

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

➤ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

- Αρχή και Πέρας
- Φορέας
- Διεύθυνση (Συγγραμμικά διανύσματα)
- Μέτρο
- Κατεύθυνση (Ομόρροπα – Αντίρροπα διανύσματα)

➤ ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$$0^\circ \leq (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq 180^\circ$$

➤ ΙΣΑΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΑΝΤΙΘΕΤΑΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \quad \text{ορισμός} \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta} \\ \text{και} \\ |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \end{array} \right. \quad \vec{\alpha} = -\vec{\beta} \quad \text{ορισμός} \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\alpha} \nearrow \swarrow \vec{\beta} \\ \text{και} \\ |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \end{array} \right.$$

➤ ΑΘΡΟΙΣΜΑ– ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

- Με κανόνα παραλληλογράμμου
- Με διαδοχική τοποθέτηση

Δύο σπουδαίοι κανόνες για το άθροισμα και τη διαφορά διανυσμάτων

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB}$$

➤ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΠΙΔΙΑΝΥΣΜΑ

$$\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Αν } \lambda > 0 \text{ τότε } \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \\ \text{Αν } \lambda < 0 \text{ τότε } \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \end{cases}$$

και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$

➤ ΜΕΣΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

$$M \text{ μέσο του } AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

➤ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ & ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

$$\vec{\alpha} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = (x, y) \quad \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$$M \text{ μέσο } AB \Leftrightarrow M \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

➤ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{όπου } \vec{\alpha} = (x_1, y_1)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

➤ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

$$\text{Αν } \vec{\alpha} = (x_1, y_1) \quad x_1 \neq 0 \quad \text{τότε ορίζεται } \lambda = \varepsilon\varphi\omega = \frac{y_1}{x_1}$$

➤ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\hat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) \quad \text{και} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{\alpha} = (x_1, y_1) \\ \vec{\beta} = (x_2, y_2) \end{array} \right\} \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

➤ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

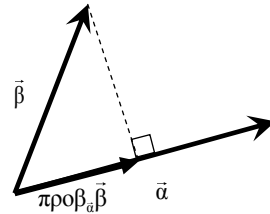
$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{\alpha} \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \\ \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}} \quad (\text{όταν ορίζονται}) \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{\alpha} + \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta} \\ \vec{\alpha} + \vec{\beta} = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \nearrow \swarrow \vec{\beta} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \text{με } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$$

➤ **ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ**

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \\ \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1 \text{ (όταν ορίζονται)} \end{cases}$$

➤ **ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ**

$$\begin{aligned} \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} & // \vec{\alpha} \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} \end{aligned}$$



ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

➤ **ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ**

- Η ευθεία ε σχηματίζει με τον $\chi\chi$ γωνία ω : $\lambda_{\varepsilon} = \varepsilon\varphi\omega, \quad \omega \neq \frac{\pi}{2}$
- Η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία A, B : $\lambda_{\varepsilon} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \quad x_A \neq x_B$
- Η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία ζ : $\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\zeta}$
- Η ευθεία ε είναι κάθετη στην ευθεία ζ : $\lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\zeta} = -1$

➤ **ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ**

- 1^η Μορφή: Ευθεία ε διέρχεται από σημείο $A(x_A, y_A)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ_{ε} .

$$\varepsilon: y - y_A = \lambda_{\varepsilon} \cdot (x - x_A)$$

- 2^η Μορφή: Ευθεία ε διέρχεται από σημείο $A(x_A, y_A)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $\psi\psi$, δηλαδή δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης λ_{ε} .

$$\varepsilon: x = x_A$$

- 3^η Μορφή: Ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ_ε .

$$\varepsilon: y = \lambda_\varepsilon x + \beta$$

Ειδικές Μορφές:

- Αξονας τετμημένων: $x'x: y = 0$
- Αξονας τεταγμένων: $y'y: x = 0$
- Ευθεία παράλληλη στον $x'x$: $\varepsilon: y = c \quad c \in \mathbb{R}$
- Ευθεία παράλληλη στον $y'y$: $\varepsilon: x = c \quad c \in \mathbb{R}$
- Ευθεία που διέρχεται από το O : $\varepsilon: y = \lambda x$
- Διχοτόμος $1^{\text{ης}}$ γωνίας αξόνων: $\varepsilon: y = x$
- Διχοτόμος $2^{\text{ης}}$ γωνίας αξόνων: $\varepsilon: y = -x$

- 4^η Μορφή: Ευθεία ε έχει γενική εξίσωση.

$$\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$$

- Συντελεστής διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B}$ όταν $B \neq 0$
- Παράλληλο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$
- Κάθετο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$
- Απόσταση σημείου $K(x_K, y_K)$ από την ευθεία ε

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|A \cdot x_K + B \cdot y_K + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Βρίσκουμε την απόσταση τυχαίου σημείου K της ε_1 από την ε_2 .

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(K, \varepsilon_2)$$

$$\text{ή αν } \begin{cases} \varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1 \\ \varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2 \end{cases} \quad \text{τότε} \quad d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

- Εξίσωση Μεσοπαράλληλης δύο παραλλήλων ευθειών και εξισώσεις διχοτόμων των γωνιών δύο τεμνομένων ευθειών.

