

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σελίδα 149

A2. Θεωρία σελίδα 148

A3. Θεωρία σελίδα 30

A4. (α) \wedge (β) Σ (γ) \wedge (δ) \wedge (ε) \wedge

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ έχω $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = k - (P(A) + P(B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = k - (P(A) + P(B)) \Leftrightarrow (P(A) + P(B)) = k + 1$$

Ακόμα ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$ και $0 \leq P(B) \leq 1$. Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$0 \leq P(A) + P(B) \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq k + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq k \leq 1 \Leftrightarrow |k| \leq 1$$

B2. Έχουμε ότι

$$x \cdot e^{g(x)} = (x-1) \cdot f(x) - 2 \Leftrightarrow x \cdot e^{g(x)} = x^2 - 3x \Leftrightarrow e^{g(x)} = x - 3$$

Επομένως $g(x) = \ln(x-3)$

B3. Πρέπει $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$. Άρα $A = (3, +\infty)$

B4. Έχουμε ότι $g'(x) = \frac{1}{x-3} > 0$

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

B5. Ισχύει ότι $A \subseteq B \Rightarrow P(A) < P(B) \xrightarrow{g \nearrow} g(P(A)) < g(P(B))$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Μελετάμε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

$$\text{Έχουμε } f'(x) = \frac{\sqrt{x} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - x - 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\text{Έχουμε ότι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

| | | | |
|---------|---|--------------|-------------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - | + |
| $f(x)$ | | Γν. φθίνουσα | Γν. αύξουσα |

$$\text{Ακόμα } x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 \xrightarrow{f \text{ γν. φθίνουσα}} f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4) > f(x_5)$$

$$\text{Άρα } f(x_2) > f(x_3) \xrightarrow{\delta=x_3=\frac{1}{2}} f(x_2) > f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x_2) > \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}f(x_2) - 3 > 0$$

Γ2. Έχουμε ότι $(OM)^2 = \left(\sqrt{x^2 + f^2(x)}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^2}\right)^2 = x^2 + x + 2 + \frac{1}{x}$

Γ3. Έστω R_1 το εύρος των τεταγμένων τότε

$$R_1 = f(x_1) - f(x_5) = \frac{x_1+1}{\sqrt{x_1}} - \frac{x_5+1}{\sqrt{x_5}} = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_5}) + \frac{\sqrt{x_5} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_5}} =$$

$$= \frac{x_5 - x_1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_5}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_5}} - 1\right) = \frac{R}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{4\alpha} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} = \frac{1-\beta}{4\alpha\beta}$$

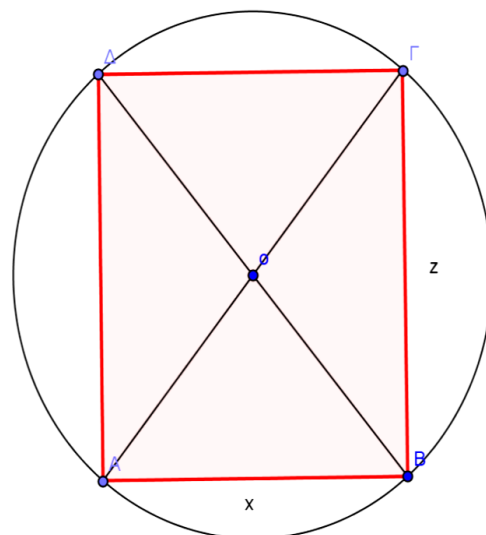
Ακόμα $\beta \cdot (1 + 20\alpha) = 1 \Leftrightarrow \beta + 20\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow 1 - \beta = 20\alpha\beta$

Άρα $R_1 = \frac{20\alpha\beta}{4\alpha\beta} = 5$

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής του τετραγώνου της απόστασης τυχαίου σημείου $M(x, f(x))$ από το $O(0,0)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης

$$g(x) = x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} \text{ με } g'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(1) = 2$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ από Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$AB^2 + BG^2 = AG^2 \Leftrightarrow x^2 + z^2 = 16 \Leftrightarrow z = \sqrt{16 - x^2}$. Για το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ έχω $E(x) = x \cdot \sqrt{16 - x^2}$ με $x > 0$ και

$$z > 0 \Leftrightarrow \sqrt{16 - x^2} > 0 \text{ που ισχύει αρκεί } 16 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < x < 4$$

Επομένως $0 < x < 4$

$$\Delta 2. E'(x) = \sqrt{16 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$E'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 8, \text{ επομένως } 0 < x < 2\sqrt{2}$$

Η $E(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 2\sqrt{2}$

| | | | |
|---------|---|-------------|--------------|
| x | 0 | $2\sqrt{2}$ | 4 |
| $E'(x)$ | | + | ○ - |
| $E(x)$ | | Γν. αύξουσα | Γν. φθίνουσα |

Δ3. Έχουμε ότι $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 2\sqrt{2} \xRightarrow{E(x) \text{ γν. αύξουσα}}$

$$\Rightarrow E(1) = E(x_1) < E(x_2) < E(x_3) < E(x_4) < E(x_5) = E(2\sqrt{2}) \text{ με}$$

$$R = E(2\sqrt{2}) - E(1) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{16 - (2\sqrt{2})^2} - \sqrt{15} = 8 - \sqrt{15}$$

Δ4. Για την διάμεσο των τεταγμένων $y_i = E(x_i)$ έχουμε ότι

$$\delta = E(x_3) \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{55}}{4} = x_3 \cdot \sqrt{16 - x_3^2} \Leftrightarrow (3\sqrt{55})^2 = (4x_3 \cdot \sqrt{16 - x_3^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x_3^4 - 256x_3^2 + 495 = 0. \text{ Άρα } x_3^2 = \frac{9}{4} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x_3 = \frac{3}{2} \text{ ή}$$

$$x_3^2 = \frac{55}{4} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x_3 = \frac{\sqrt{55}}{2} > 2\sqrt{2} \text{ Απορρίπτεται.}$$

$$\text{Επομένως } y_i \geq \sqrt{4 \cdot \frac{3}{2} - (8 - \sqrt{15}) \cdot x_i - \sqrt{15} \cdot x_i + 12 + 5x_i \cdot x_i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16 - x_i^2} \geq \sqrt{6 - 8x_i + \sqrt{15} \cdot x_i - \sqrt{15} \cdot x_i + 12 + 5x_i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i^2 - 3x_i + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x_i \leq 2. \text{ Άρα } A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ και η πιθανότητα του}$$

$$\text{ενδεχομένου } A \text{ θα είναι } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{5}.$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