ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687

# ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελ 85

**Α2.** Σχολικό βιβλίο σελ. 148

**Α3.** Σχολικό βιβλίο σελ.28

**Α4.** Λ-Λ-Λ-Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Έχουμε τις κλάσεις

$[a,a+c),[a+c,a+2c),[a+2c,a+3c),[a+3c,a+4c),[a+4c,a+5c)$ με

$x_1=\frac{a+c+a}{2}\Leftrightarrow 2=\frac{a+c+a}{2}\Leftrightarrow 2a+c=4(1)$ και

$x_2=6\Leftrightarrow \frac{a+2c+a+c}{2}=6\Leftrightarrow 2a+3c=12(2)$

$(2)-(1)\Rightarrow 2c=8\Leftrightarrow c=4$

**Β2.** $(1)\Rightarrow 2a+4=4\Leftrightarrow a=0$

| Κλάσεις $[...,...)$ | $x_i$ | $v_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i\%$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0-4 | 2 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 4-8 | 6 | 15 | 15 | 25 | 25 |
| 8-12 | 10 | 25 | 25 | 50 | 50 |
| 12-16 | 14 | 40 | 40 | 90 | 90 |
| 16-20 | 18 | 10 | 10 | 100 | 100 |
| Σύνολο | - | 100 | 100 | - | - |

**Β3.** Αφού $F_3\%=50$ τότε $\delta=12$

**B4.** Όλες οι παρατηρήσεις κατανέμονται με όμοιο τρόπο επομένως έχουμε

$$\frac{c_5}{c_5'}=\frac{v_5}{v_5'}\Rightarrow\frac{20-16}{20-18}=\frac{10}{v_5'}\Leftrightarrow 2=\frac{10}{v_5'}\Leftrightarrow v_5'=5$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x+1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $A$ είναι

$\lambda=f'(-1)=-1$

Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$\psi=\lambda x+\beta$

$\psi=-x+\beta$

Το σημείο $A(-1,0)$ είναι σημείο της εφαπτομένης. Έτσι

$\psi_A=x_A+\beta \iff 0=-(-1)+\beta \iff \beta=-1$

Άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon$: $\psi=-\chi-1$.

**Γ2.** Η απόσταση κάθε σημείου $M(x_M,\psi_M)$ της εφαπτομένης, απέχει από το $O$ απόσταση $(OM)=\sqrt{x_M^2+\psi_M^2}$.

Αλλά το $M$ είναι σημείο της εφαπτομένης και έτσι: $\psi_M=-x_M-1$.

Τότε η απόσταση $(OM)$ γίνεται:

$$(OM)=\sqrt{x_M^2+(-x_M-1)^2}$$

Θεωρώντας την συνάρτηση

$$d(x)=\sqrt{x^2+(-x-1)^2}=\sqrt{x^2+(x+1)^2}$$

$$d'(x)=\frac{2x+2(x+1)}{2\sqrt{x^2+(x+1)^2}}=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+(x+1)^2}}$$

$$d'(x)=0 \iff 2x+1=0 \iff x=-\tfrac{1}{2}$$

Το πρόσημο της $d'(x)$ φαίνεται στο παρακάτω πίνακα μονοτονίας.

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $d'(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $d(x)$ | ↘ | | ↗ |

*Ελάχιστη τιμή*

Έτσι η συνάρτηση της απόστασης παρουσιάζει ελάχιστη τιμή όταν $x=-\frac{1}{2}$. Τότε το ζητούμενο σημείο $K$ της εφαπτομένης έχει συντεταγμένες $x_K=-\frac{1}{2}$, $\psi_K=-\frac{1}{2}$.

**Γ3.** Για τις συντεταγμένες των σημείων $M_i(x_i, y_i)$ $i=1,2,\ldots,100$ ισχύει:

$$y_i = f(x_i)$$

$$y_i = x_i^2 + x_i$$

Το δείγμα $x_i$ έχει:

$$\bar{x} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i \iff \sum_{i=1}^{100} x_i = 100\cdot\bar{x} = 200$$

$$s^2 = \frac{1}{100}\left\{\sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)^2}{100}\right\} \iff \sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \frac{200^2}{100} = 100 \iff \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 500$$

Η μέση τιμή του νέου δείγματος $y_i$ είναι:

$$\bar{y} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} y_i = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(x_i^2 + x_i) = \frac{1}{100}\left(\sum_{i=1}^{100} x_i^2 + \sum_{i=1}^{100} x_i\right) = 7$$

**Γ4.** Εντοπίζουμε το δειγματικό χώρο $\Omega$ λύνοντας την εξίσωση στο $\mathbb{Z}$:

$$5x - x^2 > 0 \iff x(5-x) > 0 \iff 0 < x < 5$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad \mu\varepsilon \quad N(\Omega) = 4$$

Εντοπίζουμε το ενδεχόμενο $A$ λύνοντας την εξίσωση στο Ω:

$$\omega^2 - \omega\bar{y} + 12 = 0 \iff \omega^2 - 7\omega + 12 = 0 \iff \omega = 3 \ \acute{\eta}\ 4$$

$A=\{3,4\}\ \ \mu\varepsilon\ \ N(A)=2$

Εντοπίζουμε το ενδεχόμενο $B$ λύνοντας την εξίσωση στο Ω:

Πρέπει το $K\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ να είναι το $K\left(-\frac{\omega}{2},y_\kappa\right)$ δηλαδή