Θεωρούμε και στις δύο περιπτώσεις το γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει:

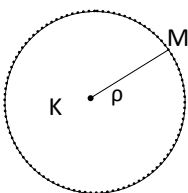
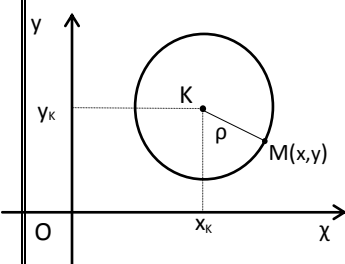
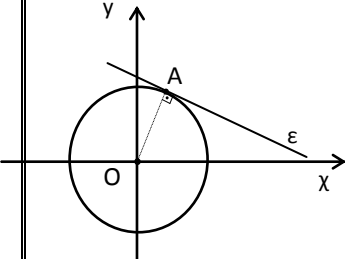
$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

➤ ΕΜΒΛΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

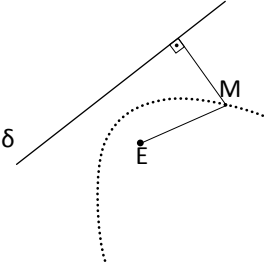
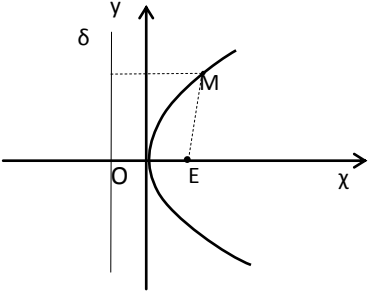
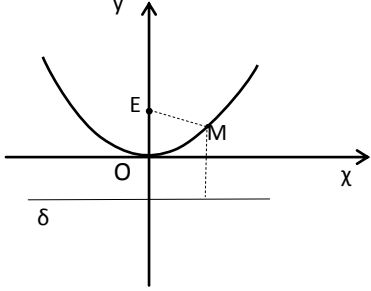
$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AG} \end{pmatrix} \right|$$

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

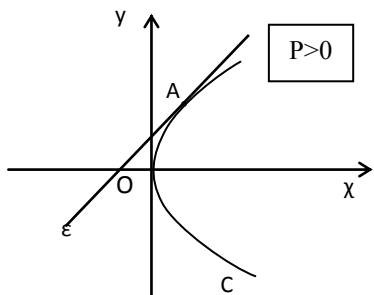
ΚΥΚΛΟΣ

 	<u>Ορισμός:</u> Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία είναι $(KM)=\rho$ <u>Εξίσωση (μορφή 1^η):</u> $C: (x-x_K)^2 + (y-y_K)^2 = \rho^2$ Κέντρο: $K(x_K, y_K)$ Ακτίνα: ρ <u>Εξίσωση (μορφή 2^η):</u> $C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ • Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει τον κύκλο με Κέντρο: $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ Ακτίνα: $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$ • Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ παριστάνει ένα σημείο το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ • Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ δεν παριστάνει τίποτα
	<u>Εφαπτομένη Κύκλου</u> Εξίσωση Κύκλου (με κέντρο O) $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ <u>Εξίσωση Εφαπτομένης στο σημείο A</u> $\epsilon: x_A \cdot x + y_A \cdot y = \rho^2$

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

	<u>Ορισμός:</u> Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο E (Εστία) και από μια σταθερή ευθεία δ (διευθετούσα). Δηλαδή: $(ME) = d(M, \delta)$
	<u>Εξίσωση (μορφή 1^η):</u> $C: y^2 = 2 \cdot \rho \cdot x$ Συμμετρίας Άξονας : $x'x$ Κορυφή: $O(0,0)$ Εστία : $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$ Διευθετούσα: $\delta: x = -\frac{\rho}{2}$
	<u>Εξίσωση (μορφή 2^η):</u> $C: x^2 = 2 \cdot \rho \cdot y$ Συμμετρίας Άξονας : $y'y$ Κορυφή: $O(0,0)$ Εστία : $E\left(0, \frac{\rho}{2}\right)$ Διευθετούσα: $\delta: y = -\frac{\rho}{2}$

Εφαπτομένη Παραβολής

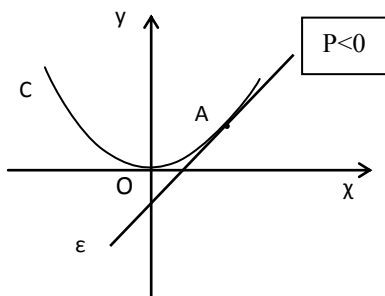


Εξίσωση Παραβολής (με άξονα συμμετρίας $x'x$)

$$C: y^2 = 2 \cdot \rho \cdot x$$

Εξίσωση Εφαπτομένης στο σημείο A

$$\varepsilon: y_A \cdot y = \rho \cdot (x + x_A)$$



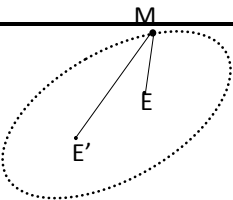
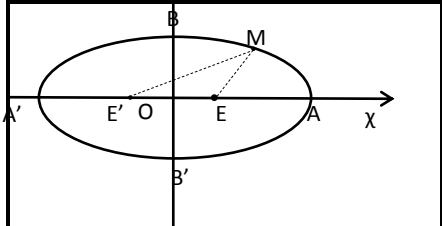
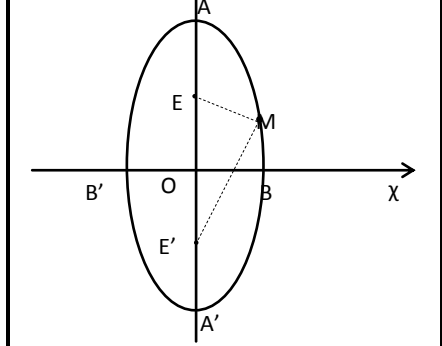
Εξίσωση Παραβολής (με άξονα $y'y$)

$$C: x^2 = 2 \cdot \rho \cdot y$$

Εξίσωση Εφαπτομένης στο σημείο A

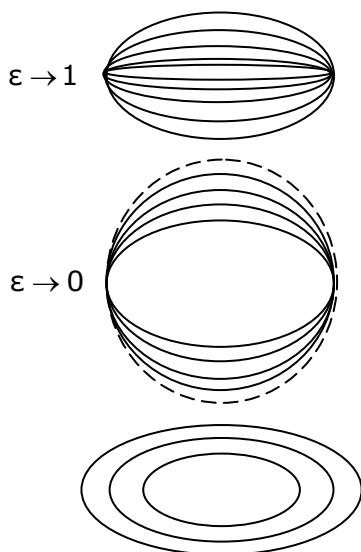
$$\varepsilon: x_A \cdot x = \rho \cdot (y + y_A)$$

