ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

Α1. Έστω ένας δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

Α2. Να διατυπώσετε τον νόμο των μεγάλων αριθμών.

Α3. Αν $F(x)=c\cdot f(x)$ όπου f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της να αποδείξετε ότι $F'(x)=c\cdot f'(x)$

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

α) Αν $A'\subseteq B$ τότε $P(A)+P(B)<1$

β) Αν $P(A)=P(A')$ τότε $2P(A)=P(\Omega)$

γ) Η εξίσωση εφαπτομένης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $(x_0,f(x_0))$ είναι $y-f'(x_0)=f(x_0)\cdot(x-x_0)$

δ) Ισχύει ότι $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

ε) Για δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ισχύει ότι $A\cap B\neq\varnothing$

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & x\neq 1\\ k-(P(A)+P(B)), & x=1\end{cases}$

Β1. Αν f συνεχής στο $x_0 = 1$ να αποδείξετε ότι $|k| \le 1$.

Β2. Έστω συνάρτηση g τέτοια ώστε $x \cdot e^{g(x)} + 2 = (x-1) \cdot f(x)$

Να βρεθεί ο τύπος της g.

Β3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

Β4. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Β5. Αν $x > 3$ και $A \subseteq B$ να αποδείξετε ότι $g(P(A)) \le g(P(B))$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ με $x > 0$ και 5 σημεία της γραφικής παράστασης της f $A_1, A_2, ..., A_5$ με τετμημένες $x_1, x_2, ..., x_5$ όπου $0 < x_1 < x_2 < ... < x_5 < 1$ που έχουν εύρος $R = \dfrac{1}{4}$ και $\delta = \dfrac{1}{2}$ και οι τετραγωνικές ρίζες των τετμημένων των σημείων A_1 και A_5 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ όπου $\alpha, \beta \in \Re$ με τους αριθμούς β και $1 + 20\alpha$ να είναι αντίστροφοι αριθμοί.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} \cdot f(x_2) - 3 > 0$

Γ2. Έστω $M(x, f(x))$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης f με $x > 0$ να αποδείξετε ότι το τετράγωνο της απόστασης του σημείου Μ από το $O(0,0)$ είναι ίσο με $x^2 + x + 2 + \dfrac{1}{x}$.

Γ3. Να βρεθεί το εύρος των τεταγμένων των σημείων $A_1, A_2, ..., A_5$

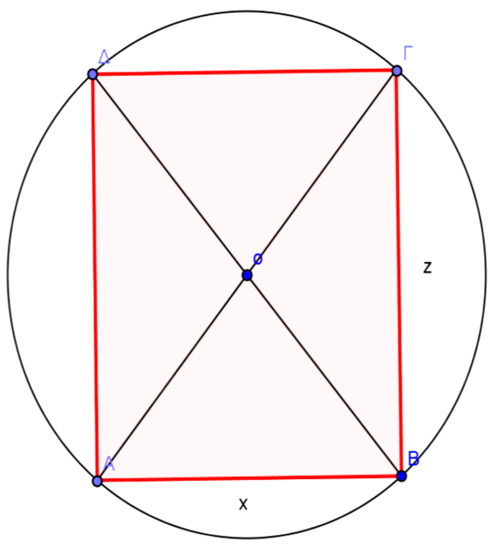
Γ4. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του τετραγώνου της απόστασης τυχαίου σημείου $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από το $O(0,0)$ όταν η τετμημένη του σημείου Μ γίνει ίση με 1.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε κύκλο ακτίνας $R=2$ και εγγεγραμμένο ορθογώνιο σε αυτό $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ με $\mathrm{AB}=x$ και $\mathrm{B\Gamma}=z$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Δ1. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο

$E(x)=x\cdot\sqrt{16-x^2}$



με $0<x<4$.

Δ2. Να βρεθεί το x ώστε το ορθογώνιο να έχει μέγιστο εμβαδόν.

Δ3. Θεωρούμε σημεία $A_i(x_i,y_i)$ με $y_i=E(x_i)$ και

$1=x_1<x_2<x_3<x_4=2<x_5=2\sqrt{2}$ ενώ η διάμεσος των $y_i=E(x_i)$ είναι

$\delta=\dfrac{3\sqrt{55}}{4}$. Να υπολογίσετε το εύρος των τεταγμένων $y_i=E(x_i)$,

$i=1,2,3,4,5$.

Δ4. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα σημεία $A_i\left(x_i, y_i\right)$ με $i = 1,2,3,4,5$. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου

$$A = \left\{A_i\left(x_i, y_i\right),\ i = 1,2,3,4,5 \text{ τέτοια ώστε } y_i \geq \sqrt{4x_3 - Rx_i - \left(\sqrt{15}x_i - 12\right) + 5x_i} \cdot x_i\right\}$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