ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 87

Α2. Θεωρία σελ. 142

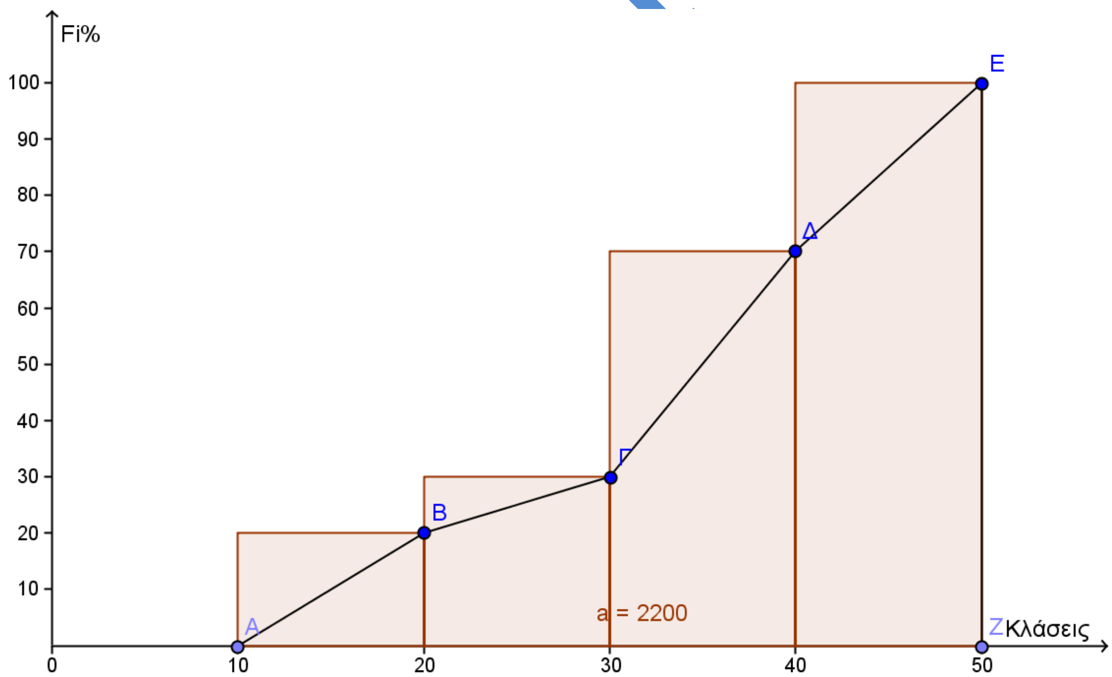
Α3. Θεωρία σελ. 28

Α4. Λ-Λ-Λ-Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού $\delta = 35$ και οι παρατηρήσεις κατανέμονται με όμοιο τρόπο έχουμε

$$\frac{c_3}{c_3'} = \frac{f_3}{f_3'} \Leftrightarrow \frac{40-30}{35-30} = \frac{y_\Delta - 30}{50-30} \Leftrightarrow \frac{10}{5} = \frac{y_\Delta - 30}{20} \Leftrightarrow y_\Delta - 30 = 40 \Leftrightarrow y_\Delta = 70.$$



Β2.

Κλάσεις $[\ldots,\ldots)$	x_i	ν_i	f_i	F_i	$x_i \cdot \nu_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot \nu_i$
10-20	15	10	0,2	0,2	150	225	2250
20-30	25	5	0,1	0,3	125	625	3125
30-40	35	20	0,4	0,7	700	1225	24500
40-50	45	15	0,3	1	675	2025	30375
Σύνολο	-	50	1	-	1650	-	60250

Έχουμε ότι $F_1 = 0,2, F_2 = 0,3, F_3 = 0,7$ και $F_4 = 1$. Ακόμα $f_1 = F_1 = 0,2$ και $f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{10}{\nu} \Leftrightarrow \nu = 50$. Έχουμε ότι $f_2 = F_2 - F_1 = 0,3 - 0,2 = 0,1$,

$f_3 = F_3 - F_2 = 0,7 - 0,3 = 0,4$ και $f_4 = F_4 - F_3 = 1 - 0,7 = 0,3$.

