ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝ/ΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ 191

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ 152

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 234

Α4. Λάθος, Σωστό ,Λάθος, Σωστό, Σωστό.

\- - - - -

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η σχέση (1) για $x=\psi=1$ δίνει $f(1)=0$ (2) οπότε το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Έστω $x_1,\ x_2>0$ με

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)=0\Leftrightarrow f(\frac{x_1}{x_2})=0$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\ \frac{x_1}{x_2}=1\ \Leftrightarrow\ x_1=x_2$$

Η f είναι 1-1, άρα υπάρχει η αντίστροφή της.

Β2. Πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x-3>0 \quad\Leftrightarrow\quad x>3 \\ x>0 \\ 2x-6>0 \quad\Leftrightarrow\quad x>3 \end{array}\right\}\text{Άρα } x\in(3,+\infty)$$

$$f(x-3)+f(x)=f(2x-6)\Leftrightarrow f(x-3)=f(2x-6)-f(x)$$

$$f(x-3)=f\left(\frac{2x-6}{x}\right)\ \overset{f\ \text{"1-1"}}{\Longleftrightarrow}\ x-3=\frac{2x-6}{x}$$

$$x^2-5x+6=0\ \Leftrightarrow\ x=2\ \text{ή}\ x=3$$

τα οποία όμως δεν ανήκουν στο $(3,+\infty)$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Β3. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 θα είναι:

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}<0,\qquad(3)$$

Για κάθε $x_0>0$ έχουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{h=\frac{x_0}{x}}{=}\lim_{h\to1}\frac{f\left(\frac{x_0}{h}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0}{h}-x_0}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to1}\frac{f(x_0)-f(h)-f(x_0)}{\frac{x_0-hx_0}{h}}=$$

$$= \lim_{h\to 1} \frac{-h\cdot f(h)}{x_0(1-h)} = \lim_{h\to 1} \frac{h}{x_0}\cdot\frac{f(h)}{h-1} \overset{(3)}{=} \frac{1}{x_0}\cdot f'(1) \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}\cdot f'(1)$. Άρα $f'(x) = \frac{1}{x}\cdot f'(1)$ για κάθε $x > 0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη με $f'(x) < 0$ στο $(0,+\infty)$ (αφού $f'(1) < 0$), άρα η f είναι <u>γνησίως φθίνουσα</u> στο $(0,+\infty)$.

\- - - - -

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η $y = e^{x^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη σύνθεση συναρτήσεων, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, συνεπώς είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη.

$f'(x) = e^{x^2} > 0$ στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$f''(x) = 2xe^{x^2}$ οπότε για $x > 0$, $f''(x) > 0$ άρα f κυρτή στο $[0,+\infty)$ και
για $x < 0$, $f''(x) < 0$ άρα f κοίλη στο $(-\infty,0]$.

Γ2.

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^x e^{t^2}\mathrm{dt}\right)\mathrm{dx} = \int_0^1 f(x)\mathrm{dx} = \int_0^1 (x)'f(x)\mathrm{dx} = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\mathrm{dx} =$$

$$= f(1) - \int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{dx} = 0 - \int_0^1 \frac{2x}{2}e^{x^2}\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)'e^{x^2}\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}[e^{x^2}]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^0) = -\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$$

Γ3. Η $f''(x) \le 0$ στο $(-\infty,0]$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

$$x \le t \le 1 \overset{f'\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Longleftrightarrow} f'(1) \le f'(t) \le f'(x) \Leftrightarrow e \le e^{t^2} \le e^{x^2}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα κατά μέλη με $x < 0$, παίρνουμε

$$\int_x^1 e dt \le \int_x^1 e^{t^2}dt \le \int_x^1 e^{x^2}dt \Leftrightarrow [e\,t]_x^1 \le -f(x) \le \left[e^{x^2}t\right]_x^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e(1-x) \le -f(x) \le e^{x^2}(1-x)$$

$$\Leftrightarrow e(x-1) \ge f(x) \ge e^{x^2}(x-1)$$

Όμως είναι

$$\lim_{x\to-\infty} e(x-1) = \lim_{x\to-\infty} ex = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{x^2}(x-1) = -\infty$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι

$$\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$$

$$f(x_0) = f'(x_0)\, x_0$$

$$f'(x_0)\, x_0 - f(x_0) = 0$$

$$x_0\, e^{{x_0}^2} = f(x_0)$$

$$x_0 = e^{-{x_0}^2} f(x_0)$$

Θέτω $g(x) = e^{-x^2} f(x) - x$ και θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ρίζα x_0.

