

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Γ' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

Θέμα Α

A1. Ναδειχθεί ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $x \in \mathbb{R}^*$ είναι

$$f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}.$$

7 Μονάδες

A2. Δίνεται η πρόταση: « Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$. Υπάρχει το όριο της f στο 0 και είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ».

A2.1. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

1 Μονάδα

A2.2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (A2.1).

3 Μονάδες

A3. Πότε μια συνάρτηση f θα λέμε ότι στρέφει τα κοίλα κάτω ή είναι κοίλη; 4 Μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο νούμερο που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \eta\mu\frac{\pi}{6}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

2. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 2018$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

3. Αν $\int_a^b f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[a, \beta]$

τότε υπάρχει υποσύνολο του $[a, \beta]$ στο οποίο μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Bolzano.

4. Είναι $\int_{-1}^1 (x^{2017} + x^{2015} + x^{2013} + \dots + x)dx = 0$.

5. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$ τότε $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$ με $x \in \mathbb{R}^*$.

5x 2 = 10 Μονάδες

Θέμα Β

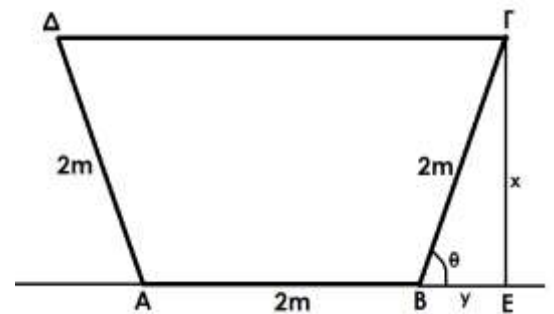
Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα με $AB = B\Gamma = A\Delta = 2m$, $x = \Gamma E$, $y = BE$ και θ την γωνία $\Gamma\hat{B}E$ σε rad με $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

B1. Να αποδειχθεί ότι $x(\theta) = 2\eta\mu\theta$ και $y(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και κατόπιν να βρεθούν τα όρια

i) $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x(\theta)}{y(\theta)}$ και

ii) $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{2}{x(\theta)} \right)$

4 Μονάδες



B2. Να δείξετε ότι υπάρχει $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $x(\theta) + y(\theta) = \theta^2 + 1$.

4 Μονάδες

B3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο $E(\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

5 Μονάδες

B4. Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν του τραπεζίου μεγιστοποιείται και ποια η μέγιστη τιμή του.

6 Μονάδες

B5. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{3}} E(\theta) d\theta$.

6 Μονάδες

Θέμα Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2018}}$ και $F(x)$ μια αρχική της με $F(1)=0$.

α. Να δείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

3 Μονάδες

β. Να βρείτε το πρόσημο της F .

3 Μονάδες

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_F τον άξονα $X'OX$ και τις ευθείες με εξισώσεις $X = 0$ και $X = 1$.

5 Μονάδες

Γ2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = -4$, και για την οποία ισχύει η σχέση:

$$x \cdot f'(x) = 2f(x) + 5 \int_1^2 f(t) dt \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

α) Ναδειχθεί ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 6x^2 - 10$ με $x > 0$.

8 Μονάδες

β) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v}$, $v \in \mathbb{N}^*$ για τις διάφορες τιμές του v .

6 Μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^x}{e^x}, & x > 0 \\ \lambda, & x = 0 \end{cases}$.

Δ1. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

3 μονάδες

Δ2. Αν $\lambda = 1$ τότε:

- i. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και ναδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

5 μονάδες

- ii. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^x \cdot e^{-x} = \kappa$, $x > 0$ για τις διάφορες τιμές του **θετικού** αριθμού κ .

6 μονάδες

- iii. Να δειχθεί ότι $\int_1^e \ln x \cdot f(x) dx = \frac{e-1}{e}$.

5 μονάδες

- iv. Να δειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (e^{-1}, e)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + e \cdot f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}.$$

6 Μονάδες