Αχ, πονεμένη μου συνάρτηση ολοκλήρωμα $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$!

Επιμέλεια: Μάκης Χατζόπουλος

1) Μια σύντομη αναδρομή…

Όλα ξεκίνησαν στις 17 Ιουνίου 2015 όταν ανακοινώθηκε η διδακτέα – εξεταστέα ύλη για τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου. Τότε διαπιστώθηκε ότι εκτός από το κεφάλαιο των μιγαδικών αριθμών αφαιρείται και η παραγώγιση της συνάρτησης ολοκλήρωσης! Υπενθυμίζουμε την **υπόδειξη – οδηγία:**

Υπόδειξη - οδηγία:
Διατυπώνεται χωρίς να αποδειχτεί η πρόταση:
«Αν $f:\Delta\to\mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα, είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε $\alpha\in\Delta$ η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f», και με τη βοήθεια αυτής αποδεικνύεται το Θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης.

Η εισαγωγή της συνάρτησης γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό.
Για το λόγο αυτό δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στην παραγώγιση της συνάρτησης και γενικότερα της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$.

Τότε αρκετοί συνάδελφοι, blog, forum και η ΕΜΕ είχαν διαμαρτυρηθεί για την αψυχολόγητη και χωρίς λογική απόφαση.

Κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2015 – 16 η ανησυχία των καθηγητών για το ποιες ασκήσεις είναι εντός και ποιες θα διδάξουν συνεχίστηκε, οι Σχολικοί Σύμβουλοι των μαθηματικών έστελνα συχνά ερωτήσεις προς το Ι.Ε.Π για να δωθούν συγκεκριμένες οδηγίες. Αποτέλεσμα όλων αυτών των ενεργειών είναι στις 18 Μαρτίου 2016 να ανακοινωθεί η αφαίρεση ΟΛΩΝ των ασκήσεων που περιέχουν τη συνάρτηση ολοκλήρωσης!!

Ας διαβάσουμε την νέα οδηγία:

«Η εισαγωγή της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για το λόγο αυτό δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στην παραγώγιση της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ και γενικότερα της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$.»

Επειδή διατυπώνονται ερωτήματα για το είδος των θεμάτων που αναφέρονται στη συγκεκριμένη συνάρτηση και προκειμένου να αποφευχθούν παρανοήσεις και *λανθασμένες ερμηνείες που θα οδηγήσουν σε μια άσκοπη «ασκησιολογία» και ως εκ τούτου σε απώλεια πολύτιμου διδακτικού χρόνου, ενημερώνουμε τους διδάσκοντες ότι:*

Από το περιεχόμενο της υπόδειξης –οδηγίας τόσο ως προς το σκοπό όσο και ως προς το πνεύμα που την διέπει καθώς και από το γεγονός ότι στο σχολικό εγχειρίδιο δεν περιλαμβάνονται άλλου είδους ασκήσεις, εκτός της παραγώγισης, που να αναφέρονται στη συγκεκριμένη συνάρτηση, προκύπτει ότι τίθενται εκτός εξέτασης ασκήσεις που αναφέρονται στη συνάρτηση $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ *και γενικότερα στη συνάρτηση* $\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt$.

Η δική μου εξήγηση είναι εξής:

Εγώ κρίνω ότι το Υπουργείο Παιδείας, το ΙΕΠ και οι φορείς που ασχολούνται με την ύλη, προσπαθούν με τον τρόπο τους να διευκολύνουν τον μαθητή από αυτό το είδος των ασκήσεων. Όμως έχει παρατηρηθεί ότι όποιο εδάφιο αφαιρείται από την ύλη πχ. διαφορικές εξισώσεις (παράγραφος 3.3) το βλέπουμε ως θέμα στις Πανελλαδικές εξετάσεις!

Αυτό συμβαίνει αφού άλλο επιτελείο αποφασίζει για την ύλη, άλλο όργανο ανακοινώνει την ύλη και άλλοι θέτουν τα θέματα!! Τρεις διαφορετικοί φορείς που ΔΕΝ συνεργάζονται απαραίτητα μεταξύ τους!

Οπότε ο φόβος των καθηγητών υφίσταται ότι κάποιο από τα θέματα που έμειναν εκτός εξεταστέας ύλης και υπό την μορφή οδηγίας, εμφανιστεί συγκαλυμμένο στις επόμενες Πανελλαδικές εξετάσεις…

2) Συμπέρασμα

Το Θεώρημα

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt\,,\ x \in \Delta,$$

είναι μια **παράγουσα** της f στο Δ, δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)\,,\ \text{για κάθε}\ x \in \Delta.$$

είναι **εντός** για την κατανόηση της θεωρίας και τη σύνδεσης με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αλλά ως εφαρμογή στις ασκήσεις είναι **εκτός**!

