<u>ΠΡΟΣΘΕΤΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Δ</u>

Τα θέματα Δ3 και Δ4 ειναι αυξημένης δυσκολίας και απαιτούν από τους εξεταζόμενους για την επίλυσή τους ιδιαίτερη ικανότητα και προσπάθεια. Κρίνονται δυσκολότερα από τα αντίστοιχα του 2014.

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1.Σελ. 194 Σχολικού βιβλίου.

Α2. Σελ.188 Σχολικού βιβλίου.

Α3.Σελ 259 Σχολικού βιβλίου.

Α4.

α)Λ β)Σ γ)Λ δ)Σ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4)=4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}-4z-4\overline{z}+16=4z\cdot\overline{z}-4z-4\overline{z}+4 \Leftrightarrow$$
$$3z\cdot\overline{z}=12 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Άρα είναι κύκλος με Κ(0,0) και R=2

Β2.

α) $\overline{w}=\frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=\frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+2\frac{\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=2\frac{z_2}{z_1}+2\frac{z_1}{z_2}=w\in\Re$

(β)

$$\left.\begin{array}{l} W \in R \\ |w| \leq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$0 < |z_1 - z_2| \leq 4 \iff$$

$$0 < (z_1 - z_2)\cdot(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \leq 16 \iff$$
$$0 < |z_1|^2 - z_1 \cdot \overline{z_2} - z_2\, \overline{z_1} + |z_2|^2 \leq 16 \iff$$
$$0 < 8 - (z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}) \leq 16 \iff$$
$$0 \leq 8 - 2Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq 16 \iff$$
$$-8 \leq -2Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq 16 \iff$$
$$-8 \leq -2w \leq 8 \iff$$
$$-4 \leq w \leq 4$$

Β3.

$$w = -4 \Leftrightarrow -2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow -2z_1 \cdot z_2 = z_1^{\,2} + z_2^{\,2} \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$$

$$A\Gamma = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1-2i)|$$
$$= |z_1||1-2i| = |z_1|\sqrt{5}$$
$$B\Gamma = |z_2 - z_3| = |-z_1 - z_3| = |z_1 + z_3| = |z_1 + 2iz_1| = |z_1(1+2i)| = |z_1|\sqrt{5}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}(e^x\cdot\frac{1}{x^2+1}) = 0$$

Αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1} = 0$$

Η $f'(x) > 0$ στο $(-\infty,+\infty)$ και f συνεχής στο R.

Άρα η $f \nearrow$ στο R.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1} \overset{DL'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} \overset{DL'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$$

Γ2

$$f(e^{3-x}\cdot(x^2+1)) = f(2) \overset{1-1}{\Rightarrow} e^{3-x}\cdot(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow e^3\cdot e^{-x}(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3(x^2+1)}{e^x} = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{(x^2+1)}$$

$f(x) = \frac{e^3}{2}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και το $\frac{e^3}{2} \in (0,+\infty)$ επομένως η $f(x) = \frac{e^3}{2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$

Γ3

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2x\cdot f(4x)$$

$$\int_{2x}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{4x} f(t) < 2x\cdot f(4x) \Leftrightarrow \int_{a}^{4x} f(t) - \int_{a}^{2x} f(t) < 2x\cdot f(4x)$$

Θεωρούμε $h(x)=\int_a^x f(t)dt$ και εφαρμόζω θεώρημα Μέσης Τιμής στο [2x,4x] για την g (με x>0)

h συνεχής στο [2x,4x] γιατί η f είναι συνεχής και η $\int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής

h παραγωγίσιμη στο (2x,4x)

$\exists \quad \xi \in (2x,4x):$

$$\mathrm{h}'(\xi)=\frac{\int_a^{4x} f(t)dt-\int_a^{2x} f(t)dt}{2x} \Leftrightarrow \mathrm{h}'(\xi)=\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}$$

$$h(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow h'(x)=f(x) \Rightarrow \mathrm{h}''(\mathrm{x})=f'(x)>0$$

$$\xi<4x \overset{h'\uparrow}{\Rightarrow} h'(\xi)<h'(4x) \Rightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}<f(4x) \overset{x>0}{\Rightarrow} \int_{2x}^{4x} f(t)dt<2xf(4x)$$

Γ4.

