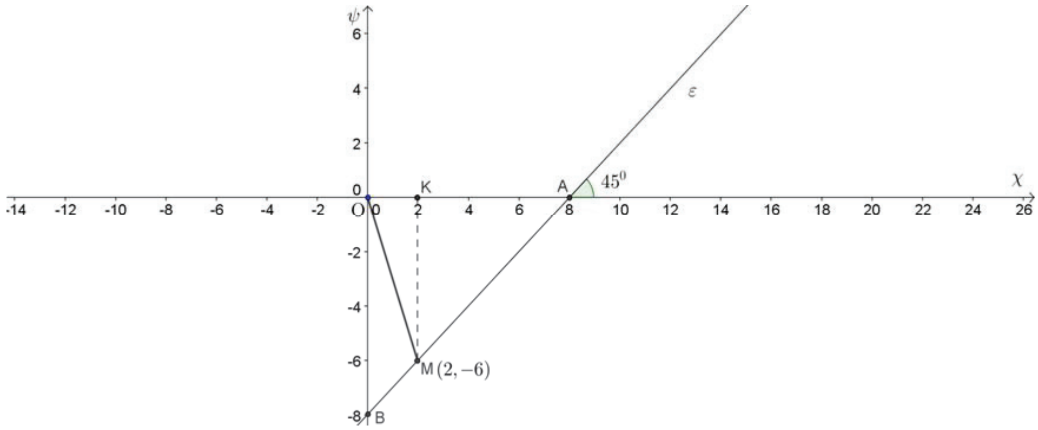
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ.

Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή $\psi = \alpha\chi + \beta$, όπου $\alpha = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$. Επειδή η ευθεία περνάει από το σημείο $\mathrm{M}(2,-6)$ έχουμε ότι $-6 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -8$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι : $\psi = \chi - 8$



Σχήμα 2

β) Τα σημεία τομής με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ είναι τα $\mathrm{A}(8,0)$ και $\mathrm{B}(0,-8)$. Άρα έχουμε

$$(\mathrm{OAB}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32 \text{ τετρ. μονάδες}$$

γ) Αν Κ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$, τότε το τρίγωνο ΚΜΑ είναι ορθογώνιο στο Κ και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη $\mathrm{KM} = 6$ και $\mathrm{KA} = 6$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε

$$\mathrm{AM} = \sqrt{\mathrm{KM}^2 + \mathrm{KA}^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Ομοίως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΑΒ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Ο, έστω υ, έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{OAM})}{(\mathrm{OAB})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AM}\cdot \upsilon}{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \upsilon}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{6\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$(\mathrm{OAM})=\frac{3}{4}(\mathrm{OAB})=\frac{3}{4}\cdot 32=24 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

Παρατήρηση:

Το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΜ, μπορούμε να το υπολογίσουμε, παρατηρώντας ότι η ΚΜ είναι ύψος του τριγώνου ΟΑΜ (έχει μήκος 6) και η ΟΑ βάση με μήκος 8.

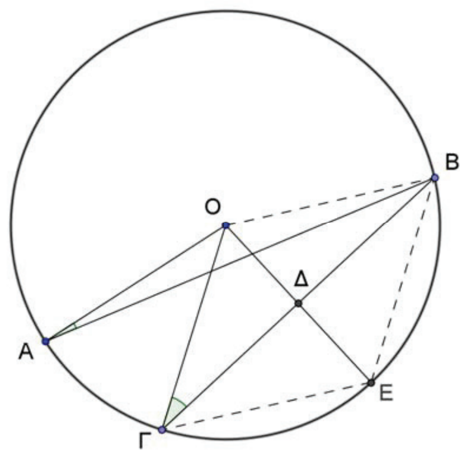
Άρα $(\mathrm{OAM})=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$ **.**

6. Σε κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $\mathrm{O\hat{A}B}=10^\circ$ και $\mathrm{O\hat{\Gamma}B}=30^\circ$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=R)$, έπεται ότι:

$$\mathrm{O\hat{B}A}=\mathrm{O\hat{A}B}=10^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O\Gamma}=\mathrm{OB}=R)$, έπεται ότι:

$$\mathrm{O\hat{\Gamma}B}=\mathrm{O\hat{B}\Gamma}=30^\circ.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=\mathrm{O\hat{B}\Gamma}-\mathrm{O\hat{B}A}=30^\circ-10^\circ=20^\circ$ και $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}=40^\circ$.

(β) Το ύψος του τριγώνου ΟΓΒ είναι και διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{\Gamma\hat{O}B}$, οπότε $\mathrm{\Gamma\hat{O}\Delta}=90^\circ-\mathrm{O\hat{\Gamma}\Delta}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$, οπότε θα είναι και $\mathrm{\Gamma\hat{O}E}=60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισόπλευρο, οπότε $\mathrm{\Gamma E}=\mathrm{O\Gamma}=R$. Επειδή η ευθεία ΟΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $\mathrm{EB}=\Gamma\mathrm{E}=R$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΕΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες , δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $\mathrm{O}\Delta=\mathrm{O}\Gamma\cdot\eta\mu 30^{\circ}=R\cdot\frac{1}{2}=\frac{R}{2}$, οπότε $\left(\mathrm{OBE}\Gamma\right)=R\cdot\frac{R}{2}=\frac{R^2}{2}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\left\{\begin{matrix}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\\ \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\quad \text{και } \left(\Sigma_2\right)\ \left\{\begin{matrix}\alpha x+\beta y\ =4\\ 2\alpha x+3\beta y=-8\end{matrix}\right\}$$

έχουν την ίδια λύση $\left(x,y\right)$, να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{x}=\varphi$ και $\frac{1}{y}=\omega$, το σύστημα $\left(\Sigma_1\right)$ γίνεται:

$$\left\{\begin{matrix}\varphi+\omega=\frac{1}{4}\\ 3\varphi+4\omega=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\varphi=\frac{1}{4}-\omega\\ 3\left(\frac{1}{4}-\omega\right)+4\omega=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\varphi=\frac{1}{4}-\omega\\ \omega=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\varphi=\frac{1}{2}\\ \omega=-\frac{1}{4}\end{matrix}\right\},$$

οπότε το σύστημα $\left(\Sigma_1\right)$ έχει τη λύση: $\left(x,y\right)=\left(\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\omega}\right)=\left(2,-4\right)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα $\left(\Sigma_2\right)$, οπότε θα έχουμε;

$$\left\{\begin{matrix}2\alpha-4\beta\ =4\\ 4\alpha-12\beta=-8\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha-2\beta\ =2\\ \alpha-3\beta=-2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha-2\beta\ =2\\ -\beta=-4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha\ =10\\ \beta=4\end{matrix}\right\}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z ισχύει ότι:

$$z=2\left(x+y\right)\qquad \text{και}\qquad z=3\left(x-y\right).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y<x<z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα $\left(x,y,z\right)$ για την οποία: $x^2+y^2+z^2=680$.

Λύση

(α) Επειδή $z=3\left(x-y\right)>0\Rightarrow x-y>0$, έπεται ότι $x>y$.

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z=2\left(x+y\right)=3\left(x-y\right)\Leftrightarrow 2x+2y=3x-3y\Leftrightarrow x=5y,$$

οπότε προκύπτει: $z=2x+2y=12y$, οπότε $z-x=12y-5y=7y>0$, οπότε $z>x$.

Άρα έχουμε: $z>x>y\Leftrightarrow y<x<z$.

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι $y>0$, έχουμε:

$$x^2+y^2+z^2=680\Leftrightarrow 25y^2+y^2+144y^2=680\Leftrightarrow 170y^2=680\Leftrightarrow y^2=4\Leftrightarrow y=2.$$

Άρα είναι: $\left(x,y,z\right)=\left(10,2,24\right)$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A = 8x + 1$ και $B = 2x - 3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Λύση

Έστω $A = 8x + 1 = \alpha^2$ και $B = 2x - 3 = \beta^2$. Τότε λαμβάνουμε ότι:

$$x = \frac{\alpha^2 - 1}{8} = \frac{\beta^2 + 3}{2} \qquad (1)$$

και

$$\alpha^2 - 4\beta^2 = 13 \ . \qquad (2)$$

Από τη σχέση 92) έχουμε:

$$\alpha^2 - 4\beta^2 = 13 \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) = 13$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha + 2\beta = 13 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{matrix} \right\} \text{ή} \left\{ \begin{matrix} \alpha + 2\beta = -13 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{matrix} \right\} \text{ή} \left\{ \begin{matrix} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 13 \end{matrix} \right\} \text{ή} \left\{ \begin{matrix} \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha - 2\beta = -13 \end{matrix} \right\}$$

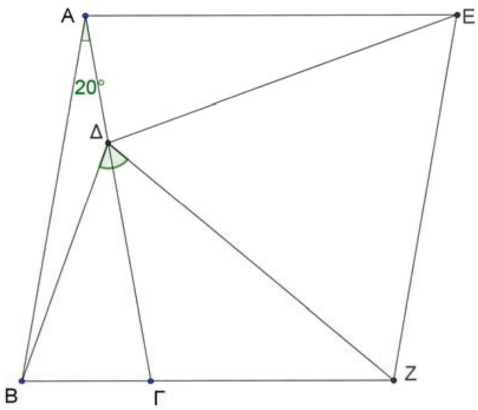
$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (7, 3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (-7, -3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (7, -3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (-7, 3).$$

Από όλα τα παραπάνω ζεύγη, από τις σχέσεις (1) προκύπτει ότι: $x = 6$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}} = 20^0$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$. Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε $\text{ΑΕ} \parallel \text{ΒΓ}$, $\text{ΑΕ} = \text{ΑΒ}$ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\text{Β}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ}$.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή είναι $\hat{\text{Α}} = 20^\circ$ και $\text{ΑΕ} \parallel \text{ΒΓ}$ έχουμε ότι:

$$\text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = \hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ .$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΑΔ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία $(\text{ΑΒ} = \text{ΕΑ}, \ \text{ΒΓ} = \text{ΑΔ})$ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες $\left(\text{Α}\hat{\text{Β}}\Gamma = \text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = 80^\circ\right)$.

Επομένως , έχουμε: $\mathrm{E\Delta = A\Gamma = AB}$, $\mathrm{A\hat{E}\Delta} = 20^\circ$.
Επειδή το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες $(\mathrm{AE = AB})$, είναι ρόμβος, οπότε $\mathrm{EZ = AB = E\Delta}$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές. Επιπλέον, ισχύει: $\mathrm{A\hat{E}Z} = \hat{\mathrm{B}} = 80^\circ$. Επομένως $\mathrm{\Delta\hat{E}Z = A\hat{E}Z - A\hat{E}\Delta} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισόπλευρο.
Τότε είναι: $\mathrm{B\hat{Z}\Delta = B\hat{Z}E - \Delta\hat{Z}E} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΖΔ $(\mathrm{ZB = AB = Z\Delta})$ προκύπτει ότι: $\mathrm{B\hat{\Delta}Z} = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:
$$\frac{9x^2+3x+1}{x} - \frac{27x}{9x^2+3x+1} \geq 6.$$
Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Λύση
Επειδή είναι $x>0$ θα είναι και $9x^2+3x+1>0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:
$$(9x^2+3x+1)^2 - 27x^2 \geq 6x(9x^2+3x+1)$$
$$\Leftrightarrow (9x^2+3x+1)^2 - 6x(9x^2+3x+1) - 27x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1) - 27x^2 \geq 0.$$
$$\Leftrightarrow (9x^2+1)^2 - 9x^2 - 27x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (9x^2+1)^2 - 36x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (9x^2-1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$
Η ισότητα ισχύει όταν $9x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$, αφού $x>0$.

Πρόβλημα 2
Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = \beta$.

Λύση
Αφού οι αριθμοί 1 και β είναι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε:
$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad (1)$$
$$\alpha\beta^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \qquad (2)$$
Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε
$$\alpha(\beta^2-1) + \beta(\beta-1) = 0 \Leftrightarrow (\beta-1)(\alpha\beta+\alpha+\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \alpha\beta+\alpha+\beta = 0.$$
Αν υποθέσουμε ότι είναι $\beta = 1$, τότε $\alpha+\gamma=-1$ και $\alpha+\gamma=0$, αδύνατο.
Άρα είναι $\beta \neq 1$, οπότε θα είναι:
$$\alpha\beta+\alpha+\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\beta}{\beta+1} = -1 + \frac{1}{\beta+1}.$$

Επειδή $\alpha \in \mathbb{Z}$ πρέπει: $\dfrac{1}{\beta+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta \in \{-2,0\}$. Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\beta = 0$, οπότε έχουμε: $\alpha+\gamma=0$ και $\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha=\gamma=0,$ το οποίο απορρίπτεται αφού από την υπόθεση έχουμε $\alpha \neq 0$.
- $\beta=-2$, οπότε έχουμε $\alpha+\gamma=2$ και $4\alpha+\gamma=-4 \Leftrightarrow \alpha=-2,\ \gamma=4$. Επομένως προκύπτει η τριάδα συντελεστών $(\alpha,\beta,\gamma)=(-2,-2,4)$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2+x-4}{x^2-x+2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Λύση
Θέλουμε να βρούμε για ποιους θετικούς ακεραίους λ έχει λύση ως προς x η εξίσωση

$$\frac{2x^2+x-4}{x^2-x+2}=\lambda \Leftrightarrow (2-\lambda)x^2+(1+\lambda)x-2(2+\lambda)=0.$$

Αν $\lambda=2$ προκύπτει από την εξίσωση η λύση $x=\dfrac{8}{3}$.
Αν $\lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση ως προς x, αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta=(\lambda+1)^2+8(4-\lambda^2)=-7\lambda^2+2\lambda+33=(-\lambda^2+2\lambda)+(33-6\lambda^2),$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda \geq 3$ και οι δύο παρενθέσεις είναι αρνητικές, οπότε $\Delta<0$.
Επομένως, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, διάφορος του 2, έπεται ότι: $\lambda=1$. Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2+2x-6=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{7}$.
Άρα για $x=\dfrac{8}{3}$ το κλάσμα παίρνει την ακέραια τιμή 2 και για $x=-1\pm\sqrt{7}$ παίρνει την ακέραια τιμή 1.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K,Λ,M,N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

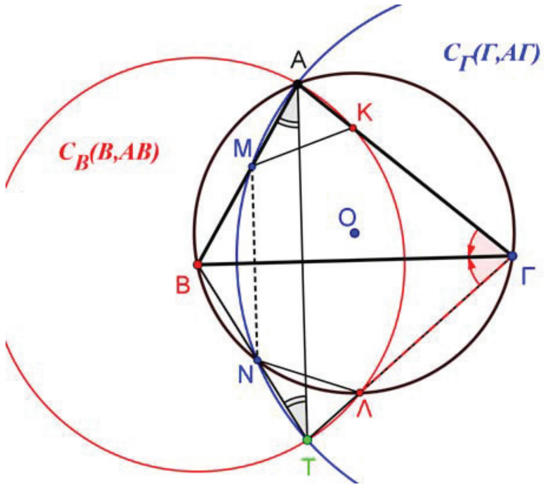
Λύση
Έστω T το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων C_A και C_B. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία T,Λ,Γ είναι συνευθειακά.
Οι χορδές BA και $B\Lambda$ του κύκλου C είναι ίσες μεταξύ τους, διότι είναι ακτίνες του κύκλου C_A, οπότε οι εγγεγραμμένες (στο κύκλο C) γωνίες που βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα, θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} \qquad (1).$$

Η $B\Gamma$ είναι διάκεντρος των κύκλων C_B και C_Γ, οπότε θα είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής AT και θα διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Gamma}T$, δηλαδή

$$B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}T = \hat{\Gamma} \qquad (2).$$

Άρα τα σημεία T, Λ, Γ είναι συνευθειακά.



Σχήμα 5

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία T, N, B είναι συνευθειακά.

Το τρίγωνο BAT είναι ισοσκελές ($BA = BT$). Άρα $M\hat{A}T = N\hat{T}A$, οπότε τα αντίστοιχα τόξα AN και MT (του κύκλου C_Γ) είναι ίσα μεταξύ τους.

Από την ισότητα των τόξων $AN = AM + MN$ και $MT = TN + MN$, προκύπτει η ισότητα των τόξων AM και TN. Άρα το τετράπλευρο $MATN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $MN \parallel AT$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $KAT\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $K\Lambda \parallel AT$. Άρα $MN \parallel K\Lambda$ και κατά συνέπεια το $MK\Lambda N$ είναι τραπέζιο και η $B\Gamma$ είναι κοινή μεσοκάθετη των παράλληλων πλευρών του.

