ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο, $[\alpha,\beta]$ τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$.

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Α3. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι Σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

δ) Κάθε συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημό της, σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu(\pi(x-1))}{\pi}-(\alpha x^2-1)$ με $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(2-x)}{x-1}=-12$

Β1. Να αποδείξετε ότι $f'(1)=-4$ και $\alpha=2$.

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

Β3. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\pi(x-1))\le 2\pi x^2-4\pi x+2\pi+1 \quad x\in\mathbb{R}$.

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\dfrac{2e^{f(x)}}{f'(x)}=e^{2f(x)}+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, $f'(x)\neq 0$.

Γ1. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η παράγωγος f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε ακόμα την παραγωγίσιμη συνάρτηση g η οποία είναι τέτοια ώστε $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ και την συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-g(\alpha)$ με $x\in(1,+\infty)$ και $\alpha>1$.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Είναι $f'(1)=0$ καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$.

Δ2. Η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα και στην συνέχεια να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση $\Phi(8x^2+6)-\Phi(8x^2+5)>\Phi(2x^4+6)-\Phi(2x^4+5)$, όπου η συνάρτηση Φ είναι η αρχική της συνάρτησης φ.

Δ3. Η συνάρτηση g είναι κυρτή και ότι η εξίσωση $(\alpha-1)\varphi(x)=(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$ έχει ακριβώς μία λύση για $x>1$.

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: *Ευθύμης Κατσιμπράς*
Μαθηματικός