Για χ>0 η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναντήσεων άρα συνεχής :

$$g'(x)=\frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t)dt)\right)'\cdot x-\int_{2x}^{4x} f(t)dt)\cdot 1}{x^2}=$$

$$=\frac{(4f(4x)-2f(2x))x-\int_{2x}^{4x} f(t)dt)}{x^2}=\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt)}{x^2}$$

Από Γ3 έχω $\int_{2x}^{4x} f(t)dt)<2xf(4x) \Leftrightarrow$

$$-\int_{2x}^{4x} f(t)dt)+2xf(4x)>0\ (1)$$

ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687

Για x>0:

2x<4x ⇒f(2x)<f(4x)⇒ 2xf(2x)<2xf(4x) (2) (f αύξουσα, 2x>0)

Άρα από τα (1), (2) έχω ότι g'(x)>0 για χ>0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1} = 4f(0)-2f(0) = 2f(0) = 2\frac{e^0}{0^2+1} = 2$$
$$= g(0)$$

Άρα g συνεχής στο $\chi_0=0$ άρα g γνησίως αύξουσα στο [0,+∞)

Θέμα Δ

Δ1.

$f'(x)(e^{f(x)}+e^{-f(x)})=2$ / $f(0)=0$

$f'(x)e^{f(x)} = -f'(x)e^{-f(x)}+2$

$e^{f(x)} = e^{-f(x)}+2x+C_1'$ $\overrightarrow{C_1'=0}$

$e^{f(x)} = \frac{1}{e^{f(x)}}+2x \Leftrightarrow e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2 = x^2+1$

$(e^{f(x)}-x)^2 = x^2+1 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)}-x\right| = \sqrt{x^2+1}$ (1)

$e^{f(x)}-x \neq 0 \quad \left(\sqrt{x^2+1} \neq 0\right) και\ συνεχής$

$e^{f(0)}-0 = 1 > 0\ άρα\ e^{f(x)}-x > 0\ \ για\ κάθε\ x$

$(1) \Rightarrow e^{f(x)} = \sqrt{x^2+1}+x \Leftrightarrow f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

Δ2.

α) $f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\,(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0\ f\ γνησίως\ αύξουσα$

$f''(x)=\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

κυρτή (-∞, 0]

κοίλη [0, +∞)

Σημείο καμπής (0, f(0))→(0,0)

β)

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο (0,0) είναι
  y-f(0)=f’(0)(x-0) ⇒ y=x
- Η f κοίλη στο [0,1] άρα f(x)≤x, x∈[0,1]
- $E=\int_0^1|f(x)-x|dx=\int_0^1(x-f(x))dx=\int_0^1\left(x-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)dx=$
  $\int_0^1 xdx-\int_0^1(x)'\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$
  $=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[xln(x+\sqrt{x^2+1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$
  $=\frac{1}{2}-(ln2)+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}$

Δ3.

- Χ>0 f γνησίως αύξουσα f(x)>f(0) ⇒f(x)>0
- h(x)=$\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}$, h’(x)= $e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}=h'(0)=0$$

- $\lim_{x\to0^+} x\ln\left(f(x)\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{lnfx)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{f(x)}\cdot f'(x)=^{*}0$

  $*\ \lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{f(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x}{f'(x)}=0$

  $ά\rho\alpha\left(\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\cdot xlnf(x)\right)=0$

Δ4.

h(x)=(x-2)(1-3$\int_0^{x-2}f(t^2)dt+(x-3)(8-3\int_0^x f^2(t)dt$

Η h είναι στο [2,3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων…

h(2)= $3\int_0^2 f^2(t)dt-8<0$

h(3)= $1-3\int_0^1 f(t^2)dt>0$

Στο [2,3] έχουμε ‘ότι: f κοίλη στο [2,3] άρα

f(x)<x⇒f²(x)<x²⇒$\int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 x^2dx$=$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$

Άρα $\int_0^2 f^2(t)dt<\frac{8}{3}\Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(t)dt-8<0$

Ακόμα f(x²)<x² ⇒$\int_0^1 f(x^2)dx<\int_0^1 x^2dx \ \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 f(x^2)dx<\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

Άρα -3·$\int_0^1 f(x^2)dx+1>0$

Άρα h(2)·h(3)<0

Από θεώρημα Boltzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (2,3) της h(x)=0

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΚΑΜΜΑΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ

ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