Λύσεις.

Θέμα Α

Α1.Σχολικό βιβλίο σελ.:142-143

Α2 Σχολικό βιβλίο σελ.:73

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.:51

Α4. i.Σ ii. Σiii.Λ iv.Σ v.Λ

Θέμα Β

Β1.g(x)=lnx+x , Dg=(0,+∞), g συνεχής στο (0,+∞)

g΄(x)= $\frac{1}{x}+1>0 \quad \forall x>0 \quad \rightarrow g \uparrow$ στο (0,+∞) άρα g 1-1

Β2.(1) $\leftrightarrow \ln(f(x))+f(x)=e^x+x \leftrightarrow g(f(x))=g(e^x) \overset{g\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow} f(x)=e^x$, x∈R

Β3.

$$α) T(x)=e^{2x}-\int_0^1 2x\cdot T(t)dt \Leftrightarrow T(x)=e^{2x}-2x\int_0^1 T(t)dt$$

Αφού η T(x) είναι συνεχής ολοκληρώνουμε και έχουμε:

$$\int_0^1 T(x)dx=\int_0^1 (e^{2x}-2x\int_0^1 T(t)dt)dx \Leftrightarrow \int_0^1 T(x)dx=\int_0^1 e^{2x}dx-\int_0^1 (2x\cdot\int_0^1 T(t)dt)dx \ (4)$$

Αν θέσω $c=\int_0^1 T(x)dx$ Τότε η (4) γίνεται :

$$c=\int_0^1 e^{2x}dx-c\int_0^1 2xdx \Leftrightarrow c=[\frac{e^{2x}}{2}]_0^1-c[x^2]_0^1 \Leftrightarrow c=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-c \Leftrightarrow c=\frac{e^2-1}{4}$$

$$\text{και } T(x)=e^{2x}-2x\cdot c=e^{2x}-2x\cdot\frac{e^2-1}{4}=\frac{2e^{2x}-e^2x+x}{2}, x\in R$$

β)Έστω $M(x_0,T(x_0))$ τυχαίο σημείο της C_T

Η εφαπτόμενη της C_T στο Μ έχει εξίσωση : (ε): $y-T(x_0)=T΄(x_0)\cdot(x-x_0)$

T΄(x)= $\frac{4e^{2x}-e^2+1}{2}$

Άρα (ε): $y - \frac{2e^{2x_0}-e^2x_0+x_0}{2} = \frac{4e^{2x_0}-e^2+1}{2}(x-x_0)$

Η (ε) διέρχεται από το (0,0) άρα : $\frac{-2e^{2x_0}+e^2\cdot x_0+x_0}{2} = \frac{-4e^{2x_0}\cdot x_0+e^2\cdot x_0-x_0}{2} \Leftrightarrow$

$2e^{2x_0} = 4e^{2x_0}\cdot x_0 \overset{e^{2x_0}\neq 0}{\Leftrightarrow} 2x_0=1 \Leftrightarrow \boxed{x_0=\frac{1}{2}}$ Άρα (ε): $y=\frac{4e-e^2+1}{2}x$

Μελετώ την κυρτότητα της T(x)

$T'(x)=\frac{4e^{2x}-e^2+1}{2}$ και $T''(x)=\frac{8e^{2x}}{2}=4e^{2x}>0 \quad \forall x$

Άρα T(x) κυρτή στο R , οπότε για κάθε εφαπτομένη της ισχύει ότι η C_T θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη. $\forall x$ εκτός από το σημείο επαφής.
Οπότε θα ισχύει : $T(x)\geq y \Leftrightarrow T(x)-y\geq 0$
γ)

$$E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|T(x)-y|dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(T(x)-y)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{2e^{2x}-e^2x+x}{2}-\frac{4e-e^2+1}{2}x\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(e^{2x}-ex^2)dx$$

$$=\frac{e(2e-5)}{4}\text{τμ}$$

Θέμα Γ

Γ1. $h(x)=x^2-x\ln x-x+1$, $x>0$ τότε $h'(x)=2x-\ln x-1-1=2x-\ln x-2$ και **$h'(1)=0$**

$h''(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$, $h''(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$

x	0	$\frac{1}{2}$	
h''	$-$	0	$+$
h'	↘		↗

Η h(x) παρουσιαζει ολκό min το $h'\left(\frac{1}{2}\right)=1-\ln\frac{1}{2}-2=\ln 2-1<0$ και $\lim_{x\to 0^+}h'(x)=+\infty$

Άρα $h'((0,\frac{1}{2}])=[\ln 2-1,+\infty)$.Το $0\in h'((0,\frac{1}{2}]$ και h΄↘ στο $(0,\frac{1}{2}]$, οπότε υπάρχει μοναδικό

$x_1\in(0,\frac{1}{2}):h'(x_1)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(2-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}\right)\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to+\infty} h'(x)=+\infty$$

Άρα $h'([\frac{1}{2},+\infty))=[\ln 2-1,+\infty)$. Το $0\in h'([\frac{1}{2},+\infty))$ και $h'\nearrow$ στο $[\frac{1}{2},+\infty)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_2\in(\frac{1}{2},+\infty)$: $h'(x_2)=0$

Οπότε υπάρχουν ακριβώς 2 αριθμοί x_1 , $x_2\in(0,+\infty)$ τέτοιοι ώστε $h'(x_1)\cdot\ h'(x_2)=0$.

