

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Γ' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

Θέμα Α

A1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v} \right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}.$$

A2.

A2.1. Ψ.

A2.2. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$. Επειδή δεν ορίζεται κοντά στο 0 το όριο δεν έχει νόημα.

A3. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

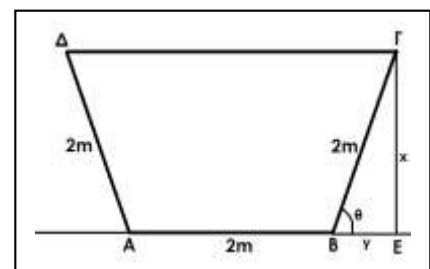
A4. 1.Σ. 2.Λ. 3.Σ 4.Σ 5.Λ

Θέμα Β

B1. Για $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ ισχύει

$$\eta\mu\theta = \frac{\Gamma\text{Ε}}{\text{ΒΓ}} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\eta\mu\theta \text{ άρα } x(\theta) = 2\eta\mu\theta \text{ ομοίως}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2\sigma\upsilon\nu\theta \text{ άρα } y(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$$



Για $\theta = 0$ είναι $x(0) = 0$ και $y(0) = 2$. Τελικά για $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $x(\theta) = 2\eta\mu\theta$ και $y(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$.

$$i) \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x(\theta)}{y(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = +\infty$$

$$ii) \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{2}{x(\theta)} \right) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\eta\mu\theta} \right) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu\theta - \theta}{\theta\eta\mu\theta} \stackrel{0/0}{=} \stackrel{DLH}{=} \\ = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta - 1}{\eta\mu\theta + \theta\sigma\upsilon\nu\theta} \stackrel{0/0}{=} \stackrel{DLH}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - \theta\eta\mu\theta} = 0$$

B2. Είναι $x(\theta) + y(\theta) = \theta^2 + 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta - \theta^2 - 1 = 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(\theta) = 2\eta\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta - \theta^2 - 1$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών και $f(0) = 1 > 0$ και

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4 - \pi^2}{4} < 0, \text{ εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano υπάρχει } \theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

τέτοιο ώστε $f(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow x(\theta) + y(\theta) = \theta^2 + 1$.

$$\mathbf{B3.} E(\theta) = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot \Gamma E = \frac{2 + 2 + 2\gamma}{2} \cdot x = (2 + \gamma)x =$$

$$= (2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)2\eta\mu\theta = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$$

$$\text{Άρα } E(\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

B4. Η $E(\theta)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} E'(\theta) &= 4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta) = 4\sigma\upsilon\nu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta) + 4\eta\mu\theta(-\eta\mu\theta) = \\ &= 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 4\eta\mu^2\theta = 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 4 + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= 8\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\sigma\upsilon\nu\theta - 4 = 4(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1) = \\ &4(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)\left(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$E'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta > \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{3}$$

Επομένως έχουμε τον πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
f'(x)		+	0	-
f(x)	0	$3\sqrt{3}$	4	

Άρα η $E(\theta)$ παρουσιάζει μέγιστο για $\theta = \frac{\pi}{3}$ με

$$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}.$$

B5.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} E(\theta) d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta) d\theta \quad \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\theta=u \\ -\eta\mu\theta d\theta=du \end{array} \\ &= -\int_1^{\frac{1}{2}} 4(1+u) du = -4\left[u + \frac{u^2}{2}\right]_1^{\frac{1}{2}} = -4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Θέμα Γ

Γ1. α. F παραγωγίσιμη ως αρχική της f με $F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2018}} > 0$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα.

β. Αφού $F(1) = 0$. Για $x > 1$ έχω $F(x) > F(1) = 0$, για $x < 1$ έχω $F(x) < F(1) = 0$.

γ.

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |F(x)| dx = -\int_0^1 (x)' F(x) dx = -[xF(x)]_0^1 + \int_0^1 xF'(x) dx = \\ &= -1 \cdot F(1) + 0 \cdot F(0) + \int_0^1 xf(x) dx = 0 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2018}} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{(x^2 + 2018)'}{2\sqrt{x^2 + 2018}} dx = \left[\sqrt{x^2 + 2018} \right]_0^1 = \sqrt{2019} - \sqrt{2018} \end{aligned}$$

5 Μονάδες

Γ2α.

$$\begin{aligned} x \cdot f'(x) &= 2f(x) + 5 \int_1^2 f(t) dt \Leftrightarrow x^2 \cdot f'(x) = 2xf(x) + 5x \int_1^2 f(t) dt \Leftrightarrow \\ x^2 \cdot f'(x) - 2xf(x) &= 5x \int_1^2 f(t) dt \Leftrightarrow \frac{x^2 \cdot f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{5}{x^3} \int_1^2 f(t) dt \Leftrightarrow \\ \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' &= \left(-\frac{5}{2x^2} \int_1^2 f(t) dt \right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{5}{2x^2} \int_1^2 f(t) dt + c \Leftrightarrow \\ f(x) &= cx^2 - \frac{5}{2} \int_1^2 f(t) dt \quad (1) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left(cx^2 - \frac{5}{2} \int_1^2 f(t) dt \right) dx \Leftrightarrow \\
 \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 (cx^2) dx + \int_1^2 \left(-\frac{5}{2} \int_1^2 f(t) dt \right) dx \Leftrightarrow \\
 \int_1^2 f(x) dx &= c \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 - \frac{5}{2} \int_1^2 f(t) dt \cdot \int_1^2 dx \Leftrightarrow \\
 \int_1^2 f(x) dx &= \frac{7c}{3} - \frac{5}{2} \int_1^2 f(t) dt \cdot 1 \Leftrightarrow \\
 \frac{7}{2} \int_1^2 f(x) dx &= \frac{7c}{3} \Leftrightarrow \\
 \int_1^2 f(x) dx &= \frac{2c}{3} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Από (1) και (2) έχουμε $f(x) = cx^2 - \frac{5c}{3}$ και για $x = 1$:

$$f(1) = c - \frac{5c}{3} \Leftrightarrow -4 = -\frac{2c}{3} \Leftrightarrow c = 6$$