- $\lim_{x\to-\infty} e^{x^2} \overset{h=x^2}{=} \lim_{h\to+\infty} e^h = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{e^{x^2}}\right) \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{f'(x)}{2\,x\,e^{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x^2}}{2\,x\,e^{x^2}} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{e^{x^2}} - x\right) = +\infty$ οπότε υπάρχει $\alpha < 0$ με $g(\alpha) > 0$
- $g(1) = e^{-1} f(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με $g(1) \cdot g(\alpha) < 0$.

Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, 1)$ με $g(x_0) = 0$.

\- - - - -

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει ότι

$$z^{10} + z^9 + \cdots + z + 1 = 0$$

$$(z^{10} + z^9 + \cdots + z + 1)(z - 1) = 0$$

$$z^{11} - 1 = 0$$

$$z^{11} = 1$$

τότε είναι

$$|z^{11}| = 1 \Leftrightarrow |z|^{11} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\,\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \quad (1)$$

Έχουμε ότι

$w=\frac{z^2+1}{z}=z+\frac{1}{z}$ και $\overline{w}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \overline{w}=\frac{1}{z}+z=w$ συνεπώς $w\in\mathbb{R}$.

Δ2. (α) Είναι $w\neq 0$ και $|z+2wi|=|z-2wi| \Leftrightarrow \left|\frac{z}{w}+2i\right||w|=\left|\frac{z}{w}-2i\right||w| \overset{|w|\neq 0}{\Longleftrightarrow}$

$$|u+2i|=|u-2i| \overset{u\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{u^2+4}=\sqrt{u^2+4}$$ που ισχύει.

(β) Επειδή $u=\frac{z}{w}\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\frac{z}{w}=\frac{\bar{z}}{\overline{w}} \Leftrightarrow z\overline{w}=\bar{z}w \Leftrightarrow$$

$$(a+f(a)i)(\beta-f(\beta)i)=(a-f(a)i)(\beta+f(\beta)i) \Leftrightarrow$$

$$2f(\alpha)\beta i=2f(\beta)ai \Leftrightarrow \alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$$

(γ) Θέτουμε $u=\mathrm{x}+\beta-t$ οπότε $du=-dt$ και $\begin{cases} t=\beta & : u=x \\ t=x & : u=\beta \end{cases}$

$$\int_{\beta}^{x}\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}+\beta-t)}{\mathrm{x}+\beta-t}\mathrm{dt}=\int_{x}^{\beta}\frac{\mathrm{f(u)}}{\mathrm{u}}(-\mathrm{du})=\int_{\beta}^{x}\frac{\mathrm{f(u)}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}$$

Επειδή f παραγωγίσιμη θα είναι συνεχής. Έτσι η συνάρτηση $\frac{\mathrm{f(u)}}{\mathrm{u}}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε και η $\int_{\beta}^{x}\frac{\mathrm{f(u)}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

$$\lim_{x\to\beta}\frac{1}{x-\beta}\int_{\beta}^{x}\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}+\beta-t)}{\mathrm{x}+\beta-t}\mathrm{dt}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\beta}\frac{1}{x-\beta}\int_{\beta}^{x}\frac{\mathrm{f(u)}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}=1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\beta}\frac{\int_{\beta}^{x}\frac{\mathrm{f(u)}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}}{x-\beta}=1 \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to\beta}\frac{\mathrm{f(x)}}{x}=1 \Leftrightarrow \mathrm{f}(\beta)=\beta$$

Από το ερώτημα (β) συμπεραίνουμε ότι $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(\beta)}{\beta}=1$ άρα και $f(a)=a$.

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $g(a)=f(a)-a=0$, $g(\beta)=f(\beta)-\beta=0$.

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\varepsilon(\alpha,\beta)$ με $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=1$.

\- - - - -

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