Τα τρίγωνα AKM και $T\Lambda N$ είναι ίσα. Άρα το $MK\Lambda N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1.$$

Λύση

Περιορισμός: $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 5$. Η εξίσωση, για $x \leq 0$ ή $x \geq 5$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 + (x^2 - 5x) - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x^2 - 5x}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \ (\mathrm{E}_1) \text{ ή } x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \ (\mathrm{E}_2)$$

- $(\mathrm{E}_1): x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \ \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty),\ x \geq 1$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-5x,\ \text{με}\ x\geq 5 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3},\ x\geq 5,\ \text{απορρίπτεται.}$$

- $\left(\mathrm{E}_2\right): x-\sqrt{x^2-5x}=-1 \quad \Leftrightarrow x+1=\sqrt{x^2-5x}, x\in\left(-\infty,0\right]\cup\left[5,+\infty\right),\ x\geq -1$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-5x,\ \text{με}\ -1\leq x\leq 0\ \text{ή}\ x\geq 5$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{7},\ -1\leq x\leq 0\ \text{ή}\ x\geq 5 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{7}.$$

Πρόβλημα 2

Αν α,β ακέραιοι και ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\alpha^2+\beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Λύση

Έστω ότι $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta=x^2$, όπου $x\in\mathbb{Z}$. Τότε $\beta=\dfrac{x^2-\alpha^2}{2}$. Επειδή $\beta\in\mathbb{Z}$, πρέπει ο αριθμητής $x^2-\alpha^2$ να είναι άρτιος ακέραιος, το οποίο συμβαίνει μόνον όταν οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Έτσι έχουμε

$$\alpha^2+\beta=\alpha^2+\frac{x^2-\alpha^2}{2}=\frac{x^2+\alpha^2}{2}=\frac{\left(x+\alpha\right)^2+\left(x-\alpha\right)^2}{4}=\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2,$$

όπου οι αριθμοί $\dfrac{x+\alpha}{2}$ και $\dfrac{x-\alpha}{2}$ είναι ακέραιοι, αφού οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Πρόβλημα 3

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση

$$4x^4+\left(8+4a\right)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2=0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}&4x^4+\left(8+4a\right)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2\\&=\left(4x^4+8x^3+a^2x^2\right)+\left(4ax^3+8ax^2+a^3x\right)+\left(4x^2+8x+a^2\right)\\&=x^2\left(4x^2+8x+a^2\right)+ax\left(4x^2+8x+a^2\right)+\left(4x^2+8x+a^2\right)\\&=\left(4x^2+8x+a^2\right)\left(x^2+ax+1\right).\end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς, αν, και μόνον αν, και τα δύο τριώνυμα x^2+ax+1 και $4x^2+8x+a^2$ έχουν πραγματικές ρίζες

$$\Leftrightarrow a^2-4\geq 0\quad \text{και}\ 64-16a^2\geq 0 \Leftrightarrow a^2-4\geq 0\ \text{και}\ a^2-4\leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=-2\ \text{ή}\ a=2.$$

Πρόβλημα 4

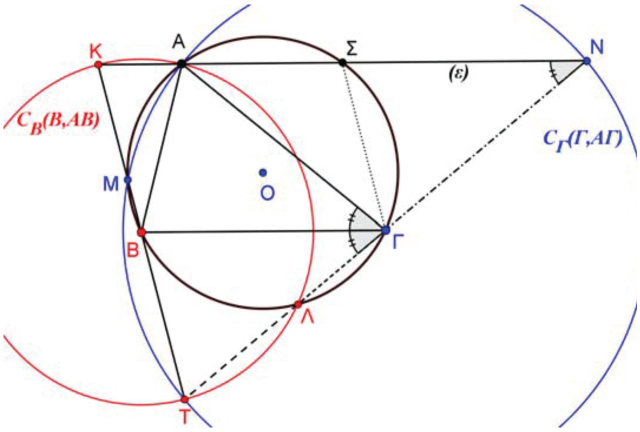
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M. Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Λ, N, T είναι συνευθειακά.

(β) Να αποδείξετε ότι οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΓAN είναι ισοσκελές ($\Gamma A = \Gamma N$ ως ακτίνες του κύκλου C_Γ). Άρα $A\hat{N}\Gamma = N\hat{A}\Gamma$.



Σχήμα 6

Από την παραλληλία $(\varepsilon) // B\Gamma$ (με τέμνουσα την ΑΓ) έχουμε: $N\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}$.

Από τις προηγούμενες ισότητες γωνιών, προκύπτει: $A\hat{N}\Gamma = \hat{\Gamma} \qquad (1)$.

Από την ισότητα των χορδών AB και $B\Lambda$ του κύκλου $C(O,R)$ (οι χορδές AB και $B\Lambda$ είναι ακτίνες του κύκλου C_B) έχουμε: $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} \qquad (2)$.

Από τις σχέσεις *(1)* και *(2)* συμπεραίνουμε ότι: $A\hat{N}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma}$, δηλαδή τα σημεία Γ, N, Λ είναι συνευθειακά.

Η διάκεντρος $B\Gamma$ (των κύκλων C_B και C_Γ) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους AT. Άρα $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}T = \hat{\Gamma}$. Από την ισότητα των γωνιών $B\hat{\Gamma}T$ και $B\hat{\Gamma}\Lambda$, προκύπτει ότι τα σημεία Γ, T, Λ είναι συνευθειακά, οπότε σε συνδυασμό με το προηγούμενο συμπέρασμα έπεται ότι τα σημεία Γ, Λ, N, T είναι συνευθειακά.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία B, K, M, T είναι συνευθειακά, οπότε τα σημεία B και Γ είναι μέσα των πλευρών TK και TN, αντίστοιχα, του τριγώνου TKN.

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο Σ είναι το μέσο της πλευράς KN (οπότε οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ θα συντρέχουν στο βαρύκεντρο του τριγώνου TKN).

Πράγματι, το τετράπλευρο $ΑΒΓΣ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C(O,R)$, οπότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$Γ\hat{Σ}Ν = Κ\hat{Α}Β \text{ (από το ισοσκελές τραπέζιο } ΑΒΓΣ\text{)}$$

$$Κ\hat{Α}Β = Β\hat{Κ}Α \text{ (από το ισοσκελές τρίγωνο } ΑΒΚ\text{)}.$$

Άρα η $ΣΓ$ είναι παράλληλη προς την $ΚΒ$, δηλαδή το $Σ$ είναι το μέσο της $ΚΝ$.

Παρατήρηση

Δεν είναι απαραίτητο (για την απόδειξη του δευτέρου ερωτήματος) να αποδείξουμε ότι το σημείο $Λ$ ανήκει στην ίδια ευθεία με τα σημεία $Γ, Ν, Τ$.

Χρειάζεται όμως για να αποδείξουμε ότι και $ΑΤ, ΝΜ, ΚΛ$ συντρέχουν και να συμπεράνουμε ότι τα σημεία ο κύκλος $C(O,R)$ είναι ο κύκλος Euler του τριγώνου $ΤΚΝ$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8=\frac{13}{9}-\frac{74\cdot 3}{9\cdot 37}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2}:8$$
$$=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16}{9}:8=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16:8}{9}=\frac{13}{9}-\frac{6}{9}+\frac{2}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200-x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x+\frac{25x}{100}=\frac{125x}{100}$ ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $(200-x)\cdot\frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200\cdot\frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{125x}{100}+(200-x)\cdot\frac{150}{100}=200\cdot\frac{140}{100}\Leftrightarrow 12,5x-15x+3000=2800$$
$$\Leftrightarrow 2,5x=200\Leftrightarrow x=80.$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200-80=120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:

(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015}=1-\frac{1012}{2015}, \frac{1007}{2019}=1-\frac{1012}{2019}, \frac{1009}{2021}=1-\frac{1012}{2021}, \frac{997}{2009}=1-\frac{1012}{2009}$$

$$\frac{1011}{2023}=1-\frac{1012}{2023}, \frac{999}{2011}=1-\frac{1012}{2011}, \frac{1001}{2013}=1-\frac{1012}{2013}, \frac{1005}{2017}=1-\frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{1012}{2009}>\frac{1012}{2011}>\frac{1012}{2013}>\frac{1012}{2015}>\frac{1012}{2017}>\frac{1012}{2019}>\frac{1012}{2021}>\frac{1012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1-\frac{1012}{2009}<1-\frac{1012}{2011}<1-\frac{1012}{2013}<1-\frac{1012}{2015}<1-\frac{1012}{2017}<1-\frac{1012}{2019}<1-\frac{1012}{2021}<1-\frac{1012}{2023},$$

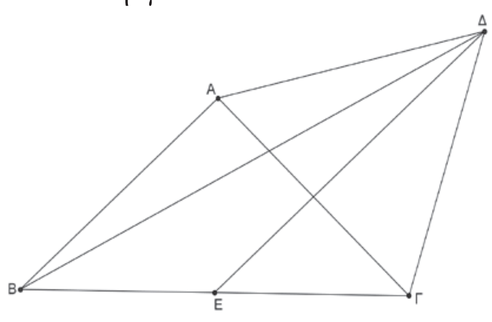
οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς, ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$ και $AB=A\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

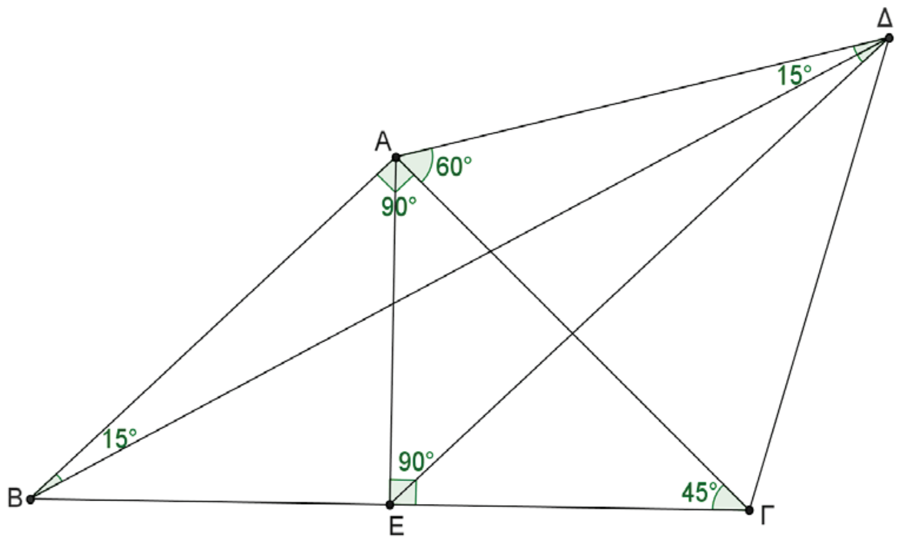
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{B}=\hat{\Gamma}=45^\circ$ και η διάμεσός του ΑΕ είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο στο Ε με μία γωνία του 45°. Επομένως θα έχει $E\hat{A}\Gamma=180^\circ-\left(90^\circ+45^\circ\right)=45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $EA=E\Gamma$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι: $\Delta A=\Delta\Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τα άκρα Α και Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, οπότε η ευθεία ΔΕ είναι η μεσοκάθετη του ΑΓ.

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ λαμβάνουμε τις ισότητες $AB=A\Gamma=A\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma=60^\circ$, οπότε $\Delta\hat{A}B=\Delta\hat{A}\Gamma+\Gamma\hat{A}B=60^\circ+90^\circ=150^\circ$. Επειδή ΑΒΔ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$A\hat{\Delta}B=A\hat{B}\Delta=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία ΑΓ, που τις τέμνει η ευθεία ΒΔ, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$B\hat{\Delta}E=A\hat{B}\Delta=15^\circ$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\frac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\frac{6}{13}$, αν $x=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε

$$A=\frac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13},$$

οπότε για $x=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2-1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256}{81}-1}{\frac{256}{81}-3}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

2^{ος} τρόπος

Για όσους δεν γνωρίζουν την παραγοντοποίηση της διαφοράς δύο τετραγώνων, προτείνουμε την ακόλουθη λύση:

Έχουμε $x=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}$, οπότε:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^4-1}{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2+1\right)\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256\cdot 256-81\cdot 81}{81^2}}{\left(\frac{256+81}{81}\right)\left(\frac{256-243}{81}\right)}-\frac{6}{13}$$

$$=\frac{\frac{65536-6561}{81^2}}{\left(\frac{337}{81}\right)\left(\frac{13}{81}\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{58975}{81^2}}{\frac{337\cdot 13}{81^2}}-\frac{6}{13}=\frac{58975}{337\cdot 13}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Λύση

Έστω n το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι $\frac{4n}{100}$. Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4n}{100}=\frac{4n}{300}=\frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής n να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει $n=75k$, όπου k θετικός ακέραιος..

Έτσι, από την υπόθεση $170\le n\le 230$, έχουμε:

$$170\le n=75k\le 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75}\le k\le\frac{230}{75}\Leftrightarrow 2+\frac{20}{75}\le k\le 3+\frac{5}{75}\Leftrightarrow k=3.$$

Επομένως έχουμε $n=75\cdot 3=225$ μαθητές.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ πλευρά α. Προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\dfrac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta$. Αν $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Delta$ και του τετραπλεύρου $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)}{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})}$.

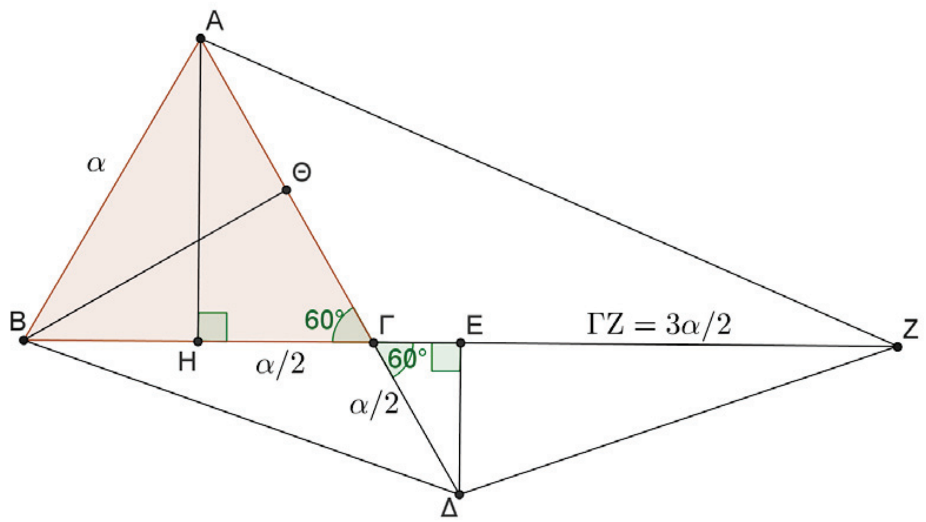
Λύση

Το τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$ έχει βάση $\mathrm{A}\Delta=\dfrac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$\mathrm{B\Theta}=\mathrm{AH}=\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{B\Theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$ έχουμε: $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})=\mathrm{E}(\mathrm{ABZ})+\mathrm{E}(\mathrm{B}\Delta\mathrm{Z})$.

Στο τρίγωνο ABZ έχουμε βάση $\mathrm{BZ}=\alpha+\dfrac{3\alpha}{2}=\dfrac{5\alpha}{2}$ και ύψος $\mathrm{AH}=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\mathrm{E}(\mathrm{ABZ})=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο $\mathrm{B}\Delta\mathrm{Z}$ έχουμε βάση $\mathrm{BZ}=\dfrac{5\alpha}{2}$ και ύψος $\Delta\mathrm{E}$ το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AH\Gamma}$ και $\Gamma\mathrm{E}\Delta$ ως εξής:

$$\frac{\mathrm{Ε\Delta}}{\mathrm{ΑΗ}}=\frac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{\mathrm{Α\Gamma}}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{Ε\Delta}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \mathrm{Ε\Delta}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε: $\mathrm{Ε\Delta}=\mathrm{\Gamma\Delta}\eta\mu 60^\circ=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{Ε}\left(\mathrm{Β\Delta Ζ}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{Ε}\left(\mathrm{ΑΒ\Delta Ζ}\right)=\mathrm{Ε}\left(\mathrm{ΑΒΖ}\right)+\mathrm{Ε}\left(\mathrm{Β\Delta Ζ}\right)=\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}+\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}=\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{\mathrm{Ε}\left(\mathrm{ΑΒ\Delta}\right)}{\mathrm{Ε}\left(\mathrm{ΑΒ\Delta Ζ}\right)}=\frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}}=\frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2}=\frac{2}{5}.$$

2ος τρόπος

Έστω Ε(ΑΒΓ) = Ε. Τότε Ε(ΒΓΔ) = $\frac{\mathrm{Ε}}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΒΘ με το τρίγωνο ΑΒΓ και βάση ΓΔ = $\frac{\alpha}{2}$. Άρα είναι:

$$\mathrm{Ε(ΑΒ\Delta)=Ε(ΑΒ\Gamma)+Ε(Β\Gamma\Delta)}=\frac{3\mathrm{Ε}}{2}.$$

Ακόμα έχουμε: Ε(ΑΓΖ) = $\frac{3\mathrm{Ε}}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΑΗ με το τρίγωνο ΑΒΓ και βάση ΓΖ = $\frac{3\alpha}{2}$. Τέλος έχουμε Ε(ΓΔΖ) = $\frac{3\mathrm{Ε}}{4}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΔΕ με το τρίγωνο ΒΓΔ και βάση ΓΖ = $\frac{3\alpha}{2}$. Έτσι έχουμε:

$$\mathrm{Ε(ΑΒ\Delta Ζ)}=\mathrm{Ε}+\frac{\mathrm{Ε}}{2}+\frac{3\mathrm{Ε}}{2}+\frac{3\mathrm{Ε}}{4}=\frac{15\mathrm{Ε}}{4}$$

και επομένως

$$\frac{\mathrm{Ε}\left(\mathrm{ΑΒ\Delta}\right)}{\mathrm{Ε}\left(\mathrm{ΑΒ\Delta Ζ}\right)}=\frac{3\mathrm{Ε}/2}{15\mathrm{Ε}/4}=\frac{2}{5}.$$

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta\left(\Delta_1\right)$ και $\beta\left(\Delta_2\right)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta\left(\Delta_1\right)}{\beta\left(\Delta_2\right)}=\frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Λύση

Έστω $\alpha(\Delta), \alpha(\Delta_1)$ και $\alpha(\Delta_2)$ η αξία των διαμαντιών Δ, Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2} = \frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta) = \lambda\beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1) = \lambda\beta(\Delta_1)^2, \alpha(\Delta_2) = \lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2 + \lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2 + \beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{3} = \frac{\beta(\Delta_2)}{7} = \frac{\beta(\Delta_1)+\beta(\Delta_2)}{3+7} = \frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)} = \frac{3}{10}, \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)} = \frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2 + \left(\frac{\beta(\Delta)}{\beta(\Delta)}\right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά 100-58 = 42%.