Ακόμα $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} \Leftrightarrow 0,1 = \frac{\nu_2}{50} \Leftrightarrow \nu_2 = 5$ και $f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} \Leftrightarrow 0,4 = \frac{\nu_3}{50} \Leftrightarrow \nu_3 = 20$,

$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} \Leftrightarrow 0,3 = \frac{\nu_4}{50} \Leftrightarrow \nu_4 = 15$.

Β3. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{1650}{50} = 33$ και

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i \right)^2}{\nu} \right\} = \frac{1}{50} \cdot 60250 - \bar{x}^2 = 1205 - 33^2 = 1205 - 1089 = 116$$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{116} = 10,8$

Β4. $s_y = 5 \cdot s = 5 \cdot 10,8 = 54$ και $\bar{y} = 5 \cdot \bar{x} + 435 = 600$, άρα

$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{54}{600} = 0,09 = 9\%$ επομένως το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $8\ln\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}} = 8\cdot\ln\left(\sqrt{e}\cdot\sqrt{\sqrt{e}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}}\right) = 8\cdot\left(\ln e^{\frac{1}{2}} + \ln e^{\frac{1}{4}} + \ln e^{\frac{1}{8}}\right) =$

$= 8\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = 8\cdot\frac{7}{8} = 7$.

Άρα, $x^2+4<5x \Leftrightarrow x^2-5x+4<0 \Leftrightarrow x\in(1,4) \overset{x\in\Omega}{\Leftrightarrow} x=2, x=3$. Επομένως $A=\{2,3\}$

$(x^2-6x)\cdot(x-4) = -5\cdot(x-4) \Leftrightarrow (x-4)\cdot(x^2-6x+5)=0 \Leftrightarrow x=4, x=1, x=5$.

Άρα $B=\{1,4,5\}$. Επομένως $A\cap B=\varnothing$.

Γ2. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)$ και

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)$.

Γ3. $P(A-B)+P(A'\cup B)=P(A)-P(A\cap B)+P(A')+P(B)-P(A'\cap B)=$

$=P(A)+0+P(A')+P(B)-P(B-A)=P(A)+P(A')+P(B)-P(B)+P(A\cap B)=$

$=P(A)+P(A')=1$.

Γ4. Αφού $A\cup X=B$ έχουμε $A\subseteq B$ και $X\subseteq B$. Αφού $X\subseteq B \Rightarrow P(X)\le P(B)$ άρα $\max P(X)=P(B)=\frac{1}{3}$. Ακόμα $A\subseteq B$ άρα το ελάχιστο $P(X)$ ώστε $A\cup X=B$ είναι $\min P(X)=P(B-A)=\frac{2}{9}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω ότι το σύρμα κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x m και $10-x$ m. Με το σύρμα μήκους x m κατασκευάζουμε κύκλο, ενώ με το σύρμα μήκους $10-x$ m κατασκευάζουμε τετράγωνο.

Για τον κύκλο έχω $L=2\pi\rho \Leftrightarrow x=2\pi\rho \Leftrightarrow \rho=\frac{x}{2\pi}$ και

εμβαδόν $E_1=\pi\rho^2 \Leftrightarrow E_1=\pi\cdot\frac{x^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow E_1=\frac{x^2}{4\pi}$. Για το τετράγωνο με πλευρά

$\frac{10-x}{4}$ έχω εμβαδόν $E_2=\frac{(10-x)^2}{16}$. Επομένως

$E_1+E_2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(10-x)^2}{16}=\frac{4x^2+\pi(10-x)^2}{16\pi}$. Θεωρούμε $f(x)=\frac{4x^2+\pi(10-x)^2}{16\pi}$ με $x\in(0,10)$.