<u>Για παράδειγμα</u> δεν επιτρέπεται να μας ζητήσουν ασκήσεις του στυλ: $\left(\int_{0}^{x} \eta\mu^2 t dt\right)'$ ή $\left(\int_{0}^{x+1} \ln t dt\right)'$. Όμως, όποιος το χρησιμοποιήσει (αν του δοθεί η δυνατότητα) στις ασκήσεις τότε **ΔΕΝ αφαιρείται καμία μονάδα**!

3) Τελικά η συνάρτηση ολοκλήρωση είναι εκτός;

Όποιος έχει μελετήσει μαθηματικά γρήγορα αντιλαμβάνεται ότι να εξαιρέσεις μία έννοια δεν σημαίνει ότι έχεις απαλλαγή τελείως από αυτήν, όταν οι ρίζες της έννοιας παραμένουν εντός ύλης. Δηλαδή δεν μπορούμε να κόψουμε την έννοια της «αφαίρεσης πραγματικών αριθμών» όταν παραμένει εντός ύλης η πρόσθεση, αφού αντί να υπολογίσουμε το 8 – 5 θα το υπολογίζουμε ως εξής: Πόσο πρέπει να αυξήσουμε το 5 για να φτάσουμε το 8;

Έτσι και εδώ, δεν μπορεί να θεωρείται **εκτός** η συνάρτηση ολοκλήρωσης όταν είναι **εντός** η έννοια της αρχικής συνάρτησης! Είναι παραλογισμός!

Παρακάτω θα σας δείξουμε πώς οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου με μεταβλητό άκρο ολοκλήρωσης γίνονται εντός ύλης!!

4) Παράδοξα

Εντάξει τελικά δεν έχουμε συνάρτηση ολοκλήρωμα στις εξετάσεις, πάει τέλος σωστά;; Και εκεί που νομίζεις ότι όλα τελείωσαν σου θέτει την άσκηση:

Παράδοξο 1ο (ιδέα **Βασίλη Μαυροφρύδη**)

Αν για την συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι $\int_0^1 f(x)\,dx=1$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=1$

Σημείωση: Παρατηρείστε στην εκφώνηση ΔΕΝ υπάρχει μεταβλητό άκρο στο ολοκλήρωμα, άρα η άσκηση είναι εντός;

Λύση με περσινές γνώσεις:

Α΄ τρόπος: Θεωρούμε τη συνάρτηση ολοκλήρωμα $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\ \ x\in[0,1]$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής.

Β΄ τρόπος: Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στη συνάρτηση

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt-x,\ \ x\in[0,1]$$

Άρα οι λύσεις είναι εκτός; Όχι φυσικά…

Λύση με γενικότερες γνώσεις του σχ. βιβλίου (εκτός ύλης)!!

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού λογισμού (επειδή η f είναι συνεχής στο [0, 1], τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\xi)(\beta-\alpha)$.

Σημείωση: Στην ουσία είναι η λύση του α΄ τρόπου…

Λύση με φετινές γνώσεις (εντός ύλης)

Α΄ τρόπος: Έστω ότι για κάθε $x \in (0,1): f(x) \neq 1$ τότε η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x, \;\; x \in [0,1]$, η οποία είναι μη μηδενιζόμενη στο (0, 1) και συνεχής ως διαφορά συνεχών, άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Αποδεικνύουμε ότι η g είναι θετική (από συνέχεια) για κάθε $x \in [0,1]$.
Επειδή η g είναι συνεχής, μη αρνητική και όχι παντού μηδέν στο [0,1] έπεται ότι

$$\int_0^1 g(x)\,dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx > 1 \text{ άτοπο,}$$

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1): f(\xi) = 1$.

Β΄ τρόπος: Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού λογισμού (σχολικό βιβλίο σελίδα 334), αν G μια παράγουσα της f στο
[0, 1], τότε

$$\int_0^1 f(x)\,dx = G(1) - G(0) = 1$$

άρα

$$\frac{G(1)-G(0)}{1-0} = 1 \underset{G'(x)=f(x)}{\overset{\text{ΘΜΤ}}{\Rightarrow}} f'(\xi) = 1$$

Σημείωση: Υπάρχει περίπτωση, με όποιον τρόπο και να λύσεις την άσκηση να θεωρηθεί λάθος;

Παράδοξο 2ο (ιδέα Παύλου Τρύφωνα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (e-1)\cdot e^x, x \in \mathbb{R}$

(Σημείωση: Μια χαρά άσκηση μου φαίνεται, εντός ύλης!!)

