

Ενδεικτικές Απαντήσεις θεμάτων μαθηματικών προσανατολισμού

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

A2. α) ψευδής β) παράδειγμα $f(x)=|x|$ σελίδα 99

A3. Σελίδα σχολικού βιβλίου 73

A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $F(x) = \ln x, x > 0$ $g(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$

$Df \circ g = \{x \in Ag / g(x) \in Af\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,1)$$

$$(f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

B2. $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), x \in (0,1)$

$$h'(x) = \left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1(1-x) - x(1-x)'}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1-x+x}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} > 0, x \in (0,1)$$

Άρα η $h(x)$ αύξουσα στο $(0,1)$

Άρα η $h(x)$ 1:1 οπότε αντιστρέφεται. Η $h \uparrow$ και συνεχής άρα το σύνολο τιμών είναι

$$h(0,1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x - \ln(1-x)) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

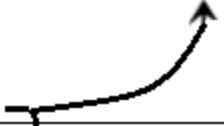
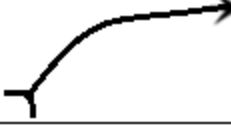
$$h(x) = y \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow$$

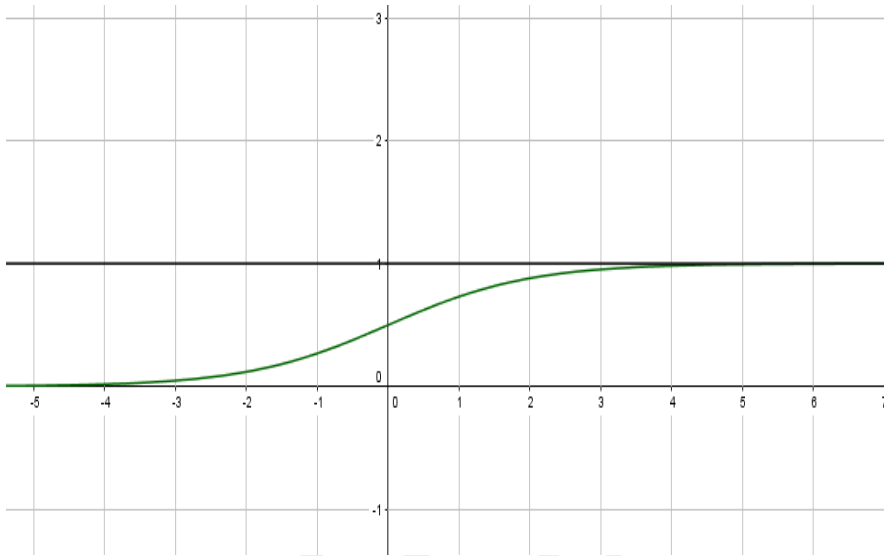
$$x = (1-x)e^y \Leftrightarrow x = e^y - xe^y \Leftrightarrow x + xe^y = e^y \Leftrightarrow$$

$$x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y} \text{ άρα } h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x} x \in \mathbb{R}$$

B3.

Άρα $y=0$ οριζόντια στο $-\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Φ''	+	\emptyset	-
Φ'	+		+
Φ			



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Οι εφαπτομένες της $f(x)$ που άγονται από το $A(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow \text{για } x = \frac{\pi}{2}, y = -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \cdot (\frac{\pi}{2} - x_0) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\frac{\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 + x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 \quad (1).$$

Παρατηρούμε ότι $x_0 = 0$ και $x_0 = \pi$.

Θεωρούμε

$$g(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + \frac{\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2} \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x = \eta\mu x \cdot (x - \frac{\pi}{2})$$

x	0	π/2	π
$\xi'(x)$		-	+
$\xi(x)$		↘	↗

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

Επομένως $g(x) < 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$

Επομένως η g έχει μοναδικές ρίζες $x=0$ και $x=\pi$.

Άρα από την $x_0 = 0$ και $x_0 = \pi$.

Άρα $O(0,0)$ και $B(\pi,0)$ τα σημεία επαφής της C_f με τις εφαπτομένες.