ΕΛΛΕΙΨΗ

	<u>Ορισμός:</u> Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου, που το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία Ε, Ε' είναι σταθερό και μεγαλύτερο του (ΕΕ'). Δηλαδή $(ME) + (ME') = 2 \cdot \alpha$ $(EE') = 2 \cdot \gamma \quad \mu\epsilon \quad \gamma < \alpha$
	<u>Εξίσωση (μορφή 1^η):</u> $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \alpha > \beta$ Μεγάλος Άξονας : $(AA') = 2 \cdot \alpha$ Μικρός Άξονας : $(BB') = 2 \cdot \beta$ Εστίες : $E(\gamma, 0), E'(-\gamma, 0)$ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ Κέντρο : $O(0,0)$ Κορυφές: $A(\alpha, 0), A'(-\alpha, 0)$ $B(0, \beta), B'(0, -\beta)$
	<u>Εξίσωση (μορφή 2^η):</u> $C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \quad \alpha > \beta$ Μεγάλος Άξονας: $(AA') = 2 \cdot \alpha$ Μικρός Άξονας : $(BB') = 2 \cdot \beta$ Εστίες : $E(0, \gamma), E'(0, -\gamma)$ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ Κέντρο : $O(0,0)$ Κορυφές: $A(0, \alpha), A'(0, -\alpha)$ $B(\beta, 0), B'(-\beta, 0)$

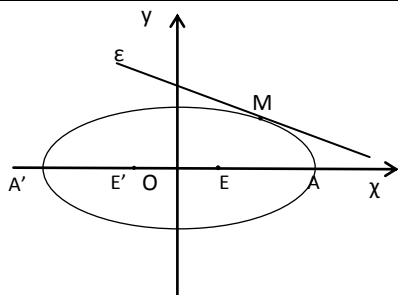
Εκκεντρότητα Έλλειψης

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$



- Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα, τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη. Έτσι όταν η εκκεντρότητα ε παίρνει τιμές κοντά στο 1, η έλλειψη εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα.
- Όταν η εκκεντρότητα ε παίρνει τιμές κοντά στο 0, η έλλειψη μοιάζει με κύκλο.
- Ελλείψεις με την ίδια εκκεντρότητα λέγονται **όμοιες**.

Εφαπτομένη Έλλειψης

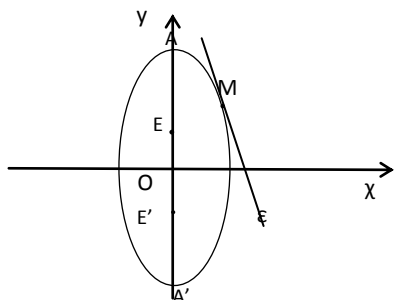


Εξίσωση έλλειψης

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Εξίσωση Εφαπτομένης στο σημείο M

$$\varepsilon: \frac{x_M \cdot x}{\alpha^2} + \frac{y_M \cdot y}{\beta^2} = 1$$



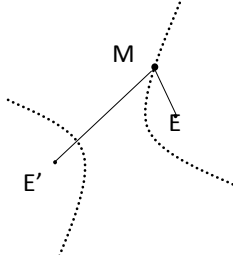
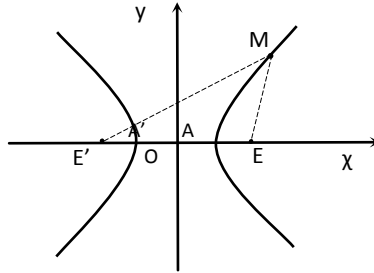
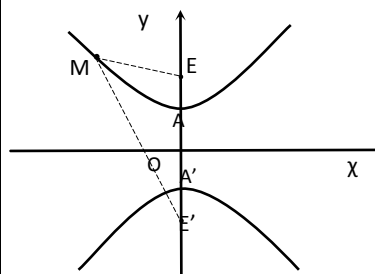
Εξίσωση έλλειψης

$$C: \frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

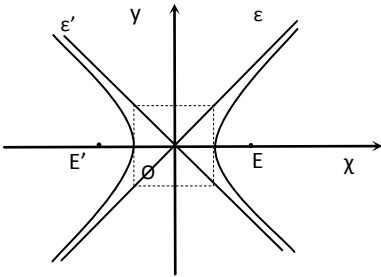
Εξίσωση Εφαπτομένης στο σημείο M

$$\varepsilon: \frac{y_M \cdot y}{\alpha^2} + \frac{x_M \cdot x}{\beta^2} = 1$$

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

	<u>Ορισμός:</u> Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου, που η απόλυτη διαφορά των αποστάσεων από τα σημεία Ε, Ε' είναι σταθερή και μικρότερη του (ΕΕ'). Δηλαδή $ (ME) - (ME') = 2 \cdot \alpha$ $(EE') = 2 \cdot \gamma \quad \text{με} \quad \gamma > \alpha$
	<u>Εξίσωση (μορφή 1^η):</u> $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ Μεγάλος Άξονας : $(AA') = 2 \cdot \alpha$ Εστίες : $E(\gamma, 0), E'(-\gamma, 0)$ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ Κέντρο : $O(0,0)$ Κορυφές: $A(\alpha, 0), A'(-\alpha, 0)$ $B(0, \beta), B'(0, -\beta)$
	<u>Εξίσωση (μορφή 2^η):</u> $C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ Μεγάλος Άξονας: $(AA') = 2 \cdot \alpha$ Εστίες : $E(0, \gamma), E'(0, -\gamma)$ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ Κέντρο : $O(0,0)$ Κορυφές: $A(0, \alpha), A'(0, -\alpha)$ $B(\beta, 0), B'(-\beta, 0)$