Επομένως $f'(x)=\frac{8x-2\pi(10-x)}{16\pi}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{4x-\pi(10-x)}{8\pi}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x-\pi(10-x)}{8\pi}=0$ άρα

$4x-10\pi+\pi x=0\Leftrightarrow x=\frac{10\pi}{4+\pi}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{4x-\pi(10-x)}{8\pi}>0\Leftrightarrow 4x-\pi(10-x)>0\Leftrightarrow 4x-10\pi+\pi x>0\Leftrightarrow$

$x>\frac{10\pi}{4+\pi}$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{10\pi}{4+\pi}\right)$ ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{10\pi}{4+\pi},10\right)$ Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\frac{10\pi}{4+\pi}$ και τότε η διάμετρος του κύκλου είναι $\delta=2\rho=2\cdot\frac{x}{2\pi}=\frac{10\pi}{(4+\pi)\cdot\pi}=\frac{10}{4+\pi}$, ενώ η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{10-x}{4}=\frac{10-\frac{10\pi}{4+\pi}}{4}=\frac{40+10\pi-10\pi}{4\cdot(4+\pi)}=\frac{10}{4+\pi}$.

Δ2. $f(x)=10p\cdot(4+\pi)\cdot(1+\ln x)\cdot\delta-100qx\Leftrightarrow$

$f(x)=10p\cdot\cancel{(4+\pi)}\cdot(1+\ln x)\cdot\frac{10}{\cancel{4+\pi}}-100qx\Leftrightarrow$

$f(x)=100p\cdot(1+\ln x)-100qx$

$f'(x)=100p\cdot\frac{1}{x}-100q\Leftrightarrow f'(x)=100\left(\frac{p}{x}-q\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 100p\cdot\frac{1}{x}-100q=0 \Leftrightarrow 100\left(\frac{p}{x}-q\right)=0 \Leftrightarrow \frac{p}{x}-q=0 \Leftrightarrow p-qx=0 \Leftrightarrow x=\frac{p}{q}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 100p\cdot\frac{1}{x}-100q>0 \Leftrightarrow 100\left(\frac{p}{x}-q\right)>0 \Leftrightarrow \frac{p}{x}-q>0 \Leftrightarrow \frac{p}{x}>q \overset{x>0}{\Leftrightarrow} p>qx$ άρα $x<\frac{p}{q}$.

Ακόμα

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 100p\cdot\frac{1}{x}-100q<0 \Leftrightarrow 100\left(\frac{p}{x}-q\right)<0 \Leftrightarrow \frac{p}{x}-q<0 \Leftrightarrow \frac{p}{x}<q \Leftrightarrow p<qx$ $\Leftrightarrow x>\frac{p}{q}$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{p}{q}\right]$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{p}{q},+\infty\right)$. Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=\frac{p}{q}$.

Δ3. Έχουμε $y_i=-\frac{1}{s}\cdot x_i+\frac{p+q}{s}\cdot\bar{x}$

$\bar{y}_B=-\frac{1}{s}\cdot\bar{x}+(p+q)\cdot\frac{\bar{x}}{s} \Leftrightarrow \bar{y}_B=-\frac{1}{\frac{s}{\bar{x}}}+\frac{p+q}{\frac{s}{\bar{x}}} \Leftrightarrow \bar{y}_B=-\frac{1}{CV_A}+\frac{p+q}{CV_A}$ άρα

$\bar{y}_B=\frac{p+q-1}{CV_A}$

Ακόμα $s_B=\left|-\frac{1}{s}\right|\cdot s \Leftrightarrow s_B=1$ και $CV_B=\frac{s_B}{|\bar{y}_B|} \Leftrightarrow CV_B=\frac{1}{|p+q-1|}\cdot CV_A$ι.

Δ4. Αφού το Α έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το Β τότε

$CV_A<CV_B \Leftrightarrow CV_A<\frac{1}{|p+q-1|}CV_A \Leftrightarrow |p+q-1|<1 \Leftrightarrow -1<p+q-1<1 \Leftrightarrow 0<p+q<2$

Επομένως $p+q<2$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