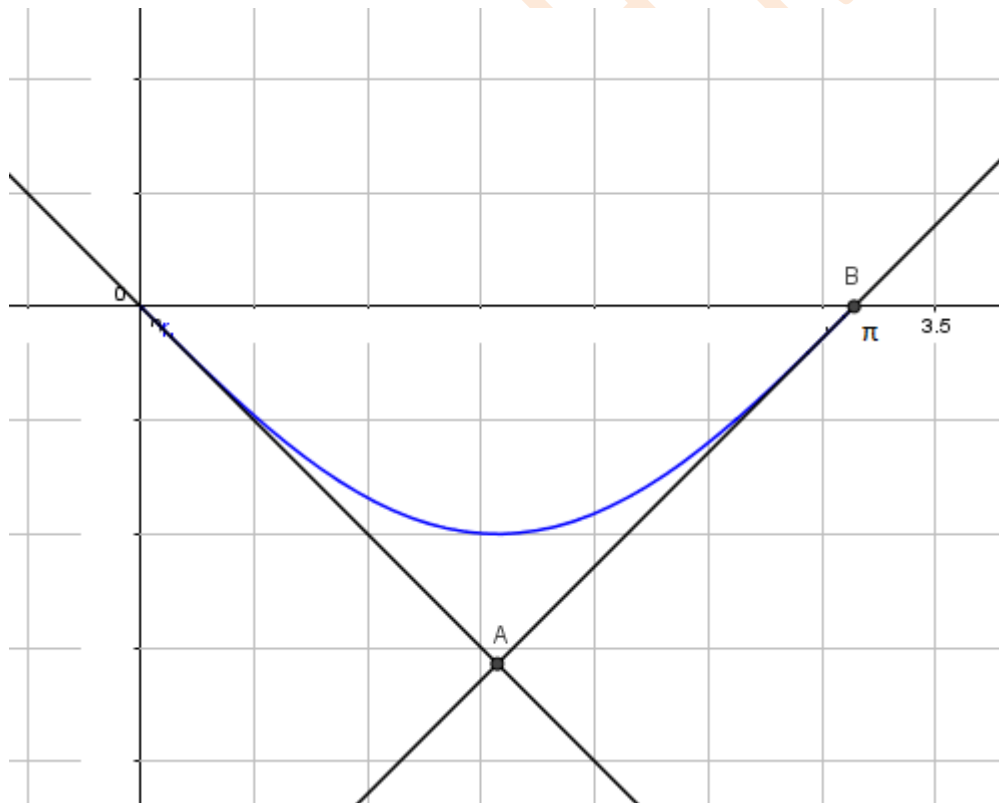
Εξ. Εφαπτομένη στο $O(0,0)$:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = -x \Leftrightarrow y = -x$$

Εξωτερική εφαπτομένη στο $B(\pi,0)$:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \pi$$

Γ2.



$$E_3 = (OAB) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot |y_A| = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} \eta \mu x dx = \left[-\sigma \nu x \right]_0^{\pi} = -\sigma \nu \pi + \sigma \nu 0 = 2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3 - E_2}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 1}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3.

Έχουμε f κυρτή άρα και η C_f βρίσκεται πάνω από την e_2 επομένως.

$$f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow$$

$$-\eta \mu x \geq x - \pi \Leftrightarrow$$

$$-\eta \mu x - x - \pi \geq 0.$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{-\eta \mu x - x + \pi} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\eta \mu x + x}{-\eta \mu x - x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} (-\eta \mu x + x) \cdot \frac{1}{-\eta \mu x - x + \pi} = \pi \cdot (+\infty) = +\infty$$

Γ4.

Από το ερώτημα Γ2, έχω

$$-\eta \mu x \geq x - \pi \Leftrightarrow$$

$$-\eta \mu x - x + \pi \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-\eta \mu x - x + \pi}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\eta \mu x}{x} - 1 + \frac{\pi}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \left(-\frac{\eta \mu x}{x} - 1 + \frac{\pi}{x} \right) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx - \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x} \right) dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \geq \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x} \right) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \geq [x - \pi \ln x]_1^e = e - \pi - 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x) = \begin{cases} (-x)^{\frac{4}{3}}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Η $f(x)$ συνεχής για $x \in [-1, 0)$ ως πράξεις συνεχών

Η $f(x)$ συνεχής για $x \in (0, \pi]$ ως πράξεις συνεχών

Εξετάζω στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x)^{\frac{4}{3}} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \eta \mu x) = 0, \quad f(0) = 0$$

Η f συνεχής στο $x_0 = 0$

Οπότε η f συνεχής στο $[-1, \pi]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4} - 0}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1} \cdot (-x)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1$$

Αρα δεν υπάρχει η παράγωγος οπότε το $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο.