Ασύμπτωτες Υπερβολής



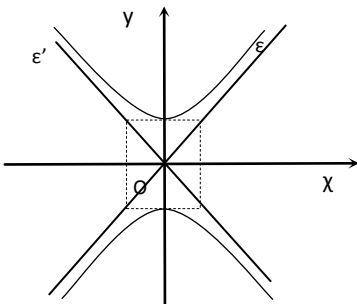
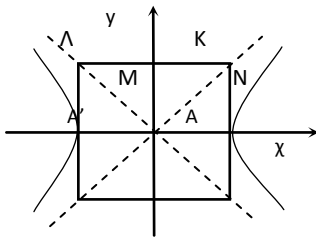
Εξίσωση έλλειψης

$$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Εξίσωση Ασυμπτωτών Ευθειών

$$\varepsilon: y = \frac{b}{a} \cdot x \quad \varepsilon': y = -\frac{b}{a} \cdot x$$

Ορθογώνιο βάσης της υπερβολής είναι το ορθογώνιο που οι κορυφές του είναι $K(a, b)$, $\Lambda(a, -b)$, $M(-a, -b)$, $N(-a, b)$.



Εξίσωση έλλειψης

$$C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Εξίσωση Ασυμπτωτών Ευθειών

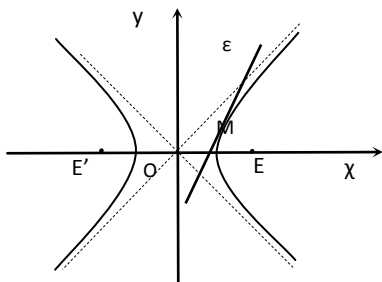
$$\varepsilon: y = \frac{a}{b} \cdot x \quad \varepsilon': y = -\frac{a}{b} \cdot x$$

Εκκεντρότητα Υπερβολής

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \varepsilon > 1 \quad \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

- Όσο μικραίνει η εκκεντρότητα ε και παίρνει τιμές κοντά στο 1, τόσο πιο κλειστοί είναι οι δύο κλάδοι της υπερβολής.
- Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα ε , τόσο πιο ανοικτοί είναι οι δύο κλάδοι της υπερβολής.

Εφαπτομένη Υπερβολής

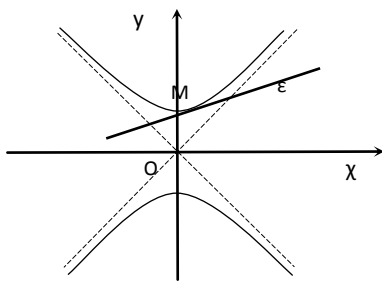


Εξίσωση έλλειψης

$$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Εξίσωση Εφαπτομένης στο σημείο M

$$\epsilon: \frac{x_M \cdot x}{a^2} - \frac{y_M \cdot y}{\beta^2} = 1$$



Εξίσωση έλλειψης

$$C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

Εξίσωση Εφαπτομένης στο σημείο M

$$\epsilon: \frac{y_M \cdot y}{a^2} - \frac{x_M \cdot x}{\beta^2} = 1$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

A. Επιλέξτε Σωστό ή Λάθος στα παρακάτω:

1) Αν A, B, Γ, Δ σημεία του επιπέδου τότε:

(i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$

(ii) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Delta}$

(iii) $\overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma \Delta} = \overrightarrow{\Delta B}$ (iv) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta}| = |\overrightarrow{\Delta A}|$

2) Αν $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ με $\lambda \in (-1, 0)$ τότε

(i) Το M βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και B.

(ii) Είναι $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}$ συγγραμμικά.

(iii) Είναι $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ αντίρροπα.

3) Αν $\vec{\alpha} = \vec{i} + 2\vec{j}$ τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{5}$.

4) Τα $\vec{\alpha} = (-4\kappa, 2\mu), \vec{\beta} = (2\kappa, -\mu)$ είναι παράλληλα.

5) Αν $\vec{\alpha} = (-3, 1), \vec{\beta} = (-3, -1), \vec{\gamma} = (2, -6)$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

6) Το σημείο $M(2, -4)$ είναι μέσο του AB όπου $A(3, -5)$ και $B(1, 3)$.

7) Αν $A(-2, 5)$ και $B(1, 6)$ τότε $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

8) Αν $A(4, 0)$ και $B(-5, 3)$ τότε $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{10}$.

9) Αν $\vec{\alpha} = \vec{i} + 2\vec{j}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{i} = 1$.

10) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, τότε είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

11) Ισχύει ότι $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$

- 12) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
- 13) Ισχύει ότι: $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
- 14) Για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 15) Για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}$.

B. Συμπληρώστε τις παρακάτω ισότητες:

- 1) Αν A, B, Γ, Δ σημεία του επιπέδου τότε:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} &= \dots & \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{\Gamma A} &= \dots & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \dots &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma} &= \dots & \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} &= -\dots & \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{\Gamma A} &= \dots - \overrightarrow{\Delta B} \end{aligned}$$

- 2) Αν ABΓ τρίγωνο και M, E μέσα των BΓ, AΓ αντίστοιχα τότε:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} &= \dots & \text{(ii)} \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} &= \dots \\ \text{(iii)} \quad \overrightarrow{ME} &= \frac{1}{2} \cdot (\dots + \dots) & \text{(iv)} \quad \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} &= \dots \end{aligned}$$

- 3) Αν A(2,-4), B(5,0), Γ(2,1), Δ(0,-2) και O(0,0) τότε:

- (i) Το μέσο του τμήματος AΓ έχει συντεταγμένες $(\dots, \dots)$
- (ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης του $\overrightarrow{OB}$ είναι $\lambda = \dots$
- (iii) Το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ έχει συντεταγμένες $(\dots, \dots)$
- (iv) Ο συντελεστής διεύθυνσης του $\overrightarrow{A\Gamma}$
- (v) Το μέτρο του $\overrightarrow{B\Delta}$ είναι $|\overrightarrow{B\Delta}| = \dots$
- (vi) Αν $\overrightarrow{AK} + 3 \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \vec{0}$ τότε $\overrightarrow{OK} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$
- (vii) Ο συντελεστής διεύθυνσης του $\overrightarrow{AB}$ είναι $\lambda = \dots$