2^{ος} τρόπος

Επειδή στον πρώτο τρόπο διαπιστώνουμε στη σχέση (1) ότι ο λόγος $\dfrac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}$ εξαρτάται από τους λόγους των βαρών $\dfrac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}$ και $\dfrac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}$, μπορούμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $\beta(\Delta_1) = 3$ και $\beta(\Delta_1) = 7$ με $\beta(\Delta) = 10$.

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η αξία του τετραγώνου της μονάδας βάρους είναι 1, τότε έχουμε ότι $\alpha(\Delta_1) = 3^2 = 9$ και $\alpha(\Delta_2) = 7^2 = 49$ και $\alpha(\Delta) = 10^2 = 100$. Επομένως η μείωση της αξίας του διαμαντιού είναι $100-(9+49) = 42$, δηλαδή σε ποσοστό 42%.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}.$$

Λύση
Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε $x=2014$, η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^2+(2x+1)^2}+\frac{(x+2)^3+(x-2)^3-18x}{x^2+(2x-1)^2}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+1\right)^2-(4x)^2}\\
&=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2+4x+1}+\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2-4x+1}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\\
&=2x\left(x^2+3\right)\left[\frac{1}{5x^2+4x+1}+\frac{1}{5x^2-4x+1}-\frac{2\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right]\\
&=2x\left(x^2+3\right)\left(\frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right)=2x\left(x^2+3\right)\cdot 0=0.\end{aligned}$$

Άρα είναι

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3-2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}=0$$

Πρόβλημα 2
Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Λύση
Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου Α είναι x ευρώ και τόμου Β είναι y ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x+120y=4000\Leftrightarrow 5x+6y=200 \qquad (1)$$

$$50\cdot\frac{90x}{100}+60\cdot\frac{80y}{100}=1680\Leftrightarrow 45x+48y=1680 \qquad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} 5x+6y=200 \\ 45x+48y=1680 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 45x+54y=1800 \\ 45x+48y=1680 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 6y=120 \\ 45x+48y=1680 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=20 \\ x=\dfrac{1680-48y}{45} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=20 \\ x=16 \end{array}\right\}.$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right],$$

όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\mathrm{B}}$ είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \left(x^2+y^2+xy\right)^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right) \\ &= x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3 \\ &= x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4. \end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \left(x^2+y^2+xy\right)^2=\left(x^2+y^2\right)^2+\left(xy\right)^2+2\left(x^2+y^2\right)xy \\ &= x^4+y^4+2x^2y^2+x^2y^2+2x^3y+2xy^3 \\ &= x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$\left(x^2+y^2+2xy\right)^2=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= 2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right]=2\left[x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+x^4+y^4\right] \\ &= 2\left[2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4\right]=4\left(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4\right) \\ &= 4\left(x^2+y^2+xy\right)^2, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{\mathrm{B}}=\left|2\left(x^2+xy+y^2\right)\right|=2\left(x^2+xy+y^2\right)\in\mathbb{Q},$$

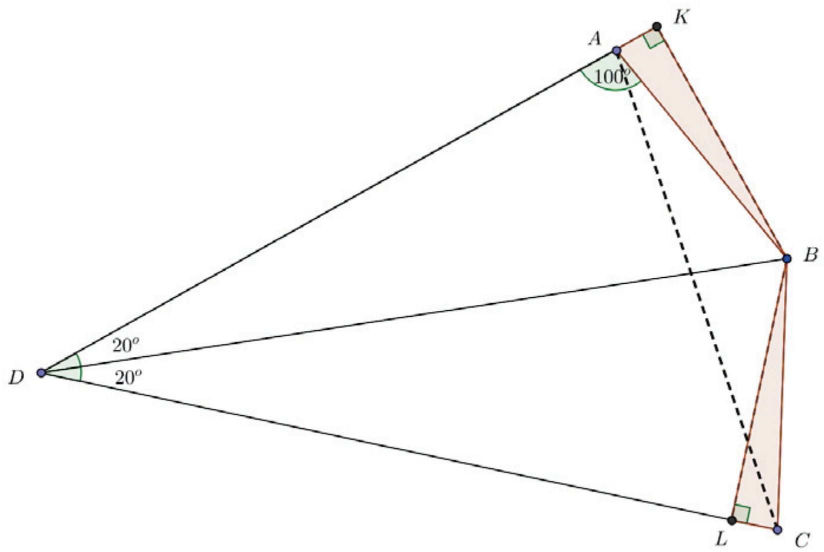
αφού οι αριθμοί x, y είναι ρητοί και $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\geq 0.$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A}=100^\circ$ και $\hat{D}=40^\circ$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Λύση

Εφόσον η DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$, θα έχουμε ότι $C\hat{D}B=B\hat{D}A=20^\circ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο DBC θα έχουμε ότι $D\hat{B}C=D\hat{C}B=80^\circ$ και επιπλέον έχουμε ότι $D\hat{B}A=180^\circ$-$\left(100^\circ+20^\circ\right)$=$60^\circ$. Αν τώρα φέρουμε τις προβολές BK και BL, αφού το B είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι $BK=BL$ και $B\hat{A}K=80^\circ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα BAK και BLC είναι ίσα, που σημαίνει ότι BA = BC. Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο BAC παίρνουμε ότι: $C\hat{A}B=20^\circ$.



Σχήμα 4

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1} \text{ και } \mathrm{B}=\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1}-\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}=\frac{\left(x^k+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)-\left(x^{k+1}+1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}$$

$$=\frac{x^{k+2}+x^k+1-2x^{k+1}-1}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^k\left(x-1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)},$$

οπότε, αφού $x>0$ και k ακέραιος, έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\left\{\begin{array}{l}0, \quad \text{αν } x=1\\ >0, \text{ αν } 0<x\neq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}=\mathrm{B}, \qquad \text{αν } x=1\\ \mathrm{A}>\mathrm{B}, \text{αν } 0<x\neq 1\end{array}\right\}.$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{(x^k+1)(x^{k+2}+1)}{(x^{k+1}+1)^2}=\frac{x^{2k+2}+x^k+x^{k+2}+1}{(x^{k+1}+1)^2}$$

$$=1+\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{(x^{k+1}+1)^2}=1+\frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2}\geq 1.$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει, αν, και μόνο αν, $x=1$.

Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}, \text{ αν } x=1 \text{ και } \mathrm{A}>\mathrm{B}\text{, αν } 0<x\neq 1.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων $\left(x,y\right)$ που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2-10xy+13y^2+2\left|x-y\right|=5$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2x^2-10xy+13y^2=5-2\left|x-y\right| \qquad (1)$$

Η παράσταση του πρώτου μέλους γράφεται:

$$2x^2-10xy+13y^2=2\left(x^2-5xy+\frac{25y^2}{4}\right)+13y^2-\frac{25y^2}{2}=2\left(x-\frac{5y}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}\geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν: $x-\frac{5y}{2}=y=0\Leftrightarrow x=y=0$.

Επομένως για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) πρέπει να ισχύει:

$$5-2\left|x-y\right|\geq 0\Leftrightarrow\left|x-y\right|\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left|x-y\right|\in\{0,1,2\},$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1. $\left|x-y\right|=0\Leftrightarrow x=y$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2-10x^2+13x^2=5\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1,$$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις: $\left(x,y\right)=\left(-1,-1\right)$ ή $\left(x,y\right)=\left(1,1\right)$.

2. $\left|x-y\right|=1\Leftrightarrow x-y=1$ ή $x-y=-1\Leftrightarrow x=y+1$ ή $x=y-1$.

Για $x=y\pm 1$ η εξίσωση γίνεται: $2\left(y\pm 1\right)^2-10\left(y\pm 1\right)y+13y^2=3$

$\Leftrightarrow 5y^2 \mp 6y - 1 = 0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 56$

3. $|x-y| = 2 \Leftrightarrow x-y=2$ ή $x-y=-2 \Leftrightarrow x = y+2$ ή $x = y-2$.

Για $x = y+2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y+2)^2 - 10(y+2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \dfrac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = \dfrac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (3,1)$

Για $x = y-2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y-2)^2 - 10(y-2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \dfrac{-12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = -1$ ή $y = -\dfrac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (-3,-1)$.

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: $(-1,-1)$, $(1,1)$, $(3,1)$, $(-3,-1)$.

Πρόβλημα 3

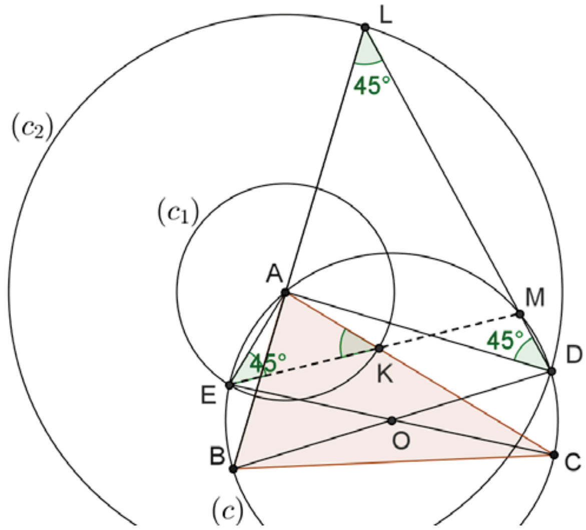
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο A και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του A) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται πάνω στο κύκλο (c).

Λύση

Έστω M το σημείο τομής της DL με τον κύκλο (c) θα αποδείξουμε ότι τα σημεία E, K, M βρίσκονται επάνω στον ίδια ευθεία.

Η γωνία $E\hat{A}C$ είναι ορθή, διότι βαίνει στη διάμετρο EC του κύκλου (c). Το τρίγωνο AEK είναι ισοσκελές (διότι AE, AK είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)). Άρα:

$$A\hat{E}K = A\hat{K}E = 45^\circ. \qquad (1)$$



Σχήμα 5

Η γωνία $\mathrm{B\hat{A}D}$ είναι ορθή, γιατί βαίνει στη διάμετρο BD του κύκλου (c), οπότε και η γωνία $\mathrm{D\hat{A}L}$ είναι ορθή. Το τρίγωνο ADL είναι ισοσκελές (διότι AD, AL είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)). Άρα έχουμε

$$\mathrm{A\hat{D}L} = \mathrm{A\hat{L}D} = 45^\circ. \qquad (2)$$

Οι γωνίες $\mathrm{A\hat{D}M}=\mathrm{A\hat{D}L}$ και $\mathrm{A\hat{E}M}$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$, δηλαδή

$$\mathrm{A\hat{E}M} = \mathrm{A\hat{D}L} \qquad (3)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα $\mathrm{A\hat{E}K} = \mathrm{A\hat{E}M} = 45^\circ$, οπότε τα σημεία E, K, M είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 4

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Λύση

Για το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών έχουμε τη σχέση

$$\Sigma_x \geq 8\cdot 100 + (x-8)\cdot 70 \Leftrightarrow \Sigma_x \geq 70x + 240, \qquad (1)$$

οπότε για το μέσο όρο των βαθμών έχουμε:

$$\text{Μ.Ο.} = \frac{\Sigma_x}{x} \geq \frac{70x+240}{x} = 70 + \frac{240}{x}. \qquad (2)$$

Έχοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών είναι 78, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $x<30$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:

$$\text{Μ.Ο.} = \frac{\Sigma_x}{x} \geq 70 + \frac{240}{x} > 70 + \frac{240}{30} = 78, \qquad (3)$$

που είναι αντίθετο προς την υπόθεση ότι ο μέσος όρος των βαθμών είναι 78.

Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι $x < 30,$ οπότε πρέπει να είναι $x \geq 30$.

Παρατηρούμε ότι για $x = 30$, έχουμε την περίπτωση

$$\text{Μ.Ο.} = \frac{\Sigma_{30}}{30} = \frac{8 \cdot 100 + (30-8) \cdot 70}{30} = \frac{30 \cdot 70 + 8 \cdot 30}{30} = 70 + 8 = 78,$$

οπότε η **ελάχιστη δυνατή τιμή** του x είναι 30.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση

Τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$ με τον άξονα των x είναι της μορφής $\mathrm{A}_1(x_1, 0)$ και $\mathrm{A}_2(x_2, 0)$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (3\alpha - 5)x + 186 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε:

$$x_1 + x_2 = 3a - 5, \quad (1)$$
$$x_1 x_2 = 186 \quad (2).$$

Επειδή πρέπει οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω $|x_1| < |x_2|$, από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι x_1, x_2 πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι με γινόμενο $186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$. Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:

$$(x_1, x_2) \in \{(1,186), (2,93), (3,62), (6,31), (-1,-186), (-2,-93), (-3,-62), (-6,-31)\}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι: $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2 + 5}{3}$, οπότε οι δυνατές τιμές για την παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι οι εξής: $64, \dfrac{100}{3}, \dfrac{70}{3}, 14, -\dfrac{182}{3}, -30, -20, -\dfrac{32}{3}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\left\{\begin{matrix} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{matrix}\right\}$$

Λύση (1ος τρόπος)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το x^2y^2 η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

Επομένως, έχουμε $x^2 + y^2 - xy = \dfrac{91}{13} = 7$. Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι: $2(x^2 + y^2) = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$, οπότε

$xy=3$ από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ 2xy=6 \end{cases}\right\},$$

από το οποίο με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2+2xy=16 \\ x^2+y^2+2xy=4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} (x+y)^2=16 \\ (x-y)^2=4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=\pm 4 \\ x-y=\pm 2 \end{cases}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}\right\} \text{ ή } \left.\begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=2 \end{cases}\right\} \text{ ή } \left.\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=-2 \end{cases}\right\} \text{ ή } \left.\begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=-2 \end{cases}\right\}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(3,1) \text{ ή } (x,y)=(-1,-3) \text{ ή } (x,y)=(1,\,3) \text{ ή } (x,y)=(-3,-1).$$

2ος τρόπος

Έχουμε

$$\left.\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2-(xy)^2=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}\right\},$$

οπότε, αν θέσουμε $\varphi=x^2+y^2$ και $\omega=xy$, λαμβάνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{cases} \varphi^2-\omega^2=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} (\varphi+\omega)(\varphi-\omega)=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{cases}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} \varphi-\omega=7 \\ \varphi+\omega=13 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \varphi=10 \\ \omega=3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}\right\}.$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε, όπως στον πρώτο τρόπο.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $B\Delta$ τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $A\Gamma$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $B\Delta H\Theta$, $B\Delta EK$ και $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμα.

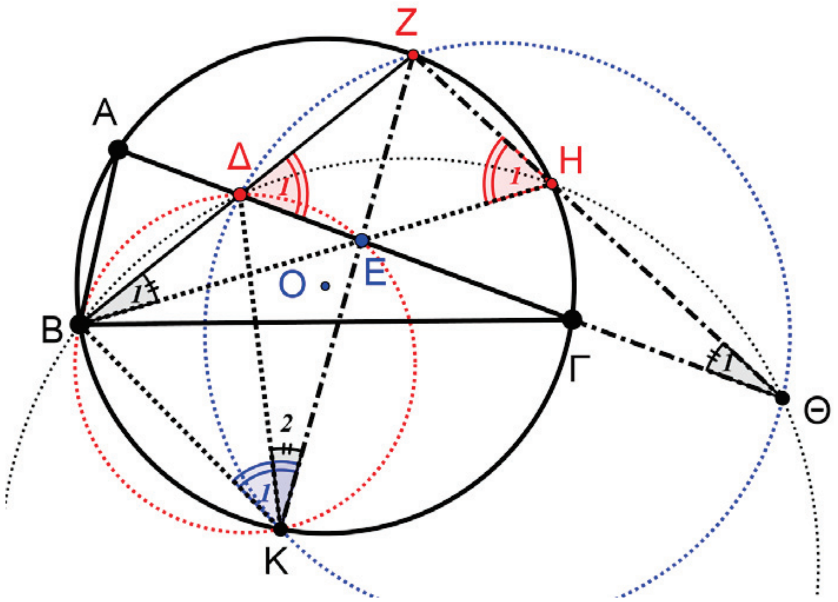
Λύση

Η γωνία $\hat{H}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(O,R)$ και βαίνει στο τόξο BZ. Άρα:

$$\hat{H}_1=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{B}}{2}.$$

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta Z$. Άρα:

$$\hat{\Delta}_1=\Delta\hat{A}Z+A\hat{Z}B=\frac{\hat{B}}{2}+\hat{\Gamma}.$$



Σχήμα 6

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, προκύπτει η ισότητα των παραπληρωματικών τους γωνιών και από εκεί ότι **το τετράπλευρο $B\Delta H\Theta$ είναι εγγράψιμο.**

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BKHZ$ έχουμε: $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$, η οποία σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, μας δίνει **την εγγραψιμότητα του τετραπλεύρου $B\Delta EK$.**

Από το εγγράψιμο $B\Delta EK$ έχουμε: $\hat{K}_2 = \hat{B}_1$.Από το εγγράψιμο $B\Delta H\Theta$ έχουμε: $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1$. Άρα είναι: $\hat{K}_2 = \hat{\Theta}_1$.