Και αφου $h'(1)=0$, το $x_2=1$.

Γ2.

x	0		x_1		$\frac{1}{2}$		$x_2=1$	
h'		$\searrow +$	0	$\searrow -$	0	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$
h		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Για $0<x<x_1 \overset{h'\downarrow}{\Leftrightarrow} h'(x)>h'(x_1)=0$

Για $x_1<x<\frac{1}{2} \overset{h'\downarrow}{\Leftrightarrow} h'(x)<h'(x_1)=0$

Για $\frac{1}{2}<x<1 \overset{h'\uparrow}{\Leftrightarrow} h'(x)<h'(1)=0$

Για $x>1 \overset{h'\uparrow}{\Leftrightarrow} h'(x)>h'(1)=0$

Άρα η h(x) έχει τοπικο max στο x_1 και τοπικο min στο $x_2=1$.

$h(x_1)=(x_1^2-x_1+1)-x_1\ln x_1$

$x_1^2-x_1+1>0 \quad \forall x_1\in R$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Για } 0<x_1<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \ln x_1<\ln\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \ln x_1<-\ln 2<0\\ \text{και } x_1>0\end{array}\right\}\to x_1\cdot\ln x_1<0\leftrightarrow -x_1\cdot\ln x_1>0\to\begin{cases}h(x_1)>0\\ \text{και } h(1)=1\end{cases}$$

Οπότε μπορώ να βρώ το σύνολο τιμών της h.

$$h((0,x_1]) \overset{h\uparrow}{=} (\lim_{x\to 0^+} h(x),\, h(x_1)] = (1,\ h(x_1)]$$

$$h([x_1,1]) \overset{h\downarrow}{=} [h(1),\, h(x_1)] = [1,\ h(x_1)]$$

$$h([1+\infty)) \overset{h\uparrow}{=} [h(1),\, \lim_{x\to +\infty} h(x)) = [1,\ +\infty)$$

Άρα $h((0,+\infty)) = [1,+\infty) \to h(x) > 0 \quad \forall x > 0$

Γ3.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)\cdot \eta\mu\,\frac{1}{h(x)-1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(h(x)-1) = 1-1 = 0$$

h(x) ≥1 ∀ x>0 με το ίσον να ισχύει για x =1 άρα h(x)-1 >0 ∀ x>0 κοντά στο 0

άρα $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{h(x)-1} = +\infty$

$$\left|g(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{h(x)-1}\right| \le |g(x)| \Leftrightarrow -|g(x)| \le g(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{h(x)-1} \le |g(x)|$$

$$\text{και}\quad \lim_{x\to 0^+}\left(-|g(x)|\right) = 0 = \lim_{x\to 0^+}|g(x)|$$

Άρα από Κ.Π. $\lim_{x\to\infty} g(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{h(x)-1} = 0$

Θέμα Δ

Δ1. $x(x^2+1)\cdot g'(x)+2x^2\cdot g(x)=x-1 \overset{:x>0}{\Leftrightarrow} (x^2+1)g'(x)+2xg(x)=1-\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow$

$\left((x^2+1)g(x)\right)' = \left(x-\ln x\right)' \to (x^2+1)g(x) = x\text{-}\ln x+C$

Και για x=1 $\quad 2\cdot 0 = 1 + C \Leftrightarrow C = -1$

άρα $g(x) = \dfrac{x-\ln x-1}{x^2+1} \quad , x > 0$

Θέτω $h(x)=x-\ln x-1,\ x>0,\ h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$ και $h'(x)>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1$

x	0		1	
h'		−	0	+
h		↘		↗

H h(x) έχει ολικό min στο 1 το h(1)=0
άρα $h(x) \ge h(1) \quad \forall x > 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x =1.

άρα $g(x)=\dfrac{h(x)}{x^2+1}\geq 0 \quad \forall x>0$.

Δ2. $\left.\begin{array}{l}(x^2+1)g(x)-(1-x)\ln(f(1))\geq 0 \quad \forall x>0 \\ \text{Θέτω } \ t(x)=(x^2+1)g(x)-(1-x)\cdot\ln f(1)\end{array}\right\} \rightarrow t(x)\geq 0 \quad \forall x>0 \text{ και } t(1)=0$

άρα $t(x)\geq t(1) \quad \forall x>0 \rightarrow$ η $t(x)$ έχει τ. min στο $1\in(0,+\infty)$ και $t(x)$ παραγωγίσιμη με

$t'(x)=2xg(x)+(x^2+1)g'(x)+\ln f(1)$ άρα από Θ.F :

$t'(1)=0 \Leftrightarrow \cancel{2g(1)}^{0}+\cancel{2g'(1)}^{0}+\ln f(1)=0 \Leftrightarrow \boxed{f(1)=1}$

η αρχική σχέση για x=1 : $2g'(1)+\cancel{2g^{0}(1)}=0 \Leftrightarrow g'(1)=0$

- $\int_{|f(-1)|}^{|f(-1)+2|} g(x)dx=0$ και $g(x)\geq 0 \quad \forall x>0$ χωρίς να είναι παντού μηδέν αφού μηδενίζεται μόνο για x=1 (από Δ1)

άρα $|f(-1)|=|f(-1)+2| \Leftrightarrow \cancel{f(-1)}=\cancel{f(-1)}+2 \Leftrightarrow 0=2$ αδ.