$-\frac{1}{2}=-\frac{\omega}{2}\ \Leftrightarrow\ \omega=1$

$B=\{1\}\ \ \mu\varepsilon\ \ N(B)=1$

Τότε οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{4}=0.50$$

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}=0.25$$

Τα $A,B$ είναι ασυμβίβαστα αφού $A\cap B=\emptyset$. Έτσι

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.50+0.25=0.75$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Έχουμε $f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{e^x}=0\Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{e^x}>0\overset{\cdot e^x}{\Longleftrightarrow}1-x>0\Leftrightarrow x<1$

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ |

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1.+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=\dfrac{1}{e}$

**Δ2.** Έχουμε ότι

$$2a^2+\beta^2+\gamma^2-\frac{1}{5}(\alpha+2\gamma)-2\alpha\beta+\frac{21}{20}=1\Leftrightarrow a^2+\beta^2+\gamma^2-\frac{1}{5}\alpha-\frac{2}{5}\gamma-2\alpha\beta+\frac{21}{20}=1\Leftrightarrow$$

$$\left(a^2-2\cdot\frac{1}{10}\alpha+\frac{1}{100}\right)+\left(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2\right)+\left(\gamma^2-2\cdot\frac{1}{5}\gamma+\frac{1}{25}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{10}\right)^2+(\beta-\alpha)^2+\left(\gamma-\frac{1}{5}\right)^2=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{10},\beta=\frac{1}{10},\gamma=\frac{1}{5}$$

**Δ3.** Πρέπει $g'(1)=f'(2)(1)$

Αφού $g'(x)=-\frac{4P(\omega_4)}{e^2}\cdot x^3\Leftrightarrow g'(1)=-\frac{4P(\omega_4)}{e^2}\ (2)$

Ακόμα $f'(2)=-\frac{1}{e^2}\ (3)$

$$(1)\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Longrightarrow}}-\frac{4P(\omega_4)}{e^2}=-\frac{1}{e^2}\Leftrightarrow P(\omega_4)=\frac{1}{4}$$

Τέλος ισχύει ότι $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)+P(\omega_5)=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+P(\omega_5)=1\Rightarrow\frac{13}{20}+P(\omega_5)=1\Rightarrow P(\omega_5)=\frac{7}{20}$$

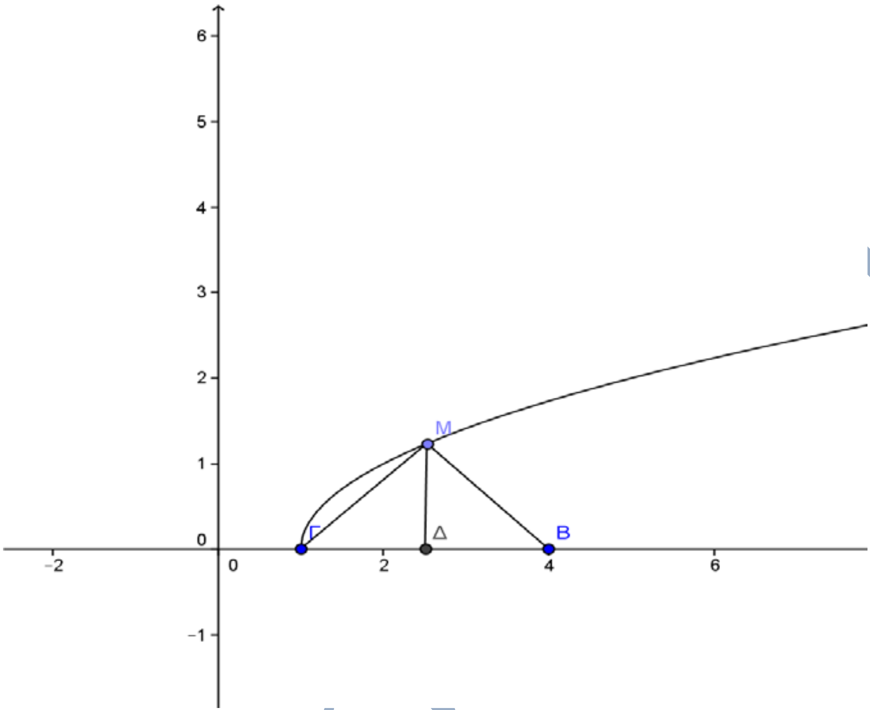
**Δ4.** Για τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $h$ με τον $x'x$ έχω

$$h(x)=0\Leftrightarrow\ln^2x+\ln x\cdot\ln\left(P(\omega_4)\right)+\ln\left(f(1)\cdot e\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln^2x+\ln x\cdot\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\ln\left(\frac{1}{e}\cdot e\right)=0\Leftrightarrow\ln^2x+\ln x\cdot(-\ln4)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln x\cdot(\ln x-\ln4)=0\Leftrightarrow\ln x=0 \text{ ή } \ln x=\ln4\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=4$$

Αφού $x_\Gamma < x_B$ έχουμε $x_\Gamma = 1$ και $x_B = 4$. Άρα $\Gamma(1,0)$ και $B(4,0)$. Επομένως για το εμβαδόν του τριγώνου ΜΓΒ έχω




$(M\Gamma B) = \frac{1}{2}\Gamma B \cdot M\Delta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{x-1}$ Θεωρούμε την συνάρτηση $\sigma(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x-1}$

Όπου $\sigma'(x) = \frac{3}{4\sqrt{x-1}} \Rightarrow \sigma'(2) = \frac{3}{4}$

*ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ*
*ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ*
*ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ*