1ο ΘΕΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα [α,β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = n$.

Μονάδες 10

Α2. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις σαν *Σωστές (Σ)* ή *Λανθασμένες (Λ)*.

α) Αν f,g είναι δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση fg είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0)$.

γ) Μια συνάρτηση $f : A \to R$ είναι συνάρτηση ΄΄1-1΄΄ αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση.

ε) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 2+2+2+2+2

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} \ln(x+1) & ,x\geq 1 \\ e^x+\ln\alpha & ,x<1 \end{cases}$.

Β1. Να βρεθούν τα σύνολα $B_1=f\left([1,+\infty)\right)$ και $B_2=f\left((-\infty,1)\right)$.

Μονάδες 10

Β2. Να βρεθούν οι τιμές της θετικής παραμέτρου α ώστε η συνάρτηση f να είναι ''1 – 1''.

Μονάδες 5

Β3. Αν $\alpha\in\left(0,\frac{2}{e^e}\right]$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\alpha}{x}+\frac{3e^x-\alpha}{x+e}=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-e,0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει

$xf'(x)=\frac{1}{x^2+x}-2f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται

από το σημείο $A(1,\ln 2)$.

Γ1. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

Μονάδες 6

Γ2. Αν $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$ να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 7

Γ3. Έστω Μ σημείο της γραφικής παράστασης της f και οι αποστάσεις ΜΑ, ΜΒ από τους άξονες x΄x, y΄y αντίστοιχα. Αν η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/s, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ΜΑΟΒ όπου Ο η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το σημείο Α.

Μονάδες 5

Γ4. Αν Ε(t) το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = t και x = t + 1 για t > 0 να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\eta\mu\left(f(t)\right)E(t)\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R με τύπο $f(x)=e^{2x}-2x-1$.

Δ1. Να γίνει μελέτη μονοτονίας και ακρότατων τιμών της f.

Μονάδες 6

Δ2. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-f(-x)}{f(x)+f(-x)}$.

Μονάδες 5

Δ3. Έστω h, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο R με h΄ συνεχή στο R για τις οποίες γνωρίζουμε ότι h είναι κυρτή και η g είναι κοίλη,

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{g(x)+xh(x)}{x}\right)^2-2\frac{g(x)h(x)}{x}\right]=0 \text{ και } f\left(e^{2g(0)}-2g(0)-1\right)+f\left(h'(0)\right)=0.$$

Να δείξετε ότι $h(x)>g(x)$ για κάθε $x\neq 0$.

Μονάδες 9

Δ4. Να δείξετε ότι $\int_0^{\alpha}\left(xh'(x)+g(x)\right)dx>\alpha h(\alpha)$ για α >0.

Μονάδες 5

Επιμέλεια: Νασιόπουλος Στέργιος

Τομέας Μαθηματικών

ΟΡΟΣΗΜΟ Αθήνας