Εδώ δείτε το παράδοξο και την άβολη θέση του καθηγητή όταν ο μαθητής κάνει τα εξής:

$f(x) = (e-1)\cdot e^x$ **(εντός ύλης)**

$f(x) = \left(\int_0^1 e^t\,dt\right)\cdot e^x$ **(εντός ύλης)**

$f(x) = \int_0^1 e^t \cdot e^x\,dt$ **(εντός ύλης)**

$f(x) = \int_0^1 e^{x+t}\,dt$ **(εντός ύλης)**

και αν θέσουμε $u = x + t$ τότε εύκολα βρίσκουμε ότι

$f(x) = \int_x^{x+1} e^u\,du$ **(εκτός ύλης)!!!**

5) Η απόδραση!!

Παρακάτω θα δείξουμε πως οι ασκήσεις με τη συνάρτηση ολοκλήρωμα μετατρέπονται εύκολα με τη βοήθεια των αρχικών συναρτήσεων. Δηλαδή πώς μπορούμε να αποδράσουμε από τη συνάρτηση ολοκλήρωση και να έχουμε έννοια που είναι εντός ύλης!

Οι παρακάτω οδηγίες τηρήθηκαν στη τροποποίηση των παλαιών θεμάτων εξετάσεων που είναι εκτός ύλης (η παραγώγιση της συνάρτησης Ολοκλήρωσης). Όλα τα ανασκευασμένα θέματα εξετάσεων μπορείτε να τα βρείτε στο βιβλίο της **lisari team (Οδηγός Προετοιμασίας για τις Πανελλαδικές Εξετάσεις).**

1ο Υποψήφιο θέμα εξετάσεων

Σημείωση: *(που μεταβλητό άκρο στα άκρα του ολοκληρώματος μετατρέπεται σε άσκηση χωρίς μεταβλητό άκρο με τη βοήθεια της αρχικής συνάρτησης)*

Πέρυσι με συνάρτηση ολοκλήρωμα:
Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)+\ln\left(1+e^{-x}\right)=\int_0^x \frac{f(t)}{1+e^t}\,dt+\ln 2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

όπου F είναι η αρχική συνάρτηση της $\frac{f(x)}{1+e^x}, x\in\mathbb{R}$ όπου $F(0)=0$.

1) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$

Φέτος, χωρίς συνάρτηση ολοκλήρωμα:
Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)+\ln\left(1+e^{-x}\right)=F(x)+\ln 2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

όπου F είναι η αρχική συνάρτηση της $\frac{f(x)}{1+e^x}, x\in\mathbb{R}$ όπου $F(0)=0$.

1) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$

2ο Θέμα εξετάσεων 2013 (διαγώνισμα 13 – Δ θέμα Πανελλαδικών εξετάσεων!

Θέμα 2013 (περσινή ύλη)
Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(t)-1}{t-1}dt$, $x\in(1,+\infty)$ και $\alpha>1$.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4) καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$. (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ2. Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ (μονάδες 3) και στη συνέχεια, να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6}g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6}g(u)du$ (μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ3. Η g είναι κυρτή.

Μονάδες 6

Δ4. Η εξίσωση $(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(\alpha)-1)(x-\alpha), x>1$ έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 4

Θέμα 2016 (με τη νέα ύλη!!)

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παράγουσα της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ με $x>1$.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ2. Η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την εξίσωση $F(3^x+1)+F(2^x+1)=F(e^x+1)+F(\pi^x+1)$ (μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ3. Η F είναι κυρτή

Μονάδες 6

Δ4. Υπάρχει $\xi\in(2,3)$ ώστε, $(2\xi^2-7\xi+5)F(\xi)=(\xi^2-5\xi+6)(1-f(\xi))$

Μονάδες 4

6) Προβληματισμοί

1) Άρα η συνάρτηση ολοκλήρωμα έχει βγει τελείως εκτός από την φετινή εξεταστέα ύλη όταν μπορεί να δοθεί άσκηση, χωρίς μεταβλητό άκρο και η λύση να μας παραπέμπει σε αυτήν (δες πρώτη άσκηση);;