Επομένως και **το τετράπλευρο $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμο.**

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Λύση

Για τους τέσσερις διαιρέτες ισχύουν οι σχέσεις

$$d_1 = 1,\ d_4 = n \ \text{ και } \ d_2 \cdot d_3 = n.$$

Επομένως, έχουμε

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640 \Leftrightarrow 1 + d_2 + d_3 + d_2 d_3 = 640$$
$$\Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3) = 640 \Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3) = 2^7 \cdot 5$$

Αλλά $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 \Rightarrow 2 < 1 + d_2 < 1 + d_3$ και επειδή οι d_2 και d_3 είναι ακέραιοι αριθμοί, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1 + d_2 = 4, 1 + d_3 = 160 \Leftrightarrow d_2 = 3, d_3 = 159 = 3 \cdot 53$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 3 \cdot 159$ έχει και άλλους διαιρέτες.

- $1+d_2=5, 1+d_3=128 \Leftrightarrow d_2=4, d_3=127$, απορρίπτονται, αφού ο $n=4\cdot 127$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=8, 1+d_3=80 \Leftrightarrow d_2=7, d_3=79$, οπότε είναι $n=7\cdot 79=553$
- $1+d_2=10, 1+d_3=64 \Leftrightarrow d_2=9, d_3=63$, απορρίπτονται, αφού ο $n=9\cdot 63$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=16, 1+d_3=40 \Leftrightarrow d_2=15, d_3=39$, απορρίπτονται, αφού ο $n=15\cdot 39$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=20, 1+d_3=32 \Leftrightarrow d_2=19, d_3=31$, οπότε είναι $n=19\cdot 31=589$

Τελικά, οι αριθμοί που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις είναι οι 553 και 589.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}, \quad \mathrm{B} = \left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Λύση

$$\mathrm{A} = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11} = 24:6+25-2\cdot 8+8:4+\frac{9}{11} = 4+25-16+2+\frac{9}{11}$$

$$=15+\frac{9}{11}=15\frac{9}{11}.$$

$$\mathrm{B} = \left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7} = \left(32+112\right):3^2-1+\frac{5}{7} = 144:9-1+\frac{5}{7} = 16-1+\frac{5}{7}$$

$$=15+\frac{5}{7}=15\frac{5}{7}.$$

Έχουμε: $\mathrm{A}-\mathrm{B} = 15\frac{9}{11}-15\frac{5}{7} = 15+\frac{9}{11}-15-\frac{5}{7} = \frac{9}{11}-\frac{5}{7} = \frac{63-55}{77} = \frac{8}{77} > 0$,

οπότε θα είναι $\mathrm{A} > \mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha = 6$ μέτρα και πλάτος $\beta = 4$ μέτρα Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:

(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, **(ii)** το εμβαδό του ορθογωνίου.

Λύση

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2(\alpha+\beta) = 2(6+4) = 20$ μέτρα και το εμβαδό του είναι $\mathrm{E} = \alpha\beta = 6\cdot 4 = 24$ τετραγωνικά μέτρα.

Μετά την αύξηση το μήκος του ορθογωνίου θα γίνει $6+6\cdot\frac{20}{100} = 6+1,2 = 7,2$ μέτρα,

ενώ το πλάτος του μετά τη μείωση θα γίνει $4-4\cdot\frac{5}{100} = 4-0,2 = 3,8$ μέτρα.

Έτσι έχουμε:

(i) Η περίμετρος του ορθογωνίου μετά την μεταβολή των διαστάσεων του θα γίνει

$\Pi' = 2(7,2+3,8) = 2\cdot 11 = 22$ μέτρα, οπότε η αύξησή της είναι

$\Pi' - \Pi = 22 - 20 = 2$ μέτρα και η επί τοις εκατό αύξησή της είναι

$$\frac{\Pi'-\Pi}{\Pi} = \frac{2}{20} = \frac{10}{100},\text{ δηλαδή } 10\%.$$

(ii) Το εμβαδό του ορθογωνίου μετά την αύξηση των διαστάσεων θα γίνει θα γίνει

$E' = 7,2\cdot 3,8 = 27,36$ τετρ.μέτρα, οπότε η μεταβολή (αύξηση) του είναι

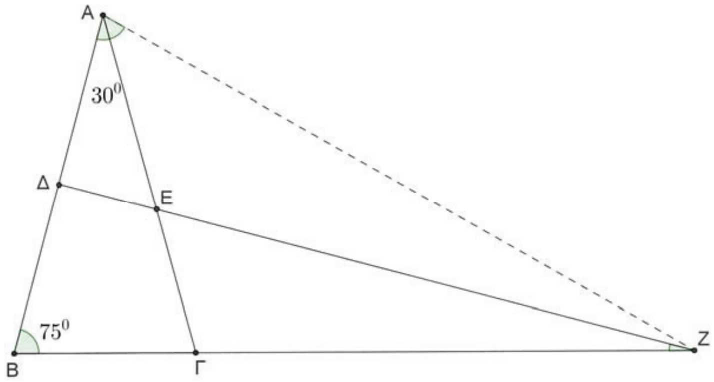
$E' - E = 27,36 - 24 = 3,36$ τετρ. μέτρα και η επί τοις εκατό αύξηση του είναι

$$\frac{E'-E}{E} = \frac{3,36}{24} = 0,14 = \frac{14}{100},\text{ δηλαδή } 14\%.$$

Πρόβλημα 3.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $B\hat{Z}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}Z$.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ θα έχει τις απέναντι γωνίες τους ίσες, δηλαδή $A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}A = \frac{180^\circ - B\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Επειδή το Ζ είναι σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς ΑΒ θα απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Β, δηλαδή είναι ΖΑ = ΖΒ. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές και θα έχει τις γωνίες απέναντι των ίσων πλευρών του ίσες, δηλαδή $B\hat{A}Z = A\hat{B}Z = A\hat{B}\Gamma = 75^\circ$. Τότε θα είναι $A\hat{Z}B = 180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Η μεσοκάθετη ΖΔ της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΖΒ είναι και διχοτόμος της γωνίας του $A\hat{Z}B$, οπότε θα είναι $B\hat{Z}\Delta = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Διαφορετικά, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΔ με $B\hat{\Delta}Z = 90^\circ$, έχουμε:

$$B\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Για τη γωνία $\Gamma\hat{A}Z$ έχουμε: $\Gamma\hat{A}Z = B\hat{A}Z - B\hat{A}\Gamma = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι $x=10, x+1=11$ είναι πολλαπλάσια των 10 και 11, αντίστοιχα. Επιπλέον ο 9 είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε η τριάδα 9,10,11 είναι μία λύση του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατηρώ ότι $\text{ΕΚΠ}(10,11)=110$, οπότε για να βρω το επόμενο ζευγάρι θετικών ακέραιων που έχουν την ίδια ιδιότητα με τους 10 και 11 πρέπει να προσθέσω και στους δύο το 110 ή κάποιο πολλαπλάσιο του 110 μέχρι που να προκύψει ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1000. Έτσι έχουμε τα ζευγάρια:

120	230	340	450	560	670	780	890
121	231	341	451	561	671	781	891

Επομένως αρκεί να ελέγξουμε ποιοι από τους αριθμούς 119, 229, 339, 449, 559, 669, 779, και 889 είναι πολλαπλάσια του 3. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 339 και 669, οπότε λαμβάνουμε και τις λύσεις 339,340,341 και 669,670,671.

Παρατήρηση. Μετά την εύρεση της πρώτης λύση 9,10,11, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι για να προκύψει μία αντίστοιχη τριάδα θα πρέπει να προσθέσουμε και στους τρεις ακέραιους ένα πολλαπλάσιο του $\text{ΕΚΠ}(3,10,11)=330$.

Έτσι εύκολα προκύπτουν και οι άλλες δύο λύσεις του προβλήματος 339,340,341 και 669,670,671.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης . $\mathrm{A}=\frac{a-1}{\alpha-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$, αν $a=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

Λύση

Έχουμε $a=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{81}{16}$, οπότε θα είναι $a^{-1}=\frac{16}{81}$ και

$$\mathrm{A}=\frac{a-1}{a-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}=\frac{\frac{81}{16}-1}{\frac{81}{16}-3}+\frac{1}{33}+\frac{16}{81}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$$

$$=\frac{\frac{65}{16}}{\frac{33}{16}}+\frac{1}{33}+\frac{8}{27}+\frac{1}{27}=\frac{65}{33}+\frac{1}{33}+\frac{9}{27}=\frac{66}{33}+\frac{9}{27}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

Πρόβλημα 2ο

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha = \dfrac{28}{\nu}$ και $\gamma = \dfrac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου β των δεκάδων είναι: 0, 4, 8.

Ο ακέραιος ν πρέπει να είναι θετικός και κοινός διαιρέτης των 28 και 42, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι: 1, 2, 7, 14. Τότε οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο α είναι:

$$\alpha = 4, \text{ για } \nu = 7, \ \alpha = 2, \text{ για } \nu = 14.$$

Οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο γ είναι:

$$\gamma = 6, \text{για } \nu = 7, \ \gamma = 3, \text{ για } \nu = 14.$$

Επομένως έχουμε: $\alpha = 4$, $\gamma = 6$, για $\nu = 7$ και $\alpha = 2$, $\gamma = 3$, για $\nu = 14$.

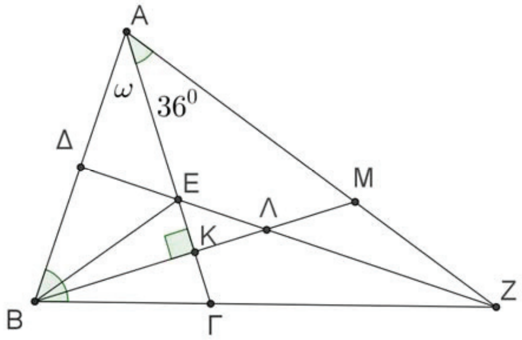
Άρα οι δυνατές τιμές του ακέραιου $\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι: 406, 446, 486, 203, 243, 283.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \omega^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 36^\circ$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega = 36^\circ$, **(β)** ΑΜ = ΓΖ, **(γ)** ΒΛ = ΛΖ.

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ θα έχουμε:

$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \omega}{2}.$$

Επειδή η ΔΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ, το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΖΑ = ΖΒ, οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \hat{\mathrm{B}} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \frac{180^\circ - \omega}{2} \Leftrightarrow 3\omega = 108 \Leftrightarrow \omega = 36^\circ.$$

(β) Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΜ η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος θα έχουμε

$$\mathrm{A\hat{B}K} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ = \mathrm{A\hat{M}K}.$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΜ = ΑΒ. Από υπόθεση είναι ΑΒ = ΑΓ. Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΖΑΒ έχουμε

$$\mathrm{A\hat{Z}B} = 180^\circ - 2\hat{\mathrm{B}} = 180^\circ - 2\cdot 72^\circ = 36^\circ = \mathrm{\Gamma\hat{A}Z}.$$

Επομένως και το τρίγωνο ΓΑΖ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΖ. Άρα έχουμε:

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma Z}.$$

(γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε: $\mathrm{\Lambda\hat{Z}B} = \mathrm{\Delta\hat{Z}B} = 90^\circ - \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$, ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΒ έχουμε: $\mathrm{\Lambda BZ} = \mathrm{KB\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Άρα έχουμε: $\mathrm{\Lambda\hat{Z}B} = \mathrm{\Lambda\hat{B}Z} = 18^\circ \Rightarrow \mathrm{\Lambda BZ}$ ισοσκελές τρίγωνο με ΒΛ = ΛΖ.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = (x+y)\cdot z^m - w$.

Λύση

Από τη συνθήκη, οι x, y, z, w, m είναι οι αριθμοί 1,2,3,4,5 με διαφορετική ίσως σειρά.

Για τη μέγιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο ελάχιστος, δηλαδή $w=1$. Τους αριθμούς 4 και 5 πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε στη δύναμη z^m. Παρατηρούμε ότι $4^5 > 5^4$, οπότε για τη μέγιστη τιμή $z=4, m=5$. Οπότε απομένει να έχουμε $x+y=2+3=5$. Συνεπώς η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $5\cdot 4^5 - 1 = 5\cdot 1024 - 1 = 5119$.

Για την ελάχιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο μέγιστος, δηλαδή $w=5$ και η δύναμη z^m να είναι η ελάχιστη, οπότε $z=1$. Η μικρότερη τιμή τώρα για το $x+y$ είναι $x+y=2+3=5$ η ελάχιστη τιμή είναι $5\cdot 1^4 - 5 = 0$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την ανίσωση: $2x+(x+1)(x-1) < x^2+x-2+\lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4}$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

Λύση. Έχουμε:

$$2x+(x+1)(x-1) < x^2+x-2+\lambda$$

$$\Leftrightarrow 2x+x^2-1 < x^2+x-2+\lambda \Leftrightarrow x < \lambda - 1,$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x-2-3 > 2x-2 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{3}{2} < x < \lambda - 1,$, εφόσον ισχύει:

$$\lambda - 1 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda > \frac{5}{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να λυθεί το σύστημα $\begin{Bmatrix} x + y - 1 = 6(x-3)(y+2) \\ \dfrac{3}{x-3} - \dfrac{4}{y+2} = 11 \end{Bmatrix}$

Λύση

Οι περιορισμοί είναι $x \neq 3, y \neq -2$. Θέτουμε $\frac{1}{x-3} = a$ και $\frac{1}{y+2} = b$, οπότε

$$x + y - 1 = (x-3) + (y+2) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}..$$

Επομένως, με περιορισμό $a, b \neq 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{6}{ab} \\ 3a - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 3a - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 - b \\ 3(6-b) - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a = 6 - b \\ 7b = 7 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a = 5 \\ b = 1 \end{Bmatrix},$$

οπότε $x = \frac{16}{5}, y = -1$, που πληρούν τους περιορισμούς.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x + y + x^2 + y^2 = p,$$

όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται: $x + x^2 + y + y^2 = p \Leftrightarrow x(x+1) + y(y+1) = p \quad (1)$

Όμως οι αριθμοί $x(x+1)$, $y(y+1)$ ως γινόμενα διαδοχικών ακέραιων **είναι και οι δύο άρτιοι**, οπότε και το άθροισμα τους θα είναι άρτιος. Επομένως πρέπει $p = 2$, αφού ο μοναδικός πρώτος που είναι άρτιος είναι το 2. Επειδή οι ακέραιοι $x(x+1)$, $y(y+1)$ **είναι άρτιοι μη αρνητικοί**, έχουμε:

$$x(x+1) + y(y+1) = 2 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x(x+1) = 2 \\ y(y+1) = 0 \end{Bmatrix} (\Sigma_1) \text{ ή } \begin{Bmatrix} x(x+1) = 0 \\ y(y+1) = 2 \end{Bmatrix} (\Sigma_2)$$

Έχουμε

$$x(x+1) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ και } y(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -1.$$

Επομένως το σύστημα (Σ_1) έχει τις λύσεις:

$$(x, y) = (1,0) \text{ ή } (1,-1) \text{ ή } (-2,0) \text{ ή } (-2,-1)$$

Ομοίως, για το σύστημα (Σ_2) βρίσκουμε τις λύσεις:

$$(x, y) = (0,1) \text{ ή } (-1,1) \text{ ή } (0,-2) \text{ ή } (-1,-2).$$

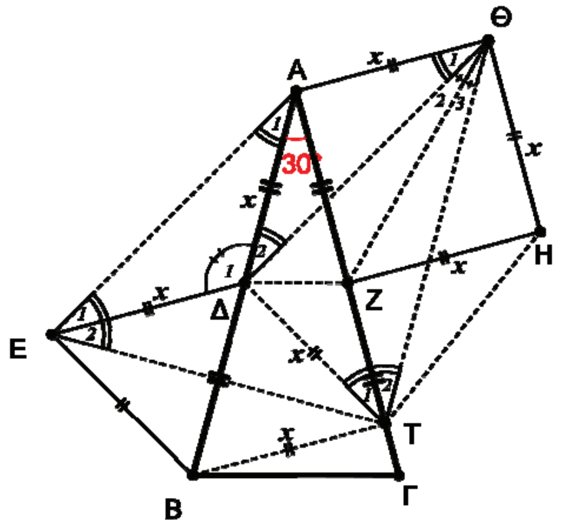
Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^o$. Έστω Δ, Z τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$ και τετράγωνο $AZH\Theta$. Η μεσοκάθετη του $B\Delta$, τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο AET είναι ισόπλευρο,

(β) τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta T$ είναι ίσα.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές ($\Delta A = \Delta E = x$) με $\hat{\Delta}_1 = 120^o$. Άρα

$$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = 30^o.$$

Η ET είναι μεσοκάθετη της $B\Delta$, άρα (από το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$) έχουμε:

$$\hat{E}_2 = \frac{B\hat{E}\Delta}{2} = 30^o.$$

Στο τρίγωνο AET έχουμε, $E\hat{A}T = \hat{A}_1 + \hat{A} = 60^o$ και $A\hat{E}T = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 60^o$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(β) Στο ισόπλευρο τρίγωνο η AB είναι κάθετη (άρα και μεσοκάθετη) της ET. Άρα

$$\Delta E = \Delta T = BT = x \qquad (1).$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα $A\Delta\Theta$ και $A\Delta T$ είναι ίσα μεταξύ τους διότι,

$$A\Delta = A\Theta = \Delta T = x \text{ και } \Delta\hat{A}\Theta = A\hat{\Delta}T = 120^o.$$

Άρα έχουμε

$$\Delta\Theta = AT \qquad (2).$$

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\Theta\hat{\Delta}T = 180^o - \hat{\Delta}_2 - B\hat{\Delta}T = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o.$$

$$A\hat{T}B = \hat{T}_1 + B\hat{T}\Delta = 30^o + 60^o = 90^o.$$

Έχουμε δηλαδή ότι τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta T$ είναι ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

Παρατήρηση. Επιπλέον, στο σημείο Z τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $\Delta\Theta T$, δηλαδή το σημείο Z είναι έκκεντρο του τριγώνου $\Delta\Theta T$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y}^2} + \sqrt{\mathrm{x}^4 + 32\mathrm{y}^2}$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη των x, y.