Δ. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω πίνακες:

Διάνυσμα	Μέτρο	Συντελεστής Διεύθυνσης	Γωνία με x'x
$\vec{\alpha} = (-1, 1)$			
$\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 1)$			
$\vec{\gamma} = (3\sqrt{3}, -3)$			
$\vec{\delta} = (-1, -\sqrt{3})$			
$\vec{\varepsilon} = (2, 0)$			
$\vec{\zeta} = (0, \sqrt{3})$			

Ε. Αντιστοιχίστε κάθε σχέση της 1^{ης} στήλης με μία μόνο σχέση της 2^{ης} στήλης:

1 ^η Στήλη		2 ^η Στήλη	
$\lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$	1	α	$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $
$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$	2	β	$2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $
$\vec{\alpha} // \vec{\beta}$	3	γ	$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$
$\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$	4	δ	$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$
$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pi$	5	ε	$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $

1 ^η Στήλη					
2 ^η Στήλη					

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

A. Επιλέξτε Σωστό ή Λάθος στα παρακάτω:

- 1) Η ευθεία που περνά από τα $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \gamma)$, έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν.
- 2) Οι ευθείες με εξισώσεις $y = -\lambda x$ και $y = \frac{1}{\lambda}x$, $\lambda \neq 0$, είναι πάντοτε κάθετες.
- 3) Οι ευθείες με εξισώσεις $y = 3x + 1$, $3x - y = 4$ είναι παράλληλες.
- 4) Τα σημεία $A(\kappa, \alpha)$, $B(\lambda, \alpha)$, $\Gamma(\mu, \alpha)$, είναι συνευθειακά.
- 5) Από το σημείο $A(\alpha, \beta)$, περνά μία μόνο ευθεία με δεδομένο συντελεστή διεύθυνσης.
- 6) Η ευθεία $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, με $\alpha, \beta \neq 0$, τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$.
- 7) Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $\varepsilon: 3x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ με τον άξονα xx' , είναι 120° .
- 8) Αν $A \neq B$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, αντιστοιχεί πάντοτε σε ευθείας.
- 9) Στην ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, αν $B = 0$.
- 10) Η ευθεία που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$, μπορεί να έχει εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$.
- 11) Η $y = \alpha^2 x + 1$, $\alpha \neq 0$, σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα xx' .
- 12) Η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + 3$, έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα xx' , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 13) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2, 1)$ αντιστοιχούν στην εξίσωση $\lambda x - y + 1 - 2\lambda = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 14) Η εξίσωση $xy = x$, παριστάνει μία μόνο ευθεία.
- 15) Η εξίσωση $y = x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, παριστάνει οικογένεια ευθειών, παράλληλων προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$.
- 16) Η εξίσωση της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$, μπορεί να γραφεί με την μορφή $\vec{\delta} \cdot \vec{u} + \Gamma = 0$, όπου $\vec{\delta} = (A, B)$ και $\vec{u} = (x, y)$.
- 17) Αν $A(x_A, y_A)$ τότε ισχύει ότι $d(A, x'x) = |y_A|$.
- 18) Αν A, B, Γ είναι τρία σημεία του επιπέδου και $(AB\Gamma)$ το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = (AB\Gamma)$.
- 19) Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο τότε $(AB\Gamma\Delta) = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta})|$

B. Επιλέξτε την σωστή απάντηση στα παρακάτω:

- 1) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, \beta)$ και $B(\gamma, \delta)$, ορίζεται πάντοτε, όταν
 (α) $\beta \neq \delta$ (β) $\alpha = \gamma$ και $\beta \neq \delta$ (γ) $\alpha \neq -\gamma$ και $\beta \neq \delta$ (δ) $\alpha \neq \gamma$
- 2) Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, παριστάνει πάντα ευθεία όταν
 (α) $A = B = 0$ (β) $A = 0$ και $\Gamma \neq 0$
 (γ) $A^2 + B^2 \geq 0$ (δ) $|A| + |B| < 0$ (ε) $|A| + |B| \neq 0$
- 3) Αν δύο ευθείες τέμνονται τότε το σύστημα των εξισώσεων τους έχει για λύσεις
 (α) άπειρες (β) μία (γ) δύο
 (δ) καμία (ε) άπειρες
- 4) Η εξίσωση $y^2 = x^2$, παριστάνει
 (α) ευθεία που είναι κάθετη στον $\chi\chi'$ (β) ευθεία που είναι κάθετη στον $\psi\psi'$
 (γ) δύο ευθείες παράλληλες (δ) δύο ευθείες κάθετες.

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

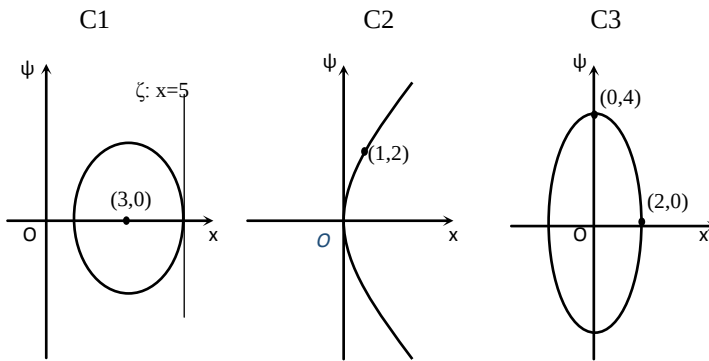
A. Επιλέξτε Σωστό ή Λάθος στα παρακάτω:

- 1) Το σημείο $(1, -1)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$.
- 2) Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$, εφάπτονται.
- 3) Η ευθεία $\varepsilon: x = 4$ εφάπτεται του κύκλου $\varsigma: x^2 + y^2 = 16$.
- 4) Οι κύκλοι $\varsigma_1: x^2 + (y - 1)^2 = 9$, $\varsigma_2: x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ είναι ίσοι.
- 5) Η παραβολή με εστία το σημείο $(0, 8)$ και διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση $\psi = -8$ έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$.
- 6) Η εξίσωση $x^2 = 8\psi$ αντιστοιχεί σε παραβολή που έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$.
- 7) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$, $\lambda \neq 0$ αντιστοιχεί σε κύκλο.
- 8) Η εξίσωση $x^2 - \psi^2 = 3$ αντιστοιχεί σε ισοσκελή υπερβολή.
- 9) Ο κύκλος που έχει κέντρο το $K(2, -4)$ και ακτίνα $\rho = 1$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$.
- 10) Το διάνυσμα $\vec{r} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ είναι παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 2$.

11) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ αντιστοιχεί σε κύκλο.

12) Η εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \frac{\psi^2}{16} = 1$ αντιστοιχεί σε έλλειψη εκκεντρότητας $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Β. Γράψτε για κάθε μια από τις παρακάτω καμπύλες C_1, C_2, C_3, C_4 την αντίστοιχη εξίσωση, σύμφωνα με τα στοιχεία που αναφέρονται σε αυτές.



Γ. Να αναγνωρίσετε τις καμπύλες που εκφράζουν οι παρακάτω εξισώσεις και να γράψετε σε καθεμιά τα αντίστοιχα βασικά στοιχεία της.

(π.χ. κύκλο: κέντρο-ακτίνα, έλλειψη: εστίες-άξονες-εκκεντρότητα, παραβολή: εστία-διευθετούσα, υπερβολή: εστίες-εκκεντρότητα-ασύμπτωτες).

(α) $\frac{x^2}{5} + \frac{\psi^2}{9} = 1$

(β) $x^2 + \psi^2 - 2x = 5$

(γ) $\psi^2 = 16 \cdot x$

(δ) $x^2 - 4\psi^2 = 4$

(ε) $2x^2 + 2\psi^2 - 4x + 8\psi + 2 = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Σε τρίγωνο OAB είναι $|\overrightarrow{OA}|=2$, $|\overrightarrow{OB}|=4$ και $\angle AOB=60^\circ$. Αν το M είναι το μέσο της πλευράς AB , να υπολογισθεί το συνημίτονο της γωνίας $\angle AOM$.

Λύση:

Η ζητούμενη γωνία είναι η γωνία των $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$.

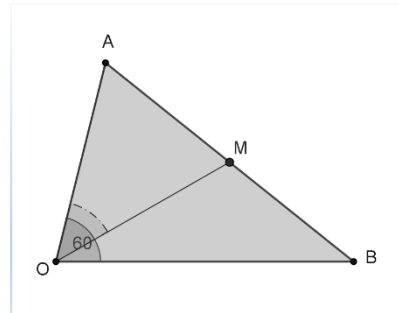
$$\text{Έτσι } \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OM}|} \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \quad \text{και}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

Τότε

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \cdot \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 4) = 4 \quad (2)$$



$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OM}|^2 &= \overrightarrow{OM}^2 = \left(\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2) = \\ &= \frac{1}{4} (4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 16) = 9 \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή } |\overrightarrow{OM}| = 3 \quad (3)$$

$$\text{Από την σχέση (1) λόγω των (2), (3) παίρνουμε: } \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-5,4)$, $B(-1,6)$, $\Gamma(4,1)$ και σημείο M της πλευράς AB έτσι ώστε $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$.

(α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

(β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M .

- (γ) Αν είναι $M\left(-4, \frac{9}{2}\right)$, να προσδιορισθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ , M .

Λύση:

(α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (-1 - (-5), 6 - 4) = (4, 2)$

(β) Είναι $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = (x_M + 5, y_M - 4)$ και έτσι

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x_M + 5, y_M - 4) = \frac{1}{4} (4, 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_M + 5, y_M - 4) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M + 5 = 1 \quad \text{και} \quad y_M - 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M = -4 \quad \text{και} \quad y_M = \frac{9}{2}$$

Άρα $M\left(-4, \frac{9}{2}\right)$.

- (γ) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Γ , M έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{\Gamma M} = \frac{y_M - y_\Gamma}{x_M - x_\Gamma} = \frac{\frac{9}{2} - 1}{-4 - 4} = \frac{7}{-16}$$

και έτσι η εξίσωση της είναι:

$$\Gamma M: y - y_\Gamma = \lambda_{\Gamma M} (x - x_\Gamma) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{7}{-16} (x - 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x + 16y - 44 = 0$$

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$.

- (α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

- (β) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

Λύση:

- (α) Είναι $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}$. Έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot (\lambda \vec{\beta}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \quad (1)\end{aligned}$$

Επειδή είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$ και $\vec{\beta}^2 = |\vec{\beta}|^2 = (\sqrt{1+4})^2 = 5$ η σχέση (1) δίνει

$$\lambda = \frac{11}{5} \quad \text{και} \quad \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{11}{5} \cdot \vec{\beta} = \frac{11}{5} \cdot (1, 2) = \left(\frac{11}{5}, \frac{22}{5}\right)$$

$$\text{Άρα} \quad \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \left(\frac{11}{5}, \frac{22}{5}\right)$$

(β) Έστω τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{w}$ είναι οι δύο ζητούμενες κάθετες συνιστώσες. Τότε είναι

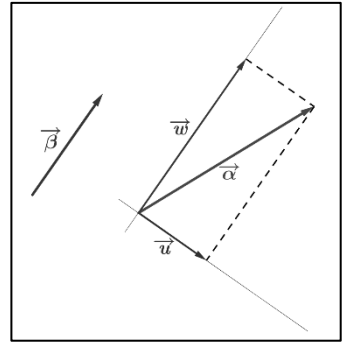
$$\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{w} \quad \text{και} \quad \vec{w} = \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}$$

Έτσι από το (α) ερώτημα:

$$\vec{w} = \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \left(\frac{11}{5}, \frac{22}{5}\right)$$

Τότε

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{w} &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{w} = (3, 4) - \left(\frac{11}{5}, \frac{22}{5}\right) = \\ &= \left(3 - \frac{11}{5}, 4 - \frac{22}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)\end{aligned}$$



$$\text{Άρα οι ζητούμενες συνιστώσες είναι} \quad \vec{w} = \left(\frac{11}{5}, \frac{22}{5}\right) \quad \vec{u} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = 5$ να υπολογισθεί το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$.