Τελικά $f(x) = 6x^2 - 10$ με $x > 0$.

$$\text{Γ2β)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 10}{x^v} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 10}{x} = +\infty, & \text{αν } v = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 10}{x^2} = 6, & \text{αν } v = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 10}{x^v} = 0, & \text{αν } v > 2 \end{cases}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η δοθείσα συνάρτηση μετασχηματίζεται στην : $f(x) = \begin{cases} e^{x \ell n x - x}, & x > 0 \\ \lambda, & x = 0 \end{cases}$.

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $x_0 = 0$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x \ell n x - x}) = \lambda.$$

$$\text{Όμως, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ell n x - x} = e^0 = 1, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ell n x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ell n x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0$$

Οπότε, προκύπτει ότι $\lambda = 1$.

Δ2.

i. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = (e^{x \ln x - x})' = e^{x \ln x - x} (x \ln x - x)' = f(x)(\ln x + 1 - 1) = f(x) \ln x \quad (1)$$

$$\text{επιλύοντας } f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \ln x > 0 \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Επομένως, η f (όντας συνεχής στα διαστήματα $(0, 1]$ και $[1, +\infty)$) είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

παρουσιάζοντας ελάχιστο στη θέση $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 0$ με τιμή $f(0) = 1$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = (f(x) \ln x)' = f'(x) \ln x + f(x) \cdot \frac{1}{x} = f(x) \ln^2 x + f(x) \cdot \frac{1}{x} = f(x) \left(\ln^2 x + \frac{1}{x} \right) > 0$$

οπότε η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

ii. Για $x \in [0, +\infty)$ έχουμε : $x^x e^{-x} = k \Leftrightarrow f(x) = k$

Αφού, ισχύει:

- $f(0) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln x - x} \stackrel{u = x \ln x - x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty,$

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 1) = +\infty$ προκύπτει ότι το σύνολο

τιμών της συνάρτησης είναι :

$$f_A = [f(1), f(0)] \cup [f(1), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)] = \left[\frac{1}{e}, 1 \right] \cup \left[\frac{1}{e}, +\infty \right)$$

Επομένως διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

➤ Αν $k < \frac{1}{e}$ η εξίσωση $f(x) = k$ είναι αδύνατη.

➤ Αν $k = \frac{1}{e}$ η εξίσωση $f(x) = k$ έχει ακριβώς μια λύση την $x_0 = 1$, για κάθε

$x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$, αφού $f(1) = \frac{1}{e}$ και $f(x) > \frac{1}{e}$

➤ Αν $\frac{1}{e} < \kappa \leq 1$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς δύο λύσεις μια λύση στο $[0, 1)$ και μια λύση στο $(1, +\infty)$.

➤ Αν $\kappa > 1$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση στο $(1, +\infty)$.

iii. Από την σχέση (1) προκύπτει :

$$\int_1^e \ln x \cdot f(x) dx = \int_1^e f'(x) dx = [f(x)]_1^e = [e^{x \ln x - x}]_1^e = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

iv. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ και $[1, e]$ με $f'(x) = f(x) \ln x$ και ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στα διαστήματα αυτά. Εφαρμόζοντας το θεώρημα προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ και $\xi_2 \in (1, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{1 - \frac{1}{e}} \Leftrightarrow f(\xi_1) \ln \xi_1 = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{1 - \frac{1}{e}} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{e}\right) f(\xi_1) \ln \xi_1 = f(1) - f\left(\frac{1}{e}\right) \quad (A)$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} \Leftrightarrow f(\xi_2) \ln \xi_2 = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} \Leftrightarrow (e - 1) f(\xi_2) \ln \xi_2 = f(e) - f(1) \quad (B)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις A και B κατά μέλη προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{e}\right) f(\xi_1) \ln \xi_1 + (e-1) f(\xi_2) \ln \xi_2 = f(1) - f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e) - f(1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{e}\right) f(\xi_1) \ln \xi_1 + (e-1) f(\xi_2) \ln \xi_2 = f(e) + f\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{e}\right) f(\xi_1) \ln \xi_1 + (e-1) f(\xi_2) \ln \xi_2 = e^{\ln e - e} + e^{\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e}} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{e}\right) f(\xi_1) \ln \xi_1 + (e-1) f(\xi_2) \ln \xi_2 = 1 - e^{-\frac{2}{e}} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (e-1) f(\xi_1) \ln \xi_1 + e(e-1) f(\xi_2) \ln \xi_2 = e \cdot \left(1 - e^{-\frac{2}{e}}\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow f(\xi_1) \ln \xi_1 + e f(\xi_2) \ln \xi_2 = \frac{e - e^{1-\frac{2}{e}}}{(e-1)} = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1} \end{aligned}$$