Λύση

Έχουμε ότι $x^4 + 5x^2 + 2y^2 = x^4 + 5x^2 + 4 - x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2+2)^2$, οπότε

$$\sqrt{x^4 + 5x^2 + 2y^2} = x^2 + 2.$$

Επιπλέον $x^4 + 32y^2 = \left(4 - 2y^2\right)^2 + 32y^2 = 16 + 16y^2 + 4y^4 = 4\left(y^2+2\right)^2$, οπότε

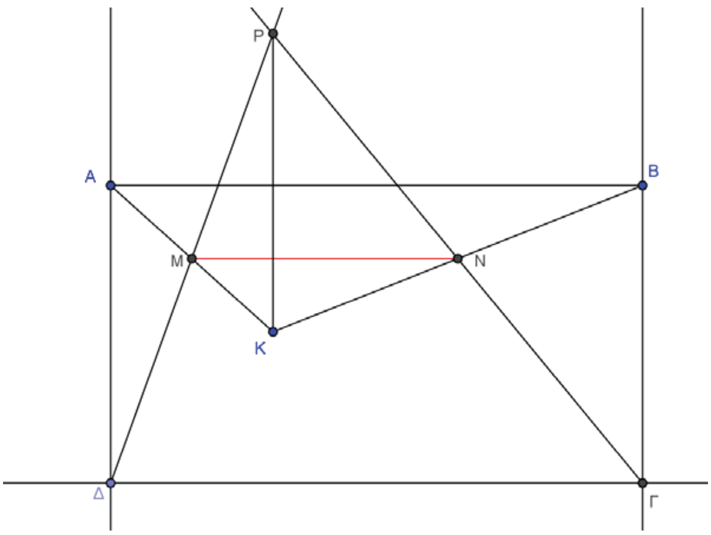
$$\sqrt{x^4 + 32y^2} = 2(y^2+2).$$

Συνεπώς $\mathrm{A} = x^2 + 2 + 2(y^2+2) = x^2 + 2y^2 + 6 = 4 + 6 = 10$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ και σημείο K στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα $\mathrm{M, N}$ των $\mathrm{AK, BK}$ αντίστοιχα και έστω ότι οι ευθείες $\mathrm{\Gamma N, \Delta M}$ τέμνονται στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\mathrm{\Gamma\Delta}$.

Λύση



Σχήμα 4

Στο τρίγωνο AKB το τμήμα MN συνδέει τα μέσα των πλευρών του, άρα $\mathrm{MN} // \mathrm{AB}$ και $\mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$. Όμως το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε $\mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma\Delta}$, επομένως $\mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{2}$ και επιπλέον $\mathrm{AB} // \mathrm{\Gamma\Delta}$ οπότε και $\mathrm{MN} // \mathrm{\Gamma\Delta}$. Από την τελευταία παραλληλία έπεται ότι τα τρίγωνα $\mathrm{PMN}, \mathrm{P\Delta\Gamma}$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{MN}}=2$, οπότε θα είναι και $\frac{\mathrm{P}\Delta}{\mathrm{PM}}=2$ οπότε το M είναι το μέσον του $\mathrm{P}\Delta$. Άρα στο τετράπλευρο $\mathrm{PA}\Delta\mathrm{K}$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως, $\mathrm{PK} // \mathrm{A}\Delta$, οπότε, αφού $\mathrm{A}\Delta \perp \Gamma\Delta$, έπεται ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\Gamma\Delta$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ότι ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος.

(α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{5a}{2}$, $\frac{a+2}{5}$, a.

(β) Να βρείτε το υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-a}{2}-\frac{x}{2}\le\frac{2x+a}{3},\quad 2(3x-a)+x>2(x+1)-a,\quad a-x\le 2(x-a)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο A.

Λύση

(α) Αφού $a>0$, έχουμε: $\frac{5a}{2}-a=\frac{3a}{2}>0 \Leftrightarrow \frac{5a}{2}>a$. Επίσης, έχουμε

$a>\frac{a+2}{5} \Leftrightarrow 5a>a+2 \Leftrightarrow 4a>2 \Leftrightarrow a>\frac{1}{2}$, που ισχύει αφού ο a είναι θετικός ακέραιος Άρα $a>\frac{a+2}{5}$.

Επομένως έχουμε τη διάταξη: $\frac{a+2}{5}<a<\frac{5a}{2}$.

(β) Λύνουμε καθεμία από τις δεδομένες ανισώσεις. Έχουμε:

- $\frac{3x-a}{2}-\frac{x}{2}\le\frac{2x+a}{3} \Leftrightarrow 9x-3a-3x\le 4x+2a \Leftrightarrow 2x\le 5a \Leftrightarrow x\le\frac{5a}{2}$.
- $2(3x-a)+x>2(x+1)-a \Leftrightarrow 6x-2a+x>2x+2-a \Leftrightarrow 5x>a+2 \Leftrightarrow x>\frac{a+2}{5}$.
- $a-x\le 2(x-a) \Leftrightarrow a-x\le 2x-2a \Leftrightarrow 3a\le 3x \Leftrightarrow x\ge a$.

Επειδή ισχύει ότι $\frac{a+2}{5}<a<\frac{5a}{2}$, το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις είναι: $\mathrm{A}=\left\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le\frac{5a}{2},\ a\in\mathbb{Z}_{+}^{*}\right\}=\left[a,\frac{5a}{2}\right],\ a\in\mathbb{Z}_{+}^{*}$..

Για την εύρεση των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο A θα προσδιορίσουμε τον ελάχιστο και μέγιστο ακέραιο του συνόλου A. Αν αυτοί είναι m και M, αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των ακέραιων που περιέχονται στο σύνολο A είναι: $(M-m)+1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $a=2k, k\in\mathbb{N}^{*}$. Τότε $\mathrm{A}=[2k,5k]$, οπότε περιέχει $3k+1=\frac{3a}{2}+1$ ακέραιους.
- $a=2k+1, k\in\mathbb{N}$. Τότε $\mathrm{A}=\left[2k+1,5k+\frac{5}{2}\right]=\left[2k+1,5k+2+\frac{1}{2}\right]$, οπότε περιέχει $3k+1+1=\frac{3(a-1)}{2}+2=\frac{3a}{2}+\frac{1}{2}$ ακέραιους.

Πρόβλημα 4

Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma:\begin{cases}\alpha\sqrt[3]{b}-c=\alpha\\ b\sqrt[3]{c}-\alpha=b\\ c\sqrt[3]{\alpha}-b=c\end{cases}$$

Λύση

Αν κάποιος από τους a,b,c είναι ίσος με 0, τότε από τις εξισώσεις βγαίνει ότι και οι άλλοι δύο πρέπει να είναι ίσοι με 0, οπότε $a=b=c=0$ είναι μία λύση. Υποθέτουμε τώρα ότι $a,b,c>0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο c είναι μεγαλύτερος ή ίσος των a,b. Τότε από την πρώτη σχέση έχουμε $\alpha\sqrt[3]{b}=\alpha+c\geq 2\alpha$, οπότε $\sqrt[3]{b}\geq 2$, δηλαδή $b\geq 8$ (1).

Οπότε θα είναι $c\geq 8$ (αφού είναι μεγαλύτερος ή ίσος του b). Οπότε από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε $b=b\sqrt[3]{c}-a\geq 2b-a$, οπότε $a\geq b$ και από την (1) έχουμε $a\geq 8$. Η τελευταία τώρα δίνει $c=c\sqrt[3]{a}-b\geq 2c-b$, οπότε $b\geq c$.

Επομένως, τελικά έχουμε $b\geq c\geq a\geq b$, δηλαδή $a=b=c$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε $a\sqrt[3]{a}=2a$ και αφού $a>0$, έχουμε ότι $a=8$, οπότε $a=b=c=8$ είναι λύση.

Τελικά οι δύο λύσεις είναι $(a,b,c)\in\{(0,0,0),(8,8,8)\}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις $y=\frac{1}{x}$ και $y=-\frac{1}{x}$. Μία ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $\mathrm{A}\left(\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta,\frac{1}{\beta}\right)$, και τους δύο κλάδους της υπερβολής $y=-\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma,-\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta,-\frac{1}{\delta}\right)$ με $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha+\beta=\gamma+\delta$

(ii) τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσα εμβαδά.

Λύση

Η ευθεία $\varepsilon_{\mathrm{AB}}$ που περνάει από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση:

$$y-\frac{1}{\alpha}=\left(\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}{\beta-\alpha}\right)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\alpha\beta}x+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}.$$

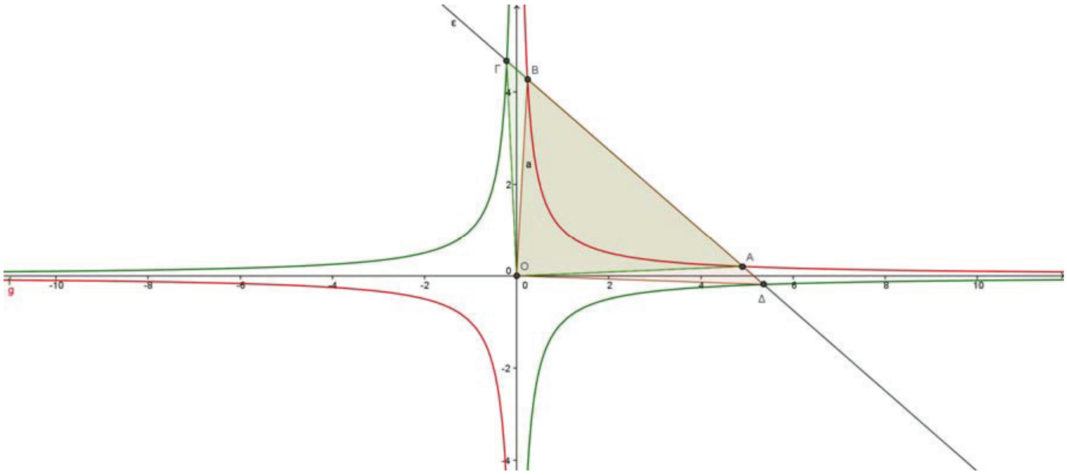
Η ευθεία $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ που περνάει από τα σημεία Γ και Δ έχει εξίσωση:

$$y+\frac{1}{\gamma}=\left(\frac{-\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\gamma}}{\delta-\gamma}\right)(x-\gamma)\Leftrightarrow y=\frac{1}{\gamma\delta}x-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}.$$

Επειδή οι ευθείες ε_{AB} και $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ συμπίπτουν, έπεται ότι:

$$-\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\gamma\delta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta},$$

από τις οποίες προκύπτει η ισότητα: $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.



Σχήμα 5

(ii) Τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ έχουν τετμημένες $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και $\frac{\gamma+\delta}{2}$ οι οποίες λόγω της (i) ταυτίζονται, οπότε τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν κοινό μέσο, έστω Μ. Τότε, δεδομένης της διάταξης των σημείων πάνω στην ευθεία ε που προκύπτει από τις συνθήκες $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$, ισχύει ότι:

$$\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AM}+\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{BM}+\mathrm{M\Delta}=\mathrm{B\Delta},$$

οπότε τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσες βάσεις στις οποίες αντιστοιχούν ίσα ύψη από την κορυφή Ο, οπότε έχουν και ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{3x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+2}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{A}(x)=3x^2-3x+4,\ \mathrm{B}(x)=x^2+3,\ \Gamma(x)=2x^2-3x+5, \Delta(x)=2x^2+2,$$

παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω τριώνυμα έχουν αρνητική διακρίνουσα, οπότε έχουν θετική τιμή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι ποσότητες μέσα στα ριζικά των δύο μελών της εξίσωσης έχουν σταθερό άθροισμα, δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x)=\Gamma(x)+\Delta(x)\Leftrightarrow \mathrm{A}(x)-\Delta(x)=\Gamma(x)-\mathrm{B}(x)=\mathrm{P}(x)=x^2-3x+2.$$

Τότε η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\sqrt{\Delta(x)+\mathrm{P}(x)}+\sqrt{\mathrm{B}(x)}=\sqrt{\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)}+\sqrt{\Delta(x)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta(x)+\mathrm{P}(x)+\mathrm{B}(x)+2\sqrt{\mathrm{B}(x)\left[\Delta(x)+\mathrm{P}(x)\right]}=$$

$$(x)+\mathrm{P}(x)+\Delta(x)+2\sqrt{\Delta(x)\left[\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)\right]}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{B}(x)\left[\Delta(x)+\mathrm{P}(x)\right]=\Delta(x)\left[\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{P}(x)\left[\mathrm{B}(x)-\Delta(x)\right]=0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(x)=0 \text{ ή } \mathrm{B}(x)-\Delta(x)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \text{ ή } x^2+3-2x^2-2=0 \qquad ,$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2=1 \Leftrightarrow x=1(\text{διπλή}) \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-1.$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακεραίους x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3+y^3-x-y=pq$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί.

Λύση

Γράφουμε $\mathrm{x}^3-\mathrm{x}=\mathrm{x}\left(\mathrm{x}^2-1\right)=\left(\mathrm{x}-1\right)\mathrm{x}\left(\mathrm{x}+1\right)$, το οποίο είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, επομένως διαιρείται και από το 2 και από το 3. Επομένως ο 6 διαιρεί το $(x-1)x(x+1)$.

Όμοια ο 6 διαιρεί το $(y-1)y(y+1)$, οπότε το αριστερό μέλος διαιρείται από 6. Άρα ο 6 διαιρεί το pq, και αφού p, q πρώτοι αριθμοί, θα πρέπει $pq=6$.

Επομένως η εξίσωση γίνεται $(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)=6$. Αν τώρα $x, y \geq 2$, τότε $(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)\geq 6+6=12$, οπότε κάποιος είναι μικρότερος του 2, έστω ο y. Τότε όμως $(y-1)y(y+1)=0$, οπότε $(x-1)x(x+1)=6$ και αφού x μη αρνητικός ακέραιος, πρέπει $x=2$. Επομένως οι λύσεις είναι:

$$(x, y)\in\{(2,0),(2,1),(0,2),(1,2)\}.$$

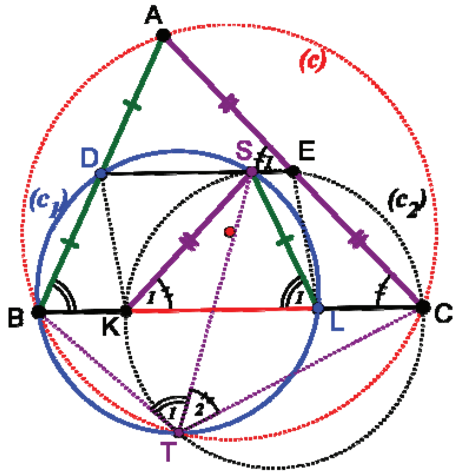
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC<BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ και έστω D, E τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα. Έστω T τυχόν σημείο του μικρού τόξου BC και (c_1), (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDT και CET αντίστοιχα. Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνουν την BC στα σημεία L και K. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DELK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Η DE συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα $\mathrm{DE}//=\dfrac{\mathrm{BC}}{2}$, άρα το τετράπλευρο $DELK$, είναι τραπέζιο. Επομένως, για να είναι το τετράπλευρο $DELK$ παραλληλόγραμμο, αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $DE=KL=\dfrac{BC}{2}$.