Λύση:

Επειδή $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ θα είναι

$$\begin{aligned}
 (\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = 0 &\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\beta}\vec{\gamma} + 2\vec{\gamma}\vec{\alpha} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}(\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2) = \\
 &= -\frac{1}{2}(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2) = \\
 &= -\frac{1}{2}(4 + 9 + 25) = -19
 \end{aligned}$$

Άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = -19$

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 5^η

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Δ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Να υπολογισθούν οι γωνίες του αν είναι:

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}) \cdot \overrightarrow{A\Delta} = (\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Λύση:

Βασική εφαρμογή

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά διανύσματα. Αν

$$\lambda \cdot \vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\beta} \quad \text{τότε} \quad \lambda = \mu = 0$$

Πράγματι

- Αν $\lambda \neq 0$ τότε θα είναι

$$\lambda \cdot \vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} // \vec{\beta} \text{ (άτοπο)}$$

- Αν $\mu \neq 0$ τότε θα είναι

$$\lambda \cdot \vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta} // \vec{\alpha} \text{ (άτοπο)}$$

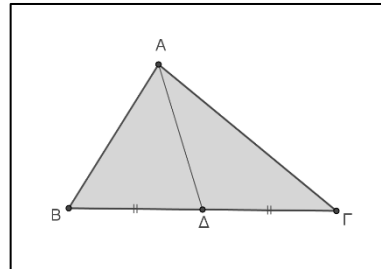
Άρα θα είναι $\lambda = \mu = 0$

Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{AB}$ είναι μη συγγραμμικά, σύμφωνα με την παραπάνω εφαρμογή θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \text{ και } \overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$$

Δηλαδή

$$BAG = 90^\circ \text{ και } A\Delta \text{ ύψος και διάμεσος}$$



Τότε $\hat{A}B\hat{\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και έτσι θα είναι

$$\hat{A} = 90^\circ, \quad \hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$$

* * * *

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ 6^η

Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ όταν $\Gamma(4, -1)$ και οι εξισώσεις $\varepsilon_1: 2x - 3y + 11 = 0$, $\varepsilon_2: 2x + 3y = 0$ είναι οι εξισώσεις του ύψους και της διαμέσου από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

Λύση:

- Εξίσωση της $B\Gamma$

$$B\Gamma: y - y_\Gamma = \lambda_{B\Gamma}(x - x_\Gamma)$$

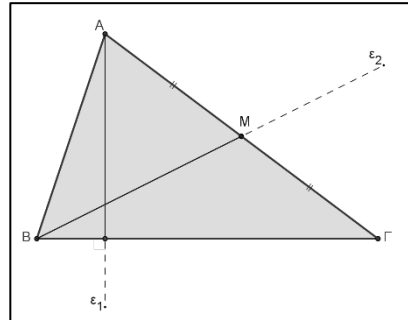
Είναι $B\Gamma \perp \varepsilon_1$.

Τότε

$$\lambda_{B\Gamma} \lambda_{\varepsilon_1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} \frac{2}{3} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = -\frac{3}{2}$$

Έτσι

$$B\Gamma: y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 4) \Leftrightarrow 3x + 2y = 5$$



- Εξίσωση της $A\Gamma$

$$A\Gamma: y - y_\Gamma = \lambda_{A\Gamma}(x - x_\Gamma)$$

M είναι μέσο $A\Gamma$. Τότε $x_M = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{x_A + 4}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{y_A - 1}{2}$

M σημείο της ε_2 . Τότε

$$\begin{aligned} 2x_M + 3y_M = 0 &\Leftrightarrow 2 \frac{x_A + 4}{2} + 3 \frac{y_A - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x_A + 3y_A = -5 \quad (1) \end{aligned}$$

A σημείο της ε_1 . Τότε $2x_A - 3y_A + 11 = 0 \Leftrightarrow 2x_A - 3y_A = -11 \quad (2)$

Επιλύοντας το σύστημα των (1), (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_A + 3y_A = -5 \\ 2x_A - 3y_A = -11 \end{array} \right\} \text{ βρίσκουμε } x_A = -4, y_A = 1$$

$$\text{Τότε } \lambda_{\text{ΑΓ}} = \frac{y_{\Gamma} - y_A}{x_{\Gamma} - x_A} = \frac{-1-1}{4+4} = -\frac{1}{4} \text{ και } \text{ΑΓ: } y+1 = -\frac{1}{4}(x-4) \Leftrightarrow x+4y=0$$

• Εξίσωση της ΑΒ

$$\text{ΑΒ: } y - y_A = \lambda_{\text{ΑΒ}}(x - x_A)$$

Β κοινό σημείο των ΑΒ, ΒΓ. Έτσι

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_B + 3y_B = 0 \\ 3x_B + 2y_B = 5 \end{array} \right\} \text{ βρίσκουμε } x_B = 3, y_B = -2$$

$$\text{Τότε } \lambda_{\text{ΑΒ}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-1}{3+4} = -\frac{3}{7} \text{ και } \text{ΑΒ: } y-1 = -\frac{3}{7}(x+4) \Leftrightarrow 3x+7y=-5$$

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 7^η

Θεωρούμε μια ευθεία ε και ένα σημείο $A(6, -1)$ εκτός της ε . Έστω $M(2, 1)$ η προβολή του A στην ε . Να βρεθεί:

(α) Η εξίσωση της ευθείας ε

(β) Το συμμετρικό του A ως προς την ε .

