ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1 – ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2016 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΟΚΤΩ (8)

Θέμα Α

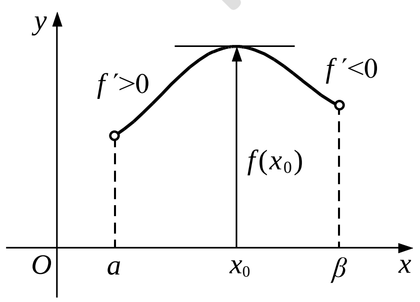
Α1. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$.

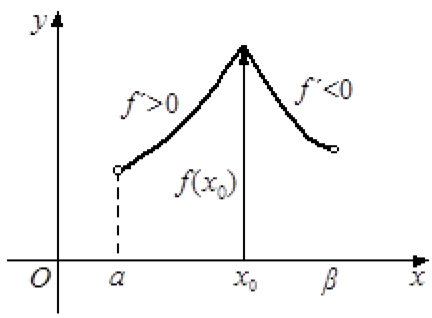
Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{ για κάθε }\ x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ, λέγονται:

- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται και
- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγός της f είναι ίση με το μηδέν.

Α3. **1. Λ** **2. Σ** **3. Λ** **4. Λ** **5. Σ**

Θέμα Β

Β1. Είναι $f'(x)=k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-1}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{k\cdot f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

και $f''(x)=\dfrac{kf'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}-kf(x)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\Leftrightarrow f''(x)=\dfrac{k^2\cdot f(x)-\dfrac{kxf(x)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

το πρώτο μέρος της ζητούμενης συνάρτησης γίνεται:

$$\left(1+x^2\right)\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)-k^2\cdot f(x)=\left(1+x^2\right)\cdot\frac{k^2\cdot f(x)-\dfrac{kxf(x)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}+x\cdot f'(x)-k^2\cdot f(x)=$$

$$k^2\cdot f(x)-\frac{kxf(x)}{\sqrt{x^2+1}}+x\cdot\frac{k\cdot f(x)}{\sqrt{x^2+1}}-k^2\cdot f(x)=0.$$

Β2. Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-1,\ \ x\ge 0$

Η f είναι συνεχής και για x > 0: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{2x}-\frac{\sqrt[3]{x}}{3x} \Leftrightarrow$

$$f'(x)=\frac{3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{6x} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{3\sqrt[6]{x^3}-2\sqrt[6]{x^2}}{6x} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{\sqrt[6]{x^2}\left(3\sqrt[6]{x}-2\right)}{6x}$$

$$f'(x)=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \sqrt[6]{x}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\left(\frac{2}{3}\right)^6$$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\left(\frac{2}{3}\right)^6\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^6,+\infty\right)$.

x	0		$\left(\frac{2}{3}\right)^6$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)		↘	Ο.Ε.	↗	

Επίσης,

- $f(0)=-1$
- $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^6}-\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^6}-1=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=-\frac{31}{27}<0$ και
- $f(64)=\sqrt{64}-\sqrt[3]{64}-1=8-4-1=3>0$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^6,64\right]$ και $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)\cdot f(64)<0$. Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, επομένως έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^6,64\right]$.

Η f στο $\left[0,\left(\frac{2}{3}\right)^6\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα και $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)=-\frac{31}{27}<0$, άρα f(x) < 0 για κάθε $x\in\left[0,\left(\frac{2}{3}\right)^6\right]$, συνεπώς δεν έχει ρίζα στο $\left[0,\left(\frac{2}{3}\right)^6\right]$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^6,+\infty\right]$ η f έχει μοναδική ρίζα στο $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^6,+\infty\right]$. Τελικά η f έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Θέμα Γ

Γ1. Η h(x) είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με $h'(x)=3x^2+2016e^x+\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2} \Leftrightarrow h'(x)=3x^2+2016e^x+\frac{f'(x)-\frac{f(x)}{x}}{x}$ (1) για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η f είναι κυρτή στο $[0,x]$ επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Στο $[0,x]$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,x)$.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,x)$ με:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)}{x}.$$

Επειδή $0<\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)< \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x}<f'(x) \Leftrightarrow f'(x)-\frac{f(x)}{x}>0$

Οπότε για την (1) έχουμε $h'(x)=3x^2+2016e^x+\frac{f'(x)-\frac{f(x)}{x}}{x}>0$, συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^{-x}$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με:

$$f'(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)'\cdot e^{-x}-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=(1+x)\cdot e^{-x}-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^{-x}\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{x^2}{2}\cdot e^{-x}<0 \text{ για κάθε } x\neq 0$$

και η f συνεχής στο 0.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^{-x}=+\infty$ γιατί

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\cdot e^{-x}\underset{u\to+\infty}{\overset{u=-x}{=}}\lim_{u\to+\infty}\cdot e^{u}=+\infty$$

ενώ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x+\frac{x^2}{2}}{e^x}\right)\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)'}{\left(e^x\right)'}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{e^x}\right)\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1+x)'}{\left(e^x\right)'}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=0$$

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών $(0,+\infty)$ και είναι γνησίως μονότονη άρα 1-1, άρα θα υπάρχει μοναδικό $x_o\in(0,+\infty)$ με $f(x_o)=\alpha$.

Οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ με $\alpha\in(0,+\infty)$ θα έχει μια ακριβώς λύση $x_o\in(0,+\infty)$.

Θέμα Δ

Δ1.

α) $$I_\nu=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^{\nu}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^{\nu-2}x\cdot\varepsilon\varphi^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^{\nu-2}x\cdot\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^{\nu-2}x\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^{\nu-2}x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^{\nu-2}x\,dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^{\nu-2}x\cdot(\varepsilon\varphi x)'\,dx-I_{\nu-2}=\left[\frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_{\nu-2}=$$

$$=\frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1}\frac{\pi}{4}}{\nu-1}-\frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1}0}{\nu-1}-I_{\nu-2}=\frac{1}{\nu-1}-I_{\nu-2}\Leftrightarrow I_\nu+I_{\nu-2}=\frac{1}{\nu-1}$$

β) $$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx=-\left[\ell n|\sigma\upsilon\nu x|\right]_0^{\pi/4}=$$

$$=-\left(\ell n\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right|-\ell n|\sigma\upsilon\nu 0|\right)=-\ell n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ell n1=\frac{\ell n2}{2}$$

Από το (α) ερώτημα για ν = 3 έχουμε :

$$I_3+I_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I_3=\frac{1}{2}-I_1\Leftrightarrow I_3=\frac{1}{2}-\left(\frac{\ell n2}{2}\right)=\frac{1-\ell n2}{2}$$

γ) Η εφx είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ επομένως για:

$$0<x<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi 0<\varepsilon\varphi x<\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0<\varepsilon\varphi x<1$$

Επομένως : $\varepsilon\varphi x<1\overset{\cdot\varepsilon\varphi x}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi^2x<\varepsilon\varphi x$

και τελικά $\varepsilon\varphi^2x<1\overset{\cdot\varepsilon\varphi^{\nu}x}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi^{\nu+2}x<\varepsilon\varphi^{\nu}x$

Ομοίως δείχνω ότι $εφ^{ν}x < εφ^{ν-2}x$.

Τελικά έχω:

$$εφ^{ν+2}x < εφ^{ν}x < εφ^{ν-2}x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^{ν+2}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^{ν}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^{ν-2}x\,dx \Rightarrow$$

$I_{ν+2} < I_ν < I_{ν-2}$ (1)

Από το (α) ερώτημα : $I_ν + I_{ν-2} = \dfrac{1}{ν-1}$ (2)

και θέτοντας οπού ν το ν+2: $I_{ν+2} + I_ν = \dfrac{1}{ν+1}$ (3)

από την (1) λόγω της (2) έχω : $I_ν < I_{ν-2} \overset{+I_ν}{\Leftrightarrow} 2I_ν < I_{ν-2} + I_ν \Leftrightarrow 2I_ν < \dfrac{1}{ν-1}$.

από την (1) λόγω της (3) έχω : $I_{ν+2} < I_ν \overset{+I_ν}{\Leftrightarrow} I_{ν+2} + I_ν < 2I_ν \Leftrightarrow \dfrac{1}{ν+1} < 2I_ν$.

Συνεπώς: $\dfrac{1}{ν+1} < 2I_ν < \dfrac{1}{ν-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2(ν+1)} < I_ν < \dfrac{1}{2(ν-1)}$

Δ2. Θέτουμε $α = \int_0^1 f(x)dx$.

Η δεδομένη σχέση γίνεται $xf'(x) - αx = 2f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - 2f(x) = αx \Leftrightarrow$

$$x^2f'(x) - 2xf(x) = αx^2 \Leftrightarrow \frac{x^2f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{α}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = \left(-\frac{α}{x}\right)'$$

Άρα $\dfrac{f(x)}{x^2} = -\dfrac{α}{x} + c$.

Για $x = 1$ έχω $c = 5 + α$.

Επομένως $f(x) = -αx + (5+α)x^2$.

Συνεπώς $\alpha = \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \alpha = \int_0^1 \left(-\alpha x + (5+\alpha)x^2\right)dx \Leftrightarrow$.

$$\Leftrightarrow \alpha = \left[-\alpha\frac{x^2}{2} + (5+\alpha)\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\alpha}{2} + (5+\alpha)\frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{10}{7}.$$

Συνεπώς $\int_0^1 f(x)dx = \frac{10}{7}$ και $f(x) = \frac{45}{7}x^2 - \frac{10}{7}x$.

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ «ΝΕΑ ΠΑΙΔΕΙΑ»

Επιμέλεια Θεμάτων: Βάρναλης Νίκος