Έστω ότι ο κύκλος (c_1), τέμνει το τμήμα DE στο σημείο S. Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο S. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 6

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABTC$, έχουμε: $\hat{A}+\hat{T}_1+\hat{T}_2=180^o$ (1).

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $SLTB$, έχουμε: $\hat{T}_1=\hat{L}_1$ (2).

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $DSLB$, έχουμε: $\hat{L}_1=\hat{B}$ (3).

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε: $\hat{T}_2=\hat{C}$ και επειδή $\hat{E}_1=\hat{C}$ (από την παραλληλία $DE\,//\,BC$), συμπεραίνουμε ότι $\hat{T}_2=\hat{E}_1$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία $\hat{E}_1$ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική $\hat{T}_2$). Επομένως έχουμε αποδείξει ότι **το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκεται πάνω στην ευθεία DE.**

Παρατηρούμε τώρα ότι τα τετράπλευρα $DSLB$ και $SECK$ είναι εγγεγραμμένα τραπέζια (άρα ισοσκελή τραπέζια), οπότε θα ισχύουν οι ισότητες τμημάτων

$$SL=DB=\frac{AB}{2},\ SK=EC=\frac{AC}{2},$$

από τις οποίες σε συνδυασμό με τις ισότητες γωνιών $\hat{L}_1=\hat{B}$ και $\hat{K}_1=\hat{C}$, συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ABC και SLK είναι όμοια (με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

Τελικά προκύπτει ότι: $DE=KL=\frac{BC}{2}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

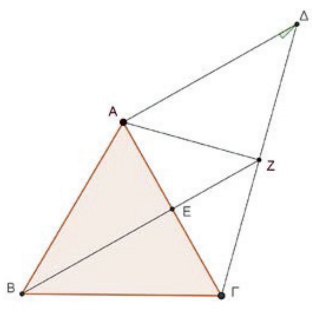
$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Λύση

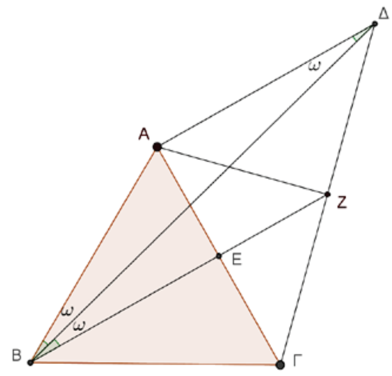
$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}=\left(\frac{-20}{5}\right)^2+\left(\frac{15}{-5}\right)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^3-\left(\frac{9}{-3}\right)^3$$

$$=(-4)^2+(-3)^3+(-4)^3-(-3)^3=(-4)^2+(-4)^3=16-64=-48.$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.
(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$.



Λύση
(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείου Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή είναι $ΑΔ = \alpha$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$Α\hat{Δ}Β = Α\hat{Β}Δ \qquad (1)$$

Η διάμεσος ΒΕ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά ΑΓ, όπως είναι κάθετη και η ΑΔ, από την υπόθεση. Επομένως είναι $ΒΕ \parallel ΑΔ$, οπότε

$$Α\hat{Δ}Β = Δ\hat{Β}Ε \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$Α\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Ε. \qquad (3)$$

Άρα η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Β}Ε$, οπότε θα έχουμε

$$Α\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Ε = \frac{Α\hat{Β}Ε}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η ΒΕ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, δηλαδή $Α\hat{Β}Ε = \frac{Α\hat{Β}Γ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε $Α\hat{Δ}Β = 15^\circ$.

Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις . Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α .

Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540\alpha}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$540-\frac{540\alpha}{100}+\left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100}=540 \Leftrightarrow \left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\beta=540\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{540\left(100-\alpha\right)}{100}\cdot\beta=540\alpha \Leftrightarrow \beta=\frac{540\alpha\cdot 100}{540\left(100-\alpha\right)} \Leftrightarrow \beta=\frac{100\alpha}{100-\alpha}.$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του A, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: $88, 89, 98, 99$. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός Α είναι διψήφιος, τότε πρέπει $\mathrm{A}=88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί $8888, 9988$ έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι $8988, 9888$, οπότε η ελάχιστη τιμή του Α είναι 8988.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha=\frac{12^{\nu}}{3^{\nu}}:2^{2\nu-1}$ και $\beta=10^{2\nu+1}:100^{\nu}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(\alpha^3-\beta\right)^3+\alpha^2\beta-2\beta+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta-10\alpha}.$$

Λύση

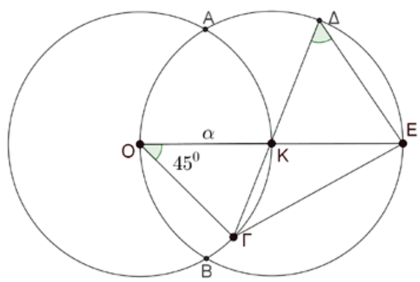
Έχουμε ότι $\alpha=\frac{12^{\nu}}{3^{\nu}}:2^{2\nu-1}=\left(\frac{12}{3}\right)^{\nu}:2^{2\nu-1}=4^{\nu}:2^{2\nu-1}=2^{2\nu}:2^{2\nu-1}=2^{2\nu-(2\nu-1)}=2.$

και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^{\nu} = 10^{2\nu+1} : 10^{2\nu} = 10$, οπότε είναι $\alpha^2 = 4, \alpha^3 = 8$ και

$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha} = \frac{(8-10)^3 + 40 - 20 + 8}{4 + 20 - 20} = \frac{-8 + 40 - 20 + 8}{4} = 5$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $\text{ΟΚ} = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $\text{Κ}\hat{\text{Ο}}\text{Γ} = 45^\circ$, να βρείτε :

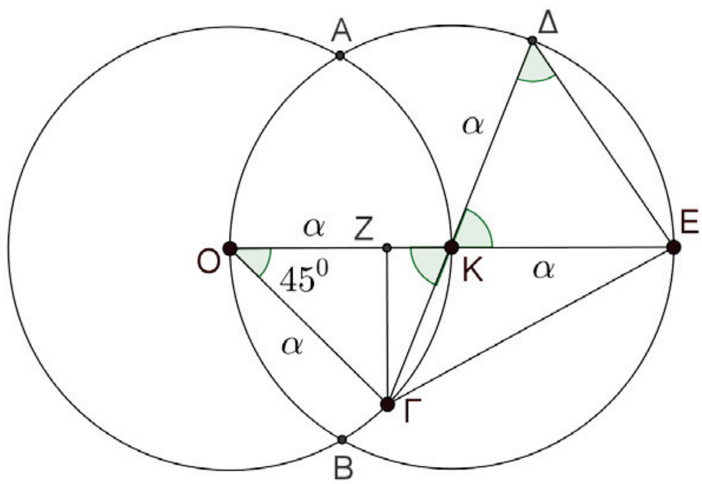


(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\text{Κ}\hat{\Delta}\text{Ε}$,

(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α .

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΟΚΓ έχει $\text{ΟΚ} = \text{ΟΓ} = \alpha$, οπότε είναι ισοσκελές με βάση ΚΓ. Άρα έχει τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του ίσες, οπότε θα είναι:



Σχήμα 2

$$\text{Ο}\hat{\text{Κ}}\Gamma = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67{,}5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Επίσης, επειδή οι γωνίες $\Delta\hat{\text{Κ}}\text{Ε}$ και $\text{Ο}\hat{\text{Κ}}\Gamma$ είναι κατά κορυφή, έχουμε

$$\Delta\hat{\text{Κ}}\text{Ε} = \text{Ο}\hat{\text{Κ}}\Gamma = 67{,}5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Η γωνία $\text{Κ}\hat{\Delta}\text{Ε}$ είναι μία από τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΔΚΕ (έχει $\text{Κ}\Delta = \text{ΚΕ} = \alpha$), οπότε

$$\mathrm{K\hat{\Delta}E} = \frac{180^\circ - 67,5^\circ}{2} = \frac{112,5^\circ}{2} = 56,25^\circ \text{ μοίρες}$$

(β) Έστω ΓΖ το ύψος του τριγώνου ΟΓΕ από την κορυφή Γ. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΖ έχουμε

$$\mathrm{\Gamma Z} = \alpha \cdot \eta\mu 45^\circ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ είναι

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{O\Gamma\Delta}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}.$$

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος και οι φίλοι του ήταν συνολικά x, .όπου $x \geq 4$, από την υπόθεση. Τότε ο καθένας τους αρχικά πήρε $\frac{450}{x}$ καραμέλες. Ο τρεις φίλοι επέστρεψαν στο Γιώργο συνολικά

$$3\cdot\frac{20}{100}\cdot\frac{450}{x} = \frac{270}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Ο Γιώργος πήρε συνολικά

$$\frac{450}{x} + \frac{270}{x} = \frac{720}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος , πρέπει:

$$\frac{720}{x} > 120 \Leftrightarrow 120x < 720 \Leftrightarrow x < 6.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές για το x είναι $x = 4$ ή $x = 5$.Όμως η τιμή $x = 4$ απορρίπτεται, γιατί η διαίρεση $450:4$ δεν δίνει ακέραιο πηλίκο. Άρα είναι $x = 5$ και ο Γιώργος πήρε συνολικά $\frac{720}{5} = 144$ καραμέλες.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A} = \overline{3a5b} = 3\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + b \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \overline{5c3d} = 5\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + d\,.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d , ισχύει ότι: $\frac{\mathrm{A}}{36} < \frac{\mathrm{B}}{45}$

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{\mathrm{A}}{36}, \frac{\mathrm{B}}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a,b,c,d .

Λύση

(α) Ισχύει ότι $\frac{\mathrm{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<\frac{3959}{36}<\frac{3960}{36}=110$. Επίσης η μικρότερη τιμή του $\overline{5c3d}$ λαμβάνεται όταν $c = d = 0$, άρα

$$\frac{\mathrm{B}}{45}=\frac{\overline{5c3d}}{45}>\frac{5030}{45}>111.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d ισχύει ότι:

$$\frac{\mathrm{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}=\frac{\mathrm{B}}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους, το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι $\frac{\mathrm{A}}{36}<110<111<\frac{\mathrm{B}}{45}$.

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109\le\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}\le 112.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι $\overline{3a5b}>109\cdot 36\Leftrightarrow\overline{3a5b}>3924$, οπότε πρέπει $a=9$ και ο b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 9.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45}\le 112\Leftrightarrow\overline{5c3d}<112\cdot 45\Leftrightarrow\overline{5c3d}<5040,$$

οπότε $c=0$ και το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x\le x^3+x+19. \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \qquad (2)$$

Λύση.

Έχουμε:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x\le x^3+x+19\Leftrightarrow x^3-x^2+x^2-x+x-1+5x\le x^3+x+19$$

$$\Leftrightarrow x^3-1+5x\le x^3+x+19\Leftrightarrow 4x\le 20\Leftrightarrow x\le 5.$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9}\Leftrightarrow 6x-3-23>4x-21\Leftrightarrow 2x>5\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{5}{2}<x\le 5$, οπότε οι ακέραιες τιμές του x που τις συναληθεύουν είναι οι τιμές 3 , 4 και 5.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί θετικός ακέραιος $A = \overline{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0} = \alpha_\nu \cdot 10^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot 10^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$, $\nu \geq 2$, ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Λύση

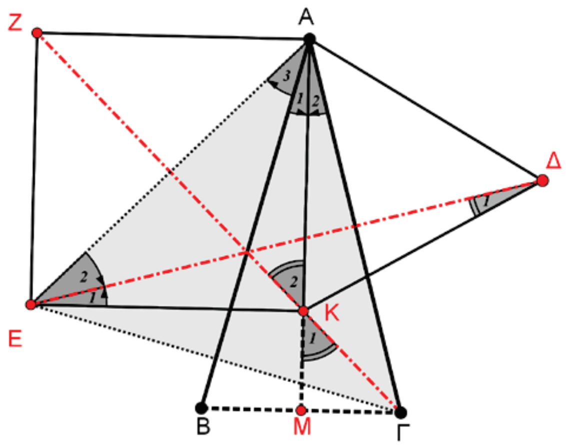
Επειδή τα ψηφία του αριθμού έχουν γινόμενο 8 και άθροισμα 8, αυτά πρέπει να είναι διαιρέτες του 8 που έχουν άθροισμα 8. Οι διαιρέτες του 8 είναι οι θετικοί ακέραιοι 1,2, 4 και 8. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πολλαπλάσια του 8 είναι άρτιοι ακέραιοι, οι δυνατές επιλογές ψηφίων είναι:

- 1,1,2 και 4, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 1124, 1142, 1214, 1412, 2114, 4112.Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός Α = 4112 διαιρείται με το 8.
- 1,1,2,2,2, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 11222, 12122, 12212, 21122, 21212 και 22112 Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός Α = 22112 διαιρείται με το 8.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 30^\circ$. Στο ύψος ΑΜ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΜΒ=ΜΓ=ΜΚ. Με βάση την ΑΚ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΚΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Β) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΚΔ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΓΖ, τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Λύση



Σχήμα 3

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΜΓΚ, έχουμε: $\widehat{K}_1 = 45^\circ$.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΖ, έχουμε: $\widehat{K}_2 = 45^\circ$.

Άρα τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά, οπότε η ΓΖ είναι μεσοκάθετος της ΑΕ **(*)** και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές (ΓΑ=ΓΕ).

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15^\circ$ (διότι $\widehat{A} = 30^\circ$) και $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = 45^\circ$ (διότι $E\widehat{A}K = 45^\circ$).
Άρα $E\widehat{A}\Gamma = 60^\circ$ και κατά συνέπεια το ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο.
Επιπλέον $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 30^\circ = \widehat{A}_3$.
Άρα η ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{E\widehat{A}\Gamma}$ **(**)**.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΕ ισχύει $\Delta\widehat{K}E = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.
Άρα $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{E}_1 = 15^\circ$. Επειδή όμως $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\widehat{E}_2 = 30^\circ$,
δηλαδή η ΕΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{A\widehat{E}\Gamma}$ **(***)**.
Από τα συμπεράσματα (*),(**) και (***) καταλήγουμε ότι οι ΔΕ, ΓΖ και ΑΒ συντρέχουν, δηλαδή οι ΔΕ και ΓΖ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο
$$A = 2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$
να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Λύση
Θέτουμε $n = 2014$ και τότε έχουμε: $A = (n+3)(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)$ και θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμό Α στη μορφή $A = \varphi(n)^2 - k$, όπου $\varphi(n)$ πολυώνυμο μεταβλητής n με ακέραιους συντελεστές και k θετικός ακέραιος.
Με εκτέλεση των πράξεων, έχουμε:
$$A = (n^2-9)(n^2-4)(n^2-1) = n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36 =$$
$$= n^2(n^4 - 14n^2 + 49) - 36 = n^2(n^2-7)^2 - 36$$
Επομένως, αν στον αριθμό Α προσθέσουμε θετικό ακέραιο $k = 36$, παίρνουμε ότι $A + 36 = n^2(n^2-7)^2 = (n^3 - 7n)^2$, που δίνει έναν θετικό ακέραιο υψωμένο στο τετράγωνο. Άρα μία τιμή για το k είναι η τιμή $k = 36$.

Σημείωση.
Μία σύντομη απάντηση μπορεί να δώσει κάποιος στο πρόβλημα, αν θεωρήσει τον αριθμό $k = B^2 - A$, με $B^2 > A$. Ένας τέτοιος αριθμός είναι ο $k = A^2 - A$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος
$$A = (\alpha^2 + 18)^2 - (8\alpha + 1)^2$$
είναι πρώτος.

Λύση
Έχουμε
$$A = (\alpha^2+18)^2 - (8\alpha+1)^2 = (\alpha^2 + 18 + 8\alpha + 1)(\alpha^2 + 18 - 8\alpha - 1)$$
$$= (\alpha^2 + 8\alpha + 19)(\alpha^2 - 8\alpha + 17) = \left[(\alpha+4)^2 + 3\right]\left[(\alpha-4)^2 + 1\right].$$

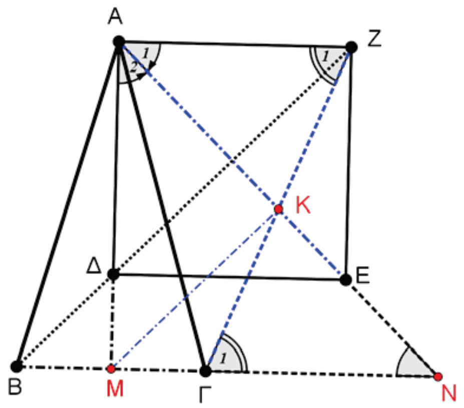
Επειδή $(\alpha+4)^2+3\geq 3$, ο ακέραιος Α θα είναι πρώτος, μόνον όταν

$$(\alpha-4)^2+1=1 \Leftrightarrow \alpha=4$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

Λύση



Σχήμα 3

Προεκτείνουμε τις ΑΕ , ΒΓ και έστω Ν το σημείο τομής τους.

Από την ισότητα των γωνιών $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2=\widehat{N}=45^{\circ}$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

Επομένως ΜΑ=ΜΝ⇔ΜΔ+ΔΑ=ΜΓ+ΓΝ και με δεδομένη την ισότητα ΜΓ=ΜΔ, καταλήγουμε: ΑΔ=ΓΝ=ΑΖ.

Θα συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ.