ή $f(-1)=-f(-1)-2 \Leftrightarrow 2f(-1)=-2 \Leftrightarrow \boxed{f(-1)=-1}$

2ος τρόπος :

Έστω G(x) μία παράγουσα της G(x) με $G'(x)=g(x)\geq 0 \quad \forall x\geq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x=1.

Τότε $\int_{|f(-1)|}^{|f(-1)+2|} g(x)dx=0 \Leftrightarrow [G(x)]_{|f(-1)|}^{|f(-1)+2|}=0 \Leftrightarrow$

$G(|f(-1)+2|)-G(|f(-1)|)=0 \Leftrightarrow G(|f(-1)+2|)=G(|f(-1)|) \underset{G'>0}{\overset{G\uparrow \text{αρα } 1-1}{\Leftrightarrow}}$ |f(-1)+2| = |f(-1)| κλπ.

Θδο η εξίσωση : f(x)+f ' (x)-x -1=0 έχει μ.τ.ρ στο (-1,1) πολλαπλασιάζω με e^x

: $e^x f(x)+e^x f'(x)-xe^x-e^x=0 \Leftrightarrow (e^x f(x)-xe^x)'=0$

Θέτω $\varphi(x)=e^x\cdot(f(x)-x)$, $\varphi(1)=\varphi(-1)=0$ και $\varphi(x)$ παραγωγίσιμη στο$[-1,1]$

άρα από Θ.R , υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-1,1):\varphi'(\xi)=0$.

Δ3. α)f παραγωγίσιμη στο [x,1] $\subseteq$ [-1,1] άρα από ΘΜΤ ,

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(x,1)$: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$

όμως $x<\xi_1<1 \xrightarrow[f\cup]{f'\uparrow} f'(x)<f'(\xi_1) \Leftrightarrow f'(x)<\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \overset{1-x>0}{\Leftrightarrow}$

$(1-x)f'(x)<f(1)-f(x) \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} (x-1)f'(x)>f(x)-f(1) \Leftrightarrow f(x)<f(1)+(x-1)f'(x)$

Η ισότητα ισχύει για x=1. Άρα $f(x)\le f(1)+(x-1)f'(x) \quad \forall(x) \quad \forall x\in[-1,1]$.

β) i)

$f(0)=f(-1)=-1$ και f παραγωγίσιμη στο $[-1,0]$ άρα απο Θ.R, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,0): f'(x_0)=0$

και $f'\uparrow$ στο $[-1,0]\to$ το x_0 μοναδική ρίζα της f'

x	-1		x_0		0
f'		−	0	+	
f		↙		↘	

Για $x<x_0 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x)<f'(x_0)$. Για $x>x_0 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x)>f'(x_0)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για} \quad -1<x<x_0 \xrightarrow{f\downarrow} f(-1)>f(x) \Leftrightarrow f(x)<-1 \\ \text{Για} \quad x_0<x<0 \xrightarrow{f\uparrow} f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<-1 \end{array}\right\} \to f(x)<-1 \quad \forall x\in[-1,0]$$

άρα $f(x)<0 \ \forall x\in[-1,0]$

ii) $E=\int_0^1|f(x)|dx=-\int_0^1 f(x)dx$ και απο Δ3 : $f(x)\le 1+(x-1)\cdot f'(x) \overset{\cdot f(x)<0}{\to}$

$f^2(x)\ge f(x)\cdot[1+(x-1)f'(x)] \Leftrightarrow f^2(x)\ge f(x)+(x-1)f'(x)\cdot f(x)$

$\Leftrightarrow f^2(x)-f(x)+(1-x)f'(x)\cdot f(x)\ge 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x=1

Άρα $\int_0^1\left(f^2(x)-f(x)+(1-x)\cdot f'(x)\cdot f(x)\right)dx>0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f^2(x)dx-\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1(1-x)\cdot f'(x)\cdot f(x)dx>0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f^2(x)dx+E+\int_0^1\dfrac{(1-x)}{2}\left(f^2(x)\right)'dx>0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f^2(x)dx+E+[\dfrac{1-x}{2}\cdot f^2(x)]_0^1-\int_0^1-\dfrac{1}{2}f^2(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f^2(x)dx+E-\dfrac{1}{2}f^2(0)+\dfrac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx>0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$

$2\int_0^1 f^2(x)dx+2E-1+\int_0^1 f^2(x)dx>0 \Leftrightarrow$

$3\int_0^1 f^2(x)dx>1-2E \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx>\dfrac{1-2E}{3}$