2) Η αρχική συνάρτηση είναι εντός ύλης και η συνάρτηση ολοκλήρωση που είναι αυτή αρχική συνάρτηση είναι εκτός;

3) Η συνάρτηση ολοκλήρωσης είναι εκτός, γιατί ΔΕΝ αφαιρούσαν και την απόδειξη του Θεμελιώδες Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού και μπερδεύουν τους μαθητές πότε είναι γνωστό και πότε άγνωστο; Πότε επιτρέπεται να το χρησιμοποιούμε και πότε όχι;

4) Άρα οι ασκήσεις με μεταβλητό άκρο μετατρέπονται εύκολα σε αρχικές συναρτήσεις, οπότε τελικά τα καταφέραμε να αφαιρέσουμε την ύλη μας τη συνάρτηση ολοκλήρωμα;

5) Πολύ φοβάμαι ότι αν αυτή τη σκέψη την κοινοποιήσουμε τότε κινδυνεύει να αφαιρεθεί από την ύλη και η αρχική συνάρτηση! Δηλαδή ξηλώνουν την ύλη μέχρι να φτάσουν που;;

Ακολουθεί το β΄ μέρος που όλες οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου μετατρέπονται σε ασκήσεις εντός!!

<table>
<tr><th>Πριν…
(με συνάρτηση ολοκλήρωμα)</th><th>Μετά…
(με αρχική συνάρτηση)</th></tr>
<tr><td>ΕΦΑΡΜΟΓΗ /σελ. 335
Δίνεται η συνάρτηση
$F(x)=\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$
i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της F.
ii) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η F.</td><td>ΕΦΑΡΜΟΓΗ /σελ. 335
Δίνεται η $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ αρχική συνάρτηση της $\sqrt{x^2-1}$ με $F(1)=0$. Να μελετηθεί η F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .
(Επιπλέον μπορεί να ζητηθεί και η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της F)</td></tr>
</table>

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^2 (3x^2-2x+1)dx$ ii) $\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}dx$

iii) $\int_0^{\pi/2} (\text{συν}x-2\text{ημ}x)dx$ iv) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$.

2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 \frac{x^3+7x}{x^2+5}dx+2\int_2^1 \frac{x}{x^2+5}dx=\frac{3}{2}.$$

3. Να αποδείξετε ότι

$$2\int_\alpha^\beta f(x)f'(x)dx=(f(\beta))^2-(f(\alpha))^2 .$$

4. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0,0)$ και $B(1,1)$, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f'(x)dx$, εφόσον η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$.

<table>
<tr><td>Α5. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i) $F(x)=\int_1^{\text{συν}x}\sqrt{1-t^2}dt$

ii) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{\text{συν}\theta}{\theta}d\theta$</td><td>Α5. i) Αν $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ μια αρχική συνάρτηση της $\sqrt{1-x^2}$ τότε υπολογίστε την παράγωγο της $F(\text{συν}x)$.

ii) Αν $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια αρχική συνάρτηση της $\frac{\text{συν}x}{x}$ τότε υπολογίστε την παράγωγο της $-F(\sqrt{x})$</td></tr>
</table>

Α6. i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(1+\sqrt{2})$.

B1. Αν $\int_0^x tg(t)dt = x^4 + x^6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $g(1)$.	**B1.** Αν F η αρχική συνάρτηση της $xg(x)$ στο $\mathbb{R}$ και $F(x) = x^4 + x^6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $g(1)$. **(Επιπλέον ερώτημα: Αν η g είναι συνεχής τότε υπολογίστε το g (0))**
B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \int_x^{x+1} e^{συν2πt}dt$ είναι σταθερή.	**B2.** Να αποδείξετε ότι η αρχική συνάρτηση της $e^{συν2π(x+1)} - e^{συν2πx}$ είναι σταθερή. **(Διαφορετική εκφώνηση: Να δείξετε ότι $e^{συν2π(x+1)} - e^{συν2πx} = 0$)**
B3. Αν $f(x) = \int_0^{x-2} \frac{t}{e^t}dt$, να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.	**B3.** Αν $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αρχική συνάρτηση της $\frac{x}{e^x}$ με G(2)=0 να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της $f(x) = G(x-2)$. **(Επιπλέον ερώτημα: Αν G (3) = 2016, υπολογίστε τα διαστήματα κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f)**
B4. Αν $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$, να βρείτε την $F'(x)$.	**B4.** Αν G αρχική της f και $F(x) = x \cdot G(x)$, να βρείτε την $F'(x)$.
B5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε τον τύπο της.	**B5.** Δίνεται $G : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ αρχική της $\frac{1}{1+x^2}$ με G(1)=0. Αν $F(x) = G(x) + G\left(\frac{1}{x}\right)$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, να δείξετε ότι η F είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.
B6. Να βρείτε το $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2}dt$.	**B6.** Δίνεται $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αρχική της $\sqrt{5+x^2}$ με $G(2) = 0$, να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{G(2+x)}{x}$.