Ισχύουν οι ισότητες: α) ΓΝ=ΑΖ β) $\widehat{\Gamma}_1=\widehat{Z}_1$ και γ) $\widehat{A}_1=\widehat{N}$.

Άρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ είναι ίσα, οπότε ΚΖ=ΚΓ και ΚΑ=ΚΝ.

Επομένως, η ΜΚ είναι διάμεσος (άρα και ύψος) στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΝ. Οπότε οι ΜΚ και ΔΖ είναι παράλληλες (διότι είναι και οι δύο κάθετες στην διαγώνιο ΑΕ.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}>16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)
Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} > 2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}. \qquad (1)$$

Πράγματι, η τελευταία είναι ισοδύναμη με

$$\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right)^2 > \frac{4(\alpha+1)}{\alpha} \Leftrightarrow (2\alpha+1)^2 > 4\alpha(\alpha+1) \Leftrightarrow 4\alpha^2+4\alpha+1 > 4\alpha^2+4\alpha,$$

που ισχύει.
Αν βάλουμε τώρα στην (1) όπου α το $\alpha+1$, παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+3}{\alpha+1} > 2\sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} \qquad (2)$$

Και ομοίως παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+5}{\alpha+2} > 2\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}} \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \frac{2\alpha+7}{\alpha+3} > 2\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη, έχουμε ότι:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\cdot\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} = 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{x+\frac{1}{x}-w=2,\ y+\frac{1}{y}-w=2,\ z+\frac{1}{x}+w=2,\ y+\frac{1}{z}+w=2\right\}.$$

Λύση
Έστω

$$\textbf{(Σ)}\quad \left\{x+\frac{1}{x}=w+2 \ \ (1),\ y+\frac{1}{y}=w+2 \ \ (2), z+\frac{1}{x}=2-w \ \ (3), y+\frac{1}{z}=2-w \ \ (4)\right\}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow x=y \ \text{ ή } \ xy=1.$$

Περίπτωση 1: Έστω $x=y$. Τότε από τις (3) και (4) έχουμε:

$$z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{z} \Leftrightarrow (z-x)\left(1+\frac{1}{zx}\right)=0 \Leftrightarrow x=z \ \text{ ή } \ xz=-1.$$

- Αν $x=z$, τότε $x=y=z$ και από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

  $w=0$ και $x+\dfrac{1}{x}=2 \Leftrightarrow w=0$ και $x=1$. Επομένως, σε αυτή την υποπερίπτωση έχουμε τη λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.
- Αν $xz=-1$, τότε οι x, z θα είναι ετερόσημοι, οπότε ένας θα είναι αρνητικός.

Περίπτωση 2: Έστω $xy=1$. Τότε με αφαίρεση της (4) από την (3) λαμβάνουμε:

$$z-\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow z^2-1=0 \Leftrightarrow z=1, \text{ αφού } z\geq 0.$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) λαμβάνουμε

$$x+\frac{2}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2.$$

- Για $x=1$, προκύπτει πάλι η λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.
- Για $x=2$, προκύπτει η λύση $(x,y,z,w)=\left(2,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

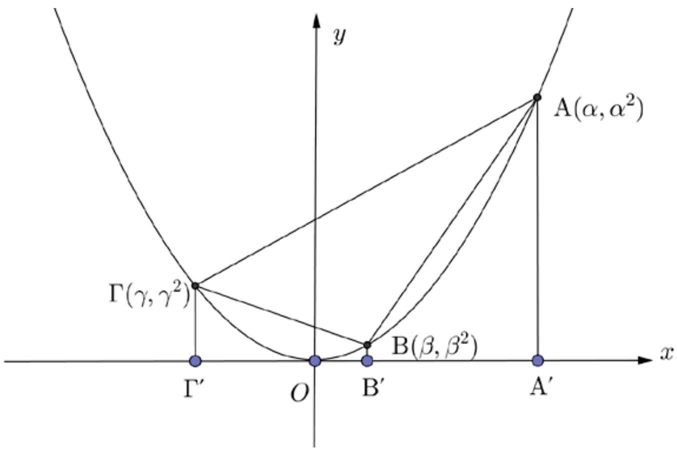
Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y=x^2$ και τα σημεία της A,B και Γ με τετμημένες α,β και γ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\omega>0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του ω.

Λύση

Αν είναι A',B' και Γ' οι προβολές των σημείων A,B και Γ πάνω στον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
E(\mathrm{AB\Gamma}) &= E(\mathrm{A\Gamma\Gamma'A'})-E(\mathrm{ABB'A'})-E(\mathrm{B\Gamma\Gamma'B'})\\
&=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{2}\cdot 2\omega-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\cdot\omega-\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}\cdot = \frac{\omega}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2-\beta^2-\gamma^2\right)\\
&=\frac{\omega}{2}\cdot\left(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\beta^2\right)=\frac{\omega}{2}\cdot\left[\alpha^2-\beta^2-\left(\beta^2-\gamma^2\right)\right]= \\
&=\frac{\omega}{2}\cdot\left[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)\right]=\frac{\omega^2}{2}\cdot(\alpha+\beta-\beta-\gamma)=\frac{\omega^2}{2}\cdot 2\omega=\omega^3
\end{aligned},$$



Σχήμα 5

Σημείωση.

Η άσκηση μπορεί να λυθεί με χρήση του τύπου εμβαδού τριγώνου από την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου της Β΄ Λυκείου. Έχουμε

$$E(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\det(\mathbf{ΒΑ},\mathbf{ΒΓ})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha-\beta & \alpha^2-\beta^2\\ \gamma-\beta & \gamma^2-\beta^2\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)(\gamma^2-\beta^2)-(\alpha^2-\beta^2)(\gamma-\beta)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma+\beta-\alpha-\beta)$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)=\frac{1}{2}\omega\cdot(-\omega)(-2\omega)=\omega^3.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{\text{Α}}=45^\circ$. Στο ύψος ΑΔ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΔΒ = ΔΓ = ΔΚ. Οι προεκτάσεις των υψών ΒΕ και ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Κ και Μ είναι συνευθειακά.

Λύση

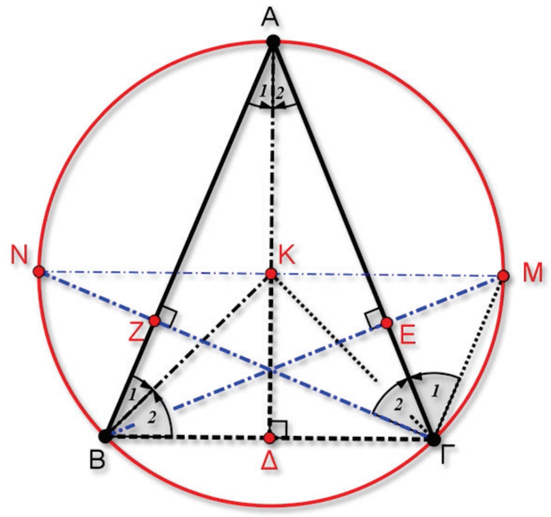
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ (δηλαδή ότι το σημείο Κ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ).

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΚ, έχουμε: $\widehat{\text{Β}}_2=45^\circ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (αφού $\widehat{\text{Α}}=45^\circ$) έχουμε:

$$\widehat{\text{Β}}=90^\circ-\widehat{\text{Α}}_1=90^\circ-22{,}5^\circ=67{,}5^\circ.$$

Άρα $\hat{\text{Β}}_1=\hat{\text{Β}}-\hat{\text{Β}}_2=67{,}5^\circ-45^\circ=22{,}5^\circ=\hat{\text{Α}}_1$, δηλαδή το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές με ΚΑ=ΚΒ. Όμοια αποδεικνύουμε ότι ΚΑ=ΚΓ, οπότε το Κ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 6

Η γωνία $\widehat{\Gamma}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου που βαίνει στο τόξο ΑΜ.

Άρα $\hat{\Gamma}_1=\text{Μ}\hat{\text{Β}}\text{Α}=90^\circ-\hat{\text{Α}}=45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ).

Ισχύει επίσης $\hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \hat{A} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΖ).

Επομένως $M\hat{\Gamma}N = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ$, δηλαδή η ΜΝ είναι διάμετρος του κύκλου, άρα θα περνά από το κέντρο Κ του κύκλου.

Πρόβλημα 3

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1)=1,\ P(2)=4, P(3)=9,\ P(4)=16.$

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Λύση

Το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - x^2$ είναι τετάρτου βαθμού και λόγω της (α) έχει ρίζες τους αριθμούς 1,2,3 και 4. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Q(x) = P(x) - x^2 = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$\Leftrightarrow P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x^2$$
$$\Leftrightarrow P(x) = ax^4 - 10ax^3 + (35a+1)x^2 - 50ax + 24a$$

Άρα είναι

$$P(5) = 24a + 25 .$$

Λόγω της (β) έχουμε:

$$a \le 10,\ -10a \le 10,\ 35a+1 \le 10,\ -50a \le 10,\ 24a \le 10$$
$$\Leftrightarrow a \le 10,\ \ a \ge -1,\ a \le \frac{9}{35},\ a \ge -\frac{1}{5},\ a \le \frac{10}{24} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \le a \le \frac{9}{35}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$-\frac{1}{5} \le a \le \frac{9}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5} \le 24a \le \frac{9\cdot 24}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5} + 25 \le 24a + 25 \le \frac{9\cdot 24}{35} + 25$$
$$\Leftrightarrow \frac{101}{5} \le 24a + 25 \le \frac{1091}{35} \Leftrightarrow \frac{101}{5} \le P(a) \le \frac{1091}{35},$$

δηλαδή η μικρότερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{101}{5}$ και η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{1091}{35}$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $A = 14^7 + 14^2 + 1$.

Λύση

Θέτουμε για ευκολία $n = 14$ και θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμό $A = n^7 + n^2 + 1$. Πράγματι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο $n^2 + n + 1$ είναι παράγοντάς του Α ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&A = n^7 + n^2 + 1 = n^7 - n + n^2 + n + 1 = n(n^6 - 1) + n^2 + n + 1 = \\
&= n(n^3+1)(n^3-1) + n^2 + n + 1 = n(n^3+1)(n-1)(n^2+n+1) + n^2 + n + 1 = \\
&= (n^2+n+1)(n^5 - n^4 + n^2 - n + 1)
\end{aligned}
$$

Επομένως ο αριθμός $n^2 + n + 1 = 14^2 + 14 + 1 = 211$ διαιρεί τον αριθμό A. Επιπλέον, ο 211 είναι πρώτος και το ζητούμενο έπεται.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2017

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

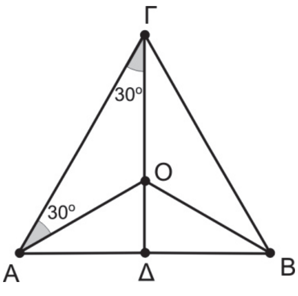
Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}.$$

Λύση

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}\\&=\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^3+\left(\frac{-15}{-3}\right)^3\right)\cdot(-2)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^2-(-4)^2\\&=\left((-5)^3+(+5)^3\right)\cdot(-2)^3+(-4)^2-(-4)^2\\&=\left(-5^3+5^3\right)\cdot(-2)^3+16-16=0\cdot(-2)^3+0=0.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:
(α) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.
(β) Αν $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=30^0$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

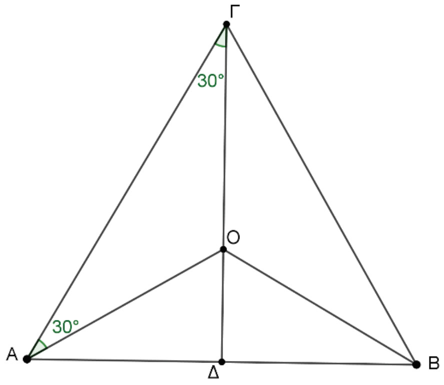


Λύση
(α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση τη ΑΒ, έχουμε ότι $\Gamma\mathrm{A}=\Gamma\mathrm{B}$ και $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$, δηλαδή τα σημεία Γ και Ο ανήκουν στη μεσοκάθετη του ΑΒ, οπότε η ευθεία ΓΟ είναι η μεσοκάθετη του ΑΒ. Επομένως τέμνει κάθετα την ΑΒ στο μέσο της, δηλαδή ΑΔ = ΔΒ.

(β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο στο Γ και έχει $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$, οπότε θα είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ$ Επομένως

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma,$$

οπότε η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Λύση

Το ποσόν του ΦΠΑ είναι: $1200 \cdot \dfrac{24}{100} = 12 \cdot 24 = 288$ ευρώ, οπότε η τιμή του σαλονιού μαζί με το ΦΠΑ είναι: $1200 + 288 = 1488$ ευρώ.

Οι τόκοι που πρέπει να πληρωθούν είναι: $1488 \cdot \dfrac{5}{100} = \dfrac{7440}{100} = 74,4$ ευρώ.

Η τελική τιμή που θα πληρώσει ο Γιώργος είναι:

$$1200 + 288 + 74,4 = 1562,4 \text{ ευρώ},$$

οπότε η κάθε μηνιαία δόση είναι: $1562,4 : 12 = 130,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α.

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 5 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $15 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 5553.
- Ο Α έχει δύο φορές ψηφίο το 5 μία φορά το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $18 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 0$ ή $x = 9$. Άρα έχουμε τους αριθμούς :

5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.

- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $21+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=6$. Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $24+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}&=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018\\
&=\left(\left(-\frac{10}{2}\right)^{2\nu+1}+\left(+\frac{15}{3}\right)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+\left(-\frac{8}{2}\right)^{2\nu}-\left(-\frac{4}{1}\right)^{2\nu}+2018\\
&=\left((-5)^{2\nu+1}+(+5)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+(-4)^{2\nu}-(-4)^{2\nu}+2018\\
&=\left(-5^{2\nu+1}+5^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+2018=-5^{2\nu-1}\left(5^2-1\right)2017^2+2018\\
&=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot2017^2+2018=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot4068289+2018.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Λύση

Ονομάζουμε A,B το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε x λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε $2x$ από τις μαύρες πλάκες.

Επιπλέον, αφού το εμβαδό των μαύρων πλακών είναι 80τ.μ, θα έχουμε ότι $(2x)\cdot \mathrm{B} = 80$. Όμως, από τα δεδομένα έχουμε ότι $\mathrm{A} = 9\mathrm{B}$. Επομένως το συνολικό εμβαδό που καλύπτουν οι άσπρες πλάκες είναι $x\mathrm{A} = x(9\mathrm{B}) = 9x\mathrm{B} = 9\cdot 40 = 360$. Επομένως το συνολικό εμβαδό της αυλής είναι $360 + 80 = 440$ τ.μ.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 6 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 6 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο θετικός ακέραιος που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής

πολ.6+4 = πολ.3+3+1 =πολ.3+1,

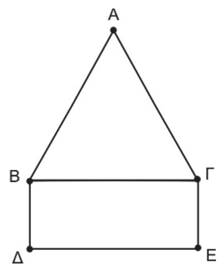
οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επομένως τέσσερις από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.

Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,4,7,8.

Για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού πρέπει να είναι 64. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 2 και το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7. Επειδή ο 664 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον τετραψήφιο αριθμό 6664 ο οποίος διαιρείται με τους 2, 4 , 8 και 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά $\mathrm{B\Delta} = \dfrac{\alpha}{2}$.

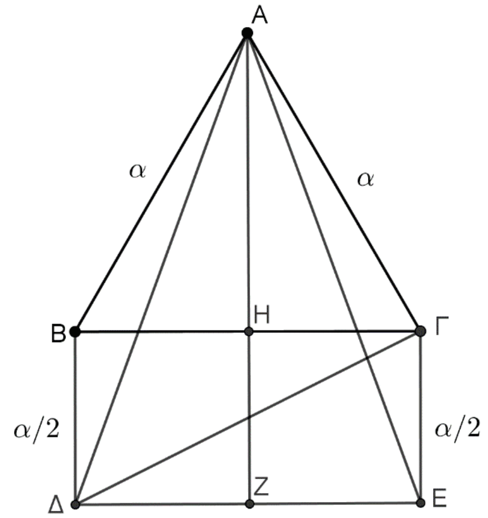


(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$.

(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ.

Λύση

(α) (1ος τρόπος) Έστω ότι η κάθετη από την κορυφή Α προς την πλευρά ΒΓ την τέμνει στο Η και έστω επίσης τέμνει την πλευρά ΔΕ του ορθογωνίου στο Ζ. Τότε η ΑΗ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ, οπότε ΒΗ = ΗΓ. Επειδή η ΑΖ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΔΕ. Επομένως και τα τετράπλευρα ΒΔΖΗ, ΗΖΕΓ είναι ορθογώνια, οπότε ΒΗ = ΔΖ και ΗΓ = ΖΕ. Επομένως θα είναι και ΔΖ = ΖΕ. Έτσι η ΑΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΔΕ, οπότε ΑΔ = ΑΕ.



Σχήμα 2

(2^{ος} τρόπος) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν ίσες πλευρές $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \alpha$ και $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Gamma E} = \dfrac{\alpha}{2}$, ενώ οι περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές είναι επίσης ίσες, αφού

$$\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} + \mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} + \mathrm{B\hat{\Gamma}E} = \mathrm{A\hat{\Gamma}E}.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$.