$1 \leq x < 0$ η f παραγωγίζεται ως πράξεις παραγώγων

$$f_1'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4} \right)' = \left[(-x)^{\frac{4}{3}} \right]' = \frac{4}{3} \cdot (-x)^{\frac{1}{3}} (-1) = -\frac{4}{3} \cdot (-x)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= -\frac{4}{3} \sqrt[3]{-x} < 0$$

$0 < x \leq \pi$ η f παραγωγίζεται ως πράξεις παραγώγων

$$f_2'(x) = (e^x \eta \mu x)' = e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$$

$$f_2'(x) = 0 \Rightarrow e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = 0$$

$$\eta \mu x = -\sigma \upsilon \nu x \Rightarrow \epsilon \varphi x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ κρίσιμο σημείο}$$

Δ2.

$$f'(x) = e^x \cdot \sigma \upsilon \nu x (\epsilon \varphi x + 1)$$




$$\left(0, \frac{\pi}{2} \right) : \left. \begin{array}{l} \epsilon \varphi x + 1 > 0 \\ \sigma \upsilon \nu x > 0 \end{array} \right\} \rightarrow f'(x) > 0$$

$$\Phi(x) = \varepsilon\varphi x + 1$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right): \Phi'(x) = \frac{2}{\sigma\nu\nu^2 x} > 0$$

Φ γνησίως αύξουσα

Τελικά

x	-1	0	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
f'	-	+	+	-	
f					

$$f(-1)=1$$

$$f(0)=0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$f(A) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Δ3. Για το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)$ έχουμε

Ισχύει ότι $e^{4x} \geq 1$ (1) για $x \in [0, \pi]$

Ακόμα έχουμε $\eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -\eta\mu x \geq -1$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow e^{4x} - \eta\mu x \geq 0$. Επομένως $e^x \cdot (e^{4x} - \eta\mu x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_0^{\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (e^x \eta\mu x - e^{5x}) dx = \int_0^{\pi} (e^x \eta\mu x) dx - \int_0^{\pi} (e^{5x}) dx$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad I &= \int_0^{\pi} (e^x \eta\mu x) dx = \left[e^x \eta\mu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (e^x \sigma\nu\nu x) dx = - \int_0^{\pi} (e^x \sigma\nu\nu x) dx = \\ &= - \left[e^x \sigma\nu\nu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (e^x \eta\mu x) dx = e^{\pi} + 1 - I. \end{aligned}$$

$$I = e^{\pi} + 1 - I \Leftrightarrow I = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

$$\bullet \quad \int_0^{\pi} e^{5x} dx = \left[\frac{e^{5x}}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5}$$

$$\text{Επομένως έχουμε } E(\Omega) = \frac{e^{\pi} + 1}{2} - \frac{e^{5\pi} - 1}{5}$$

Δ4. Από το Δ2 και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f προκύπτει:

$$f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot f(x) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 16 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot f(x) \leq 8\sqrt{2} \quad (1)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν, $x = \frac{3\pi}{4}$

Ακόμα, $-e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot (4x - 3\pi)^2 \leq 0(2)$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν, $x = \frac{3\pi}{4}$

$$(1)+(2) \Rightarrow 16 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot (4x - 3\pi)^2 \leq 8\sqrt{2}.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = \frac{3\pi}{4}$.

Άρα μοναδική λύση $x = \frac{3\pi}{4}$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ

ΛΕΜΠΕΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΧΑΡΙΣΗ ΣΤΕΛΛΑ

ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ

ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ

ΚΑΤΡΑΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Τα θέματα κρίνονται ως ιδιαιτέρως απαιτητικά-μερικά ερωτήματα ακραία όσο αφορά τη διδαχθείσα ύλη.

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