ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. Βιβλίο σελ. 194

Α2. Σχ. Βιβλίο σελ. 247

Α3. $\alpha - \Lambda \quad \beta - \Lambda \quad \gamma - \Lambda \quad \delta - \Lambda \quad \varepsilon - \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως λογαριθμική με $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Τότε $B_1=f\left([1,+\infty)\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[\ln 2,+\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως εκθετική με $f'(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$.

Τότε $B_2=f\left((-\infty,1)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\right)=(\ln\alpha,e+\ln\alpha)$.

Β2. Η συνάρτηση f είναι ΄΄1-1΄΄ αν $B_1\cap B_2=\varnothing$ δηλαδή

$e+\ln\alpha\le 2\Leftrightarrow \ln\left(\alpha e^e\right)\le\ln 2\Leftrightarrow \alpha\le\dfrac{2}{e^e}$. Άρα $\alpha\in\left(-\infty,\dfrac{2}{e^e}\right]$.

Β3. $\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{3e^x-\alpha}{x+e}=0\Leftrightarrow \alpha(x+e)+x\left(3e^x-\alpha\right)=0$.

Ορίζουμε συνάρτηση g στο [–e, 0] με τύπο $g(x)=\alpha(x+e)+x\left(3e^x-\alpha\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } [-e,0] \text{ ως πράξεις πολυων. − εκθ.} \\ g(0)g(-e)=\alpha e\left(3e^{-e}-\alpha\right)(-e)=-\alpha e^{2}\left(3e^{-e}-\alpha\right)<0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.B.}{\Rightarrow} \text{ υπάρχει τουλάχιστον}$$

ένα $x_0 \in (-e,0)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.

Διότι $0<\alpha \le \dfrac{2}{e^e} \Leftrightarrow -\dfrac{2}{e^e} \le -\alpha < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{e^e}-\dfrac{2}{e^e} \le \dfrac{3}{e^e}-\alpha < \dfrac{3}{e^e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^e} \le 3e^{-e}-\alpha < \dfrac{3}{e^e}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $xf'(x)=\dfrac{1}{x^2+x}-2f(x) \Leftrightarrow x^2f'(x)+2xf(x)=\dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow$

$$\left(x^2f(x)\right)'=\left(\ln(x+1)\right)' \Leftrightarrow x^2f(x)=\ln(x+1)+c$$

Επίσης $A(1,\ln 2)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=\ln 2 \Leftrightarrow \ln 2 + c = \ln 2 \Leftrightarrow c=0$.

Άρα $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο λογαρ. – πολυων. με $f'(x)=\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)'=\dfrac{\dfrac{x^2}{x+1}-2x\ln(x+1)}{x^4}=\dfrac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{x^3(x+1)}$.

Ορίζουμε συνάρτηση g στο $(0,+\infty)$ με τύπο $g(x)=x-2(x+1)\ln(x+1)$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις λογαρ. – πολυων. με

$g'(x)=\left(x-2(x+1)\ln(x+1)\right)'=-\left[1+2\ln(x+1)\right]<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Τότε $g\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\right)=(-\infty,0)$ διότι

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2(x+1)\ln(x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)\left(\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)\right)\right]=-\infty$$

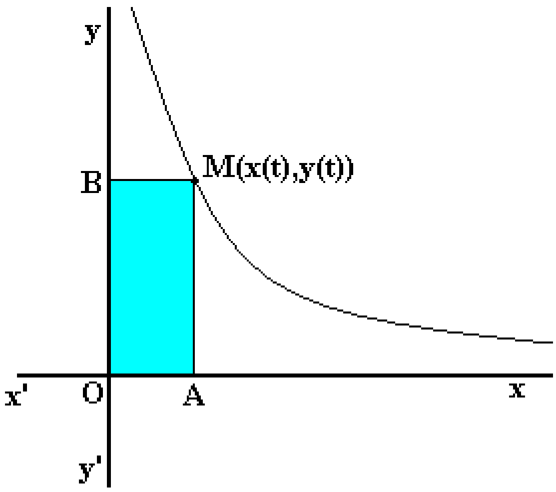
Άρα $g(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<0$ στο $(0,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Γ3. $(MAOB) = x(t)y(t) = E(t)$.

Τότε $E'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$.

Άρα $E'(t_0) = x'(t_0)y(t_0) + x(t_0)y'(t_0) \quad (1)$

όπου $x(t_0) = 1, \quad y(t_0) = \ln 2$



Τότε $y(t) = \dfrac{\ln(x(t)+1)}{x^2(t)}$

$$y'(t) = \frac{\dfrac{x'(t)x(t)}{x(t)+1} - 2x'(t)\ln\left(x(t)+1\right)}{x^3(t)}$$

$$y'(t_0) = \frac{\dfrac{x'(t_0)x(t_0)}{x(t_0)+1} - 2x'(t_0)\ln\left(x(t_0)+1\right)}{x^3(t_0)} = 1 - 4\ln 2 \text{ cm/s}$$

Από (1) έχουμε $E'(t_0) = 2 \text{ cm/s} \cdot \ln 2 + 1 - 4\ln 2 \text{ cm/s} = 1 - \ln 4 \text{ cm/s}$

Γ4. Έχουμε $E(t) = \displaystyle\int_t^{t+1} |f(x)|dx \overset{f(x)>0}{=} \int_t^{t+1} f(x)dx$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε $t \le x \le t+1 \Leftrightarrow f(t) \ge f(x) \ge f(t+1)$

Τότε $\displaystyle\int_t^{t+1} f(t)dx \ge \int_t^{t+1} f(x)dx \ge \int_t^{t+1} f(t+1)dx \Leftrightarrow f(t)\int_t^{t+1} dx \ge E(t) \ge f(t+1)\int_t^{t+1} dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(t) \ge E(t) \ge f(t+1)$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t+1)}{t^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2t(t+1)} = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t+1) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t+2)}{(t+1)^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2(t+2)(t+1)} = 0$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t) = 0$.

Τότε $|\eta\mu f(t)E(t)| \le |E(t)| \overset{E(t)>0}{\Leftrightarrow} -E(t) \le \eta\mu f(t)E(t) \le E(t)$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\eta\mu\left(f(t)\right)E(t)\right) = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά εκθετικής – πολυωνυμικής με $f'(x)=\left(e^{2x}-2x-1\right)'=2e^{2x}-2$.

Τότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{2x}=2 \Leftrightarrow x=0$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{2x}>2 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ϕ	$+$
f	↘	|	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και παρουσιάζει στη θέση $x_0=0$ ελάχιστο ίσο με $f(0)=0$.

Δ2. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-f(-x)}{f(x)+f(-x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-2x-1-e^{-2x}-2x+1}{e^{2x}-2x-1+e^{-2x}+2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{e^{2x}+e^{-2x}-2}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\left(1-e^{-x}-\dfrac{4x}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+e^{-4x}-\dfrac{2}{e^{2x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{e^{x}}-\dfrac{4x}{e^{2x}}}{1+\dfrac{1}{e^{4x}}-\dfrac{2}{e^{2x}}}=1$$

Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{e^{2x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{2e^{2x}}=0$.

Δ3. Επειδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή ίση με μηδέν στη θέση $x_0=0$ ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R$ και η ισότητα ισχύει για x = 0.

Άρα $f\left(e^{2g(0)}-2g(0)-1\right)+f\left(h'(0)\right)=0 \Leftrightarrow f\left(e^{2g(0)}-2g(0)-1\right)=f\left(h'(0)\right)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(g(0))=0 \\ h'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(0)=0 \\ h'(0)=0 \end{cases}$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to0}\left[\left(\dfrac{g(x)+xh(x)}{x}\right)^2-2\dfrac{g(x)h(x)}{x}\right]=0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{g^2(x)+2xg(x)h(x)+x^2h^2(x)-2xg(x)h(x)}{x^2}\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{g^2(x)}{x^2}+h^2(x)\right]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to0}\left[\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}\right)^2+h^2(x)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[g'(0)\right]^2+h^2(0)=0 \Leftrightarrow g'(0)=h(0)=0$$

Άρα ισχύει $\begin{cases} f(0)=g(0)=0 \\ h(0)=h'(0)=0 \end{cases}$ άρα οι C_g, C_h δέχονται στο $x_0=0$ κοινή εφαπτόμενη την $x=0$ και επειδή γνωρίζουμε ότι h είναι κυρτή και η g είναι κοίλη ισχύει $g(x)\le 0\le h(x)$ για κάθε $x\in R$ με ισότητα μόνο για $x_0=0$.

Άρα $h(x)>g(x)$ για κάθε $x\ne 0$.

Δ4. Έχουμε $\int_0^\alpha \left(xh'(x)+g(x)\right)dx=\int_0^\alpha xh'(x)dx+\int_0^\alpha g(x)dx=$

$$=\left[xh(x)\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha h(x)dx+\int_0^\alpha g(x)dx=$$

$$=\alpha h(\alpha)-\int_0^\alpha \left(h(x)-g(x)\right)dx<\alpha h(\alpha)$$

Διότι για $x\ge 0$ έχουμε $h(x)\ge g(x)$ άρα $\int_0^\alpha \left(h(x)-g(x)\right)dx>0$.

Επιμέλεια: Νασιόπουλος Στέργιος

Τομέας Μαθηματικών

ΟΡΟΣΗΜΟ Αθήνας