(β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$(\mathrm{AB\Delta}) = (\mathrm{ABH}) + (\mathrm{B\Delta ZH}) - (\mathrm{A\Delta Z}),$$

όπου

$$(\mathrm{ABH}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8},\ (\mathrm{B\Delta ZH}) = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},$$

$$(\mathrm{A\Delta Z}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha+\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{8} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2}{8}.$$

Άρα είναι

$$(\mathrm{AB\Delta}) = (\mathrm{ABH}) + (\mathrm{B\Delta ZH}) - (\mathrm{A\Delta Z}) = \frac{\alpha^2}{8}.$$

Έχουμε επίσης $(\mathrm{A\Delta\Gamma}) = (\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{B\Delta\Gamma}) - (\mathrm{AB\Delta})$. Όμως είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4},(\mathrm{B\Delta\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},(\mathrm{AB\Delta}) = \frac{\alpha^2}{8},$$

οπότε

$$(\mathrm{A\Delta\Gamma}) = (\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{B\Delta\Gamma}) - (\mathrm{AB\Delta}) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2\left(2\sqrt{3}+1\right)}{8}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Λύση

Έστω ότι γίνεται. Ονομάζουμε x τον κοινό χρόνο που έπαιξε ο κάθε ποδοσφαιριστής, όπου x είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο συνολικός χρόνος που έπαιξαν όλοι οι ποδοσφαιριστές είναι $16x$. Όμως κάθε στιγμή υπάρχουν 11 ποδοσφαιριστές, άρα ο συνολικός χρόνος που παίζουν οι ποδοσφαιριστές σε έναν αγώνα είναι $90\cdot 11$. Συνεπώς πρέπει $16x = 90\cdot 11$, που δίνει $x = \frac{90\cdot 11}{16} = \frac{45\cdot 11}{8}$, που δεν είναι ακέραιος. Συνεπώς δεν είναι δυνατό όλοι οι παίκτες να παίξουν τον ίδιο ακέραιο αριθμό λεπτών.

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0$$

Λύση

Γράφουμε την δοθείσα στη μορφή

$$(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 - 4y + 1) + (9z^2 + 12z + 4) = 3 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 + (2y-1)^2 + (3z+2)^2 = 3$$

Επομένως έχουμε το άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων να ισούται με τρία. Η μόνη περίπτωση να ισχύει αυτό είναι να έχουμε $(x-2)^2 = (2y-1)^2 = (3z+2)^2 = 1$.
Άρα έχουμε

$$\begin{cases} x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 \\ 2y-1=1 \text{ ή } 2y-1=-1 \\ 3z+2=1 \text{ ή } 3z+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ή } x=1 \\ y=1 \text{ ή } y=0 \\ z=-1/3 \text{ (απορρίπτεται) ή } z=-1 \end{cases}$$

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι $(3,1,-1), (1,1,-1), (3,0,-1), (1,0,-1)$.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση

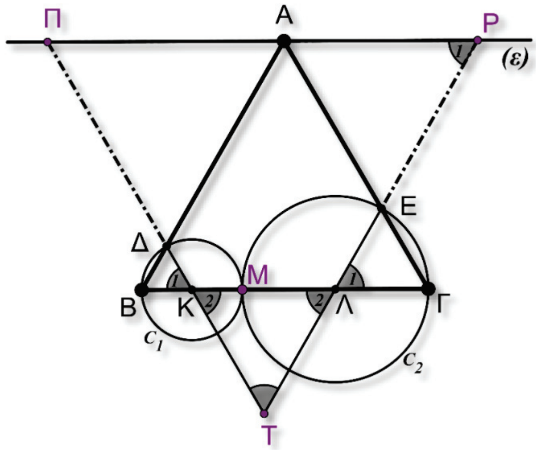
Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 9 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 9 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο αριθμός που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής πολ.3+1, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επίσης, για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4. Επειδή το 4 δεν διαιρεί ούτε το 49 ούτε το 94, ο αριθμός Α δεν μπορεί να διαιρείται με το 4. Επομένως ο Α δεν μπορεί να διαιρείται και με το 8, αφού τότε θα έπρεπε να διαιρείται και με το 4. Επομένως έξι από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,7. Για να διαιρείται με το 2 πρέπει το τελευταίο ψηφίο του Α να είναι το 4. Επειδή ο 94 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον αριθμό 994 ο οποίος διαιρείται και με το 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4
Στη πλευρά $ΒΓ$ ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΒΓ$, θεωρούμε σημείο $Μ$ (διαφορετικό από το μέσο της $ΒΓ$) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στη $ΒΓ$. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο $Κ$ του $ΜΒ$ και ακτίνα $ΚΒ$) τέμνει την $ΑΒ$ στο $Δ$. Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο $Λ$ του $ΜΓ$ και ακτίνα $ΛΓ$) τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$. Οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία $Π$ και $Ρ$ αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνονται στο σημείο $Τ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΠΡΤ$ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους α της πλευράς $ΒΓ$.

Λύση
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $ΤΚΛ$ είναι ισόπλευρο. Το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισοσκελές (διότι $ΚΔ, ΚΒ$ ακτίνες του κύκλου C_1). Επειδή όμως $\hat{B} = 60°$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι (τελικά) ισόπλευρο.
Οπότε $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2 = 60°$.
Όμοια καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισόπλευρο και κάθε πλευρά έχει μήκος:

$$ΚΛ = ΜΚ + ΜΛ = \frac{ΜΒ}{2} + \frac{ΜΓ}{2} = \frac{ΜΒ + ΜΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Σχήμα 3

Εφόσον $AP \mathbin{/\!/} B\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Lambda}_1 = \hat{P}_1 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $TP\Pi$ είναι ισόπλευρο (διότι και $\hat{T} = 60°$).
Το τετράπλευρο $AP\Lambda B$ είναι παραλληλόγραμμο (διότι $\hat{B} = \hat{\Lambda}_1 = \hat{P}_1 = 60°$).
Άρα το τρίγωνο $TP\Pi$ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς:

$$TP = T\Lambda + \Lambda P = T\Lambda + AB = \frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{3\alpha}{2}.$$

Το εμβαδό του τριγώνου $TP\Pi$ είναι:

$$(TP\Pi) = \frac{\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0.$$

.

Λύση
Εφόσον ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, θα είναι $\rho \neq 0$ και ισχύει:

$$\rho^3 - \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^3 = \rho + 1 \quad (1).$$

Άρα $(\rho^3)^3 = (\rho+1)^3 \Leftrightarrow \rho^9 = \underbrace{\rho^3}_{\rho+1} + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \rho^9 = \rho + 1 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \Leftrightarrow \rho^9 = 3\rho^2 + 4\rho + 2 \Leftrightarrow$$

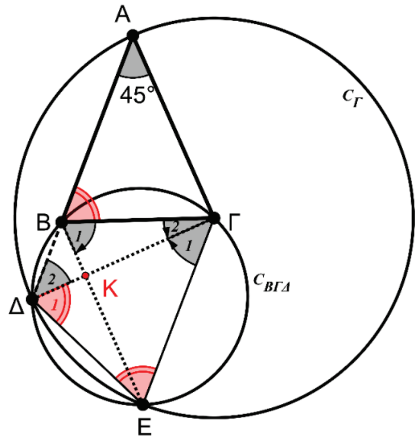
$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \rho^9 \cdot \rho = (3\rho^2 + 4\rho + 2) \cdot \rho \Leftrightarrow \rho^{10} = 3 \cdot \rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \rho^{10} = 4\rho^2 + 5\rho + 3.$
$(*)$ ισχύει $\rho \neq 0$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 45°$. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, \Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA) τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (έστω $C_{B\Gamma\Delta}$) τέμνει τον C_Γ στο σημείο E Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Λύση
Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, διότι ΓA και $\Gamma\Delta$ είναι ακτίνες του κύκλου C_Γ. Άρα:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = 45° \qquad (1)$$



Σχήμα 4

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, διότι ΓΕ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου $C_Γ$. Άρα:

$$\hat{Ε} = \hat{Δ}_1 \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο $C_Γ$. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{Β}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{Ε}$. Άρα:

$$\hat{Ε} = \hat{Β} = 67,5^\circ \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (*1*), (*2*), (*3*) έχουμε: $\hat{Α} = \hat{Δ}_2 = \hat{Γ}_1 = 45^\circ$.

Άρα ΒΔ ∥ ΓΕ, οπότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ορθογώνιο.

Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί ΒΕ=ΔΓ (διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου) και ΓΔ = ΓΕ (ακτίνες του $C_Γ$). Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα.

Άρα $\widehat{Β}_1 = Γ_1 + \widehat{Γ}_2 = 67,5°$ και επειδή $\widehat{Γ}_1 = 45°$, καταλήγουμε $\widehat{Γ}_2 = 22,5°$ και κατά συνέπεια $\widehat{Β}_1 + \widehat{Γ}_2 = 67,5° + 22,5° = 90°$.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\nu \geq 2$, ο αριθμός

$$Α = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned}\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1 &= \nu^5\left(\nu^2+1\right) + \left(\left(\nu^2\right)^3 + 1\right) = \nu^5\left(\nu^2+1\right) + \left(\nu^2+1\right)\left(\nu^4 - \nu^2 + 1\right)\\ &= \left(\nu^2+1\right)\left(\nu^5 + \nu^4 - \nu^2 + 1\right) = \left(\nu^2+1\right)\left[\nu^4\left(\nu+1\right) - \left(\nu+1\right)\left(\nu-1\right)\right]\\ &= \left(\nu^2+1\right)\left(\nu+1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$Α = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1} = \left(\nu+1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).$$

Για $\nu \geq 2$ είναι $\nu+1 \geq 3$ και $\nu^4-\nu+1=\nu\left(\nu^3-1\right)+1 \geq 2 \cdot 7+1=15$, οπότε ο ακέραιος Α είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

Λύση
Έστω x, y τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του θα έχουμε ότι $xy=2(x+y)$ (1). Το μήκος της διαγωνίου είναι $d=\sqrt{x^2+y^2}$. Οπότε θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του d υπό τη συνθήκη (1).

Έχουμε ότι $d^2=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \overset{(1)}{=} (x+y)^2-4(x+y)$.

Ισχύει ότι $(x+y)^2 \geq 4xy$ (αφού είναι ισοδύναμη με $(x-y)^2 \geq 0$) και λόγω της (1) έχουμε ότι $4xy=8(x+y)$, άρα $(x+y)^2 \geq 8(x+y)$, οπότε $x+y \geq 8$. (2)

Θέτουμε $x+y=t$ και τότε $d^2=t^2-4t=(t-2)^2-4 \overset{(2)}{\geq} (8-2)^2-4=32$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του μήκους της διαγωνίου είναι $\sqrt{32}$, και επιτυγχάνεται στο τετράγωνο πλευράς 4.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f(a)=0 \text{ και } f(f(x))=xf(x)+a, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Λύση
Θέτοντας $x=a$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(f(a))=af(a)+a \Rightarrow f(0)=a.$$

Για $x=0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f(f(0))=0 \cdot f(0)+a \overset{(1)}{\Rightarrow} f(a)=a,$

οπότε από τη σχέση $f(a)=0$ έπεται ότι $a=0$.

Για $a=0$ πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f(f(x))=xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να βρεθεί, αν αναζητήσουμε συνάρτηση της μορφής $f(x)=x^c$, $c \in \mathbb{R}$. Τότε πρέπει να ισχύει:

$$f\left(x^c\right)=x \cdot x^c \Rightarrow \left(x^c\right)^c=x^{c+1} \Rightarrow x^{c^2}=x^{c+1} \Rightarrow c^2=c+1 \Rightarrow c^2-c-1=0 \Rightarrow c=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Άρα μία συνάρτηση είναι η $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ αν } x\le 0 \\ x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \text{ αν } x>0. \end{cases}$

Πρόβλημα 2

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^7+x^6+x^5+1=0\ .$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} x^7+x^6+x^5+1 &= x^5\left(x^2+1\right)+\left(\left(x^2\right)^3+1\right)=x^5\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right) \\ &=\left(x^2+1\right)\left(x^5+x^4-x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left[x^4\left(x+1\right)-\left(x+1\right)\left(x-1\right)\right] \\ &=\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x^4-x+1\right). \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο x^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, αν το πολυώνυμο x^4-x+1 είχε πραγματική ρίζα, τότε θα υπήρχε $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$\alpha^4-\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha\left(\alpha^3-1\right)+1=0\Leftrightarrow\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(\alpha\right)+1=0$.

Όμως για $\alpha\le 0$ ή $\alpha\ge 1$ η παράσταση $f\left(\alpha\right)=\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)$ είναι μη αρνητική, οπότε $f\left(\alpha\right)+1>0$.

Για $0<\alpha<1$ είναι $\alpha^4>0,\ -\alpha+1>0$ και $\alpha^4-\alpha+1>0$. Επομένως η υπόθεση που κάναμε παραπάνω δεν μπορεί να ισχύει.

Επομένως έχουμε

$$x^7+x^6+x^5+1=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x^4-x+1\right)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ=ΑΓ)$ με $\hat{Α}=36°$. Ο κύκλος $C_1(Γ,ΓΑ)$ (που έχει κέντρο το $Γ$ και ακτίνα $ΓΑ$) τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΔ$ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο $Ε$. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ και ότι η $ΔΓ$ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Λύση

Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΑ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

$$\hat{Α}=\hat{Δ}_1 \quad (1).$$

Το τρίγωνο $ΓΔΕ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΕ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

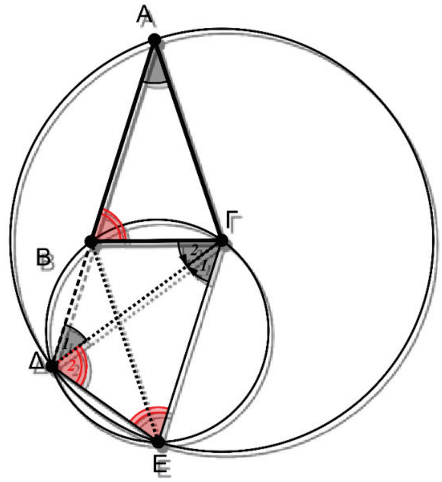
$$\hat{Ε}=\hat{Δ}_2 \quad (2).$$

Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο C_2. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{Β}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{Ε}$. Άρα:

$$\hat{Ε}=\hat{Β} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε: $\hat{Α}=\hat{Δ}_1=\hat{Γ}_1=36°$.

Άρα $ΒΔ\,/\!\!/\,ΓΕ$, οπότε το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια οι διαγώνιές του ($ΒΕ$ και $ΓΔ$) θα είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο $ΕΒΓ$ είναι ισοσκελές. Δηλαδή τα σημεία $Ε$ και $Α$ ανήκουν στη μεσοκάθετη της βάσης $ΒΓ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ οπότε η $ΑΕ$ θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$.



Σχήμα 5

Από την παραλληλία $ΒΔ \,/\!/\, ΓΕ$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} = B\hat{Γ}E = 72°$, οπότε τα ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΒΓ$ είναι ίσα.
Επειδή όμως $\hat{A} = \hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_2 = \hat{Γ}_1 = 36°$ και η $\hat{Γ}_2$ σχηματίζεται από τη $ΒΓ, ΔΓ$ (χορδή και εφαπτομένη) συμπεραίνουμε ότι η $ΔΓ$ θα είναι εφαπτομένη.

Πρόβλημα 4

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}, \quad 8^{9^{9^8}}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Αφού $9 > 8$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$8^{8^9} > 9^{9^8} \Leftrightarrow \left(8^{8^9}\right)^{\frac{1}{9^8}} > \left(9^{9^8}\right)^{\frac{1}{9^8}} \Leftrightarrow 8^{\frac{8^9}{9^8}} > 9 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{8^{\frac{8^9}{9^8}}} > 3 \Leftrightarrow 8^{4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3 \Leftrightarrow 4^{6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3$$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8 > 1 \Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 2^{24} > 3^{16} \Leftrightarrow 2^{25} > 3^{15} \Leftrightarrow 2^5 > 3^3$, που ισχύει, οπότε ισχύει και η αρχική.

2ος τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Λόγω της μονοτονίας του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι $8^{8^9}\ln 9 > 9^{9^8}\ln 8$. Χρησιμοποιώντας δεύτερη φορά τη μονοτονία του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(8^{8^9}\ln 9\right) > \ln\left(9^{9^8}\ln 8\right) \Leftrightarrow 8^9\ln 8 + \ln(\ln 9) > 9^8\ln 9 + \ln(\ln 8).$$

Αφού $\ln(\ln 9) > \ln(\ln 8)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$8^9 \ln 8 > 9^8 \ln 9 \Leftrightarrow \frac{8^9}{9^8} > \frac{\ln 9}{\ln 8} \Leftrightarrow \frac{2^{27}}{3^{16}} > \frac{2\ln 3}{3\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^{26}}{3^{15}} > \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 > \frac{\ln 3}{\ln 2}$, η οποία θα δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα αφού $2\ln 2 = \ln 4 > \ln 3$.

Από την άλλη αρκεί $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 \Leftrightarrow \frac{2^{25}}{3^{15}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2^5}{3^3}\right)^5 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{32}{27}\right)^5 > 1$, που ισχύει.