25/3/2016

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\displaystyle\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}[\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)\eta\mu x-\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)]dx$.

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_0^2 (x^2-|x-1|)dx$ ii) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, αν $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x\le 0\\ \eta\mu x, & 0<x\le\pi\end{cases}$

iii) $\int_0^3 |x^2-3x+2|\,dx$.

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ ii) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

iii) $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$ iv) $\int_0^{\pi/2} e^x\sigma\upsilon\nu 2x dx$.

10. Αν $I=\int_0^{\pi/2} x\eta\mu^2 x dx$, $J=\int_0^{\pi/2} x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$I+J$, $I-J$, I, J.

11. Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\pi}\big(f(x)+f''(x)\big)\eta\mu x dx=2 .$$

Αν $f(\pi)=1$, με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το $f(0)$.

12. Έστω οι συναρτήσεις f, g , με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ και $f'(\beta)=g'(\beta)$, να αποδείξετε ότι

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\big(f(x)g''(x)-f''(x)g(x)\big)dx=g'(\beta)(f(\beta)-g(\beta)) .$$

Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $u=\pi-x$ για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx$.

2. i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1}{x^2-1}dx$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\eta\mu x}dx$.

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int\frac{1}{(u+1)(u+2)}du$$

25/3/2016

και στη συνέχεια τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+1)(\eta\mu x+2)}dx$ ii) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)}dx$.

4. Αν $I_\nu = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2}dt$, $\nu \in \mathbb{N}$,

i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_\nu + I_{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_1, I_2.

Γ5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right)du$$

Γ5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

- φ αρχική συνάρτηση της f στο $\mathbb{R}$
- F αρχική συνάρτηση της φ
- G αρχική συνάρτηση της $xf(x)$
- $F(0)+G(0)=0$

τότε να αποδείξετε ότι

$$x\varphi(x)-G(x)=F(x)$$

(Επιπλέον ερώτημα: Να δείξετε ότι η xF(x) είναι αρχική της 2F(x) + G(x))

Γ6. Δίνεται η συνάρτηση

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt,$$

όπου $f(t) = \int_1^t \sqrt{u^2-1}du$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και F.

ii) Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

Γ6. Δίνεται η συνάρτηση $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ αρχική της $f(x)$.

Η $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ είναι αρχική συνάρτηση της $\sqrt{x^2-1}$.

Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[1,+\infty)$.

Γ7. Δίνονται τα ολοκληρώματα

$F(x) = \int_0^x e^t\sigma\upsilon\nu^2 t\,dt$

και $G(x) = \int_0^x e^t\eta\mu^2 t\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

i) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $F(x)+G(x)$ και $F(x)-G(x)$ και στη συνέχεια τα ολοκληρώματα $F(x)$ και $G(x)$.

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

Γ7. Δίνονται τα ολοκληρώματα

$I = \int_0^\pi e^t\sigma\upsilon\nu^2 t\,dt$ και $J = \int_0^\pi e^t\eta\mu^2 t\,dt$

i) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I+J$ και $I-J$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I και J

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$I = \int_\pi^{2\pi} e^t\sigma\upsilon\nu^2 t\,dt$ και $J = \int_\pi^{2\pi} e^t\eta\mu^2 t\,dt$

$\mathrm{I} = \int_{\pi}^{2\pi} e^t \sigma\upsilon\nu^2 t dt$ και $\mathrm{J} = \int_{\pi}^{2\pi} e^t \eta\mu^2 t dt$	

Γ8. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = 5$ χωρίζεται από την ευθεία $y = \alpha^2 + 1$, $\alpha > 0$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α.

Γ9. i) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$, $\lambda > 0$.

ii) Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι, ώστε $E(\lambda) = \frac{1}{2}$.

iii) Να βρεθούν τα $\lim_{\lambda \to 0} E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

Γ10. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

ii) Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$$

iii) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\varepsilon\varphi x > x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi}$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ και

β) $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}$.

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και

β) $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x} dx \leq 1$.