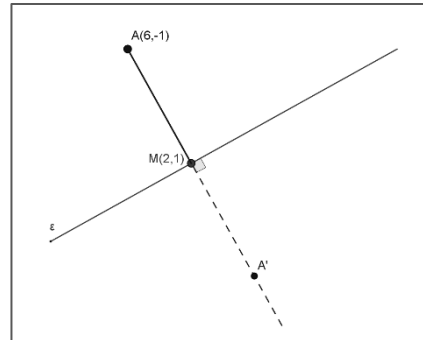
Λύση:

(α) Η ευθεία ε διέρχεται από το M και είναι κάθετη στην ευθεία AM . Έτσι αν λ ο συντελεστής διεύθυνσής της τότε:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \lambda_{\text{ΑΜ}} &= -1 \Leftrightarrow \lambda \cdot \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda \cdot \frac{1 - (-1)}{2 - 6} = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = 2 \end{aligned}$$

Η εξίσωση της ε θα είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon: y - y_A &= \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y + 1 = 2(x - 6) \\ &\Leftrightarrow y = 2x - 13 \end{aligned}$$



(β) Αν A' το συμμετρικό σημείο του A ως προς την ε , τότε είναι το M μέσο του AA' . Έτσι

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x'}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{6 + x'}{2} \Leftrightarrow x' = -2 \\ y_M &= \frac{y_A + y'}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{-1 + y'}{2} \Leftrightarrow y' = 3 \end{aligned}$$

Άρα το συμμετρικό του Α είναι το $A'(-2, 3)$.

❖ Το συμμετρικό μπορεί να προσδιορισθεί και από την ισότητα $\overline{AM} = \overline{MA'} \Leftrightarrow \dots$

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 8^η

- (α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(\alpha-2)x - (1-2\alpha)y + 2 - \alpha = 0$ (1) παριστάνει ευθεία.
- (β) Να δειχθεί ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.
- (γ) Να υπολογισθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η απόσταση του $A(2,2)$ από την ευθεία της (1) να είναι 2 μονάδες.

Λύση:

Πρέπει $\alpha - 2 \neq 0$ ή $-(1-2\alpha) \neq 0$

(α) Είναι $\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$ και $1 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

Οι συντελεστές των x και y δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, άρα η σχέση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του α .

(β) Η ευθεία (1) για $\alpha=2$ είναι η $\varepsilon_1: y=0$ και για $\alpha=\frac{1}{2}$ είναι η $\varepsilon_2: x=1$.

Το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι το $M(1,0)$.

Η σχέση (1) για $x=1$ και $y=0$ επαληθεύεται για κάθε α γιατί

$$(\alpha-2)1 - (1-2\alpha)0 + 2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Άρα οι ευθείες της σχέσης (1) διέρχονται από το σταθερό σημείο $M(1,0)$.

(γ) Είναι

$$\begin{aligned} d(A, (1)) &= 2 \Leftrightarrow \frac{|(\alpha-2)2 - (1-2\alpha)2 + 2 - \alpha|}{\sqrt{(\alpha-2)^2 + (1-2\alpha)^2}} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |5\alpha - 4| = 2\sqrt{5\alpha^2 - 8\alpha + 5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5\alpha^2 - 8\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2, \alpha = \frac{-2}{5} \end{aligned}$$

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 9^η

Δίνεται η εξίσωση $6x^2 - y^2 = xy$ (1).

(α) Να δειχθεί ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

(β) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω δύο ευθείες.

Λύση:

(α) Η εξίσωση $6x^2 - xy - y^2 = 0$ είναι δευτεροβάθμια ως προς x . Έτσι θα είναι

$$\Delta = y^2 + 24y^2 = 25y^2 \quad \text{άρα } x = \frac{y \pm 5y}{12} = \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ x = -\frac{1}{3}y \end{cases}, \quad \text{οπότε η σχέση (1) παριστάνει}$$

το ζεύγος των ευθειών $\varepsilon_1: y = 2x$ και $\varepsilon_2: y = -3x$.

(β) Έστω διάνυσμα $\vec{\alpha}$ παράλληλο στην ευθεία $\varepsilon_1: y = 2x$, με $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και διάνυσμα $\vec{\beta}$ παράλληλο στην ευθεία $\varepsilon_2: y = -3x$, με $\vec{\beta} = (1, -3)$.

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1 - 6 = -5, \quad |\vec{\alpha}| = \sqrt{5} \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{10}$$

$$\cos(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4}$$

Άρα θα είναι $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 135^\circ$.

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 10^η

Δίνονται ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: 2x + y - 6 = 0$, $\varepsilon_2: 2x + y - 2 = 0$.

(α) Ναδειχθεί ότι οι παραπάνω ευθείες είναι παράλληλες.

(β) Να προσδιοριστεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας δ των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Λύση:

(α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε_1 είναι $\lambda_1 = -2$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της ε_2 είναι $\lambda_2 = -2$. Οπότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

(β) Για $x=0$ η ε_1 δίνει $y=6$, άρα η ε_1 τέμνει τον άξονα y' στο σημείο $A(0,6)$.

Για $x=0$ η ε_2 δίνει $y=2$, άρα η ε_2 τέμνει τον άξονα y' στο σημείο $B(0,2)$.

Το μέσο του AB είναι το $M(0,4)$.

Η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ διέρχεται από το σημείο M και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$ οπότε η εξίσωση της είναι $y - 4 = -2(x - 0) \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$.

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 11^η

Να προσδιοριστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου, τα οποία απέχουν από το σημείο $A(4,0)$ διπλάσια απόσταση από την απόστασή τους από τον άξονα $x'x$.

Λύση:

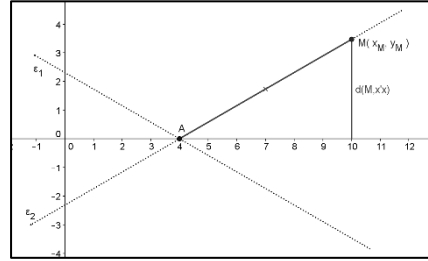
Έστω $M(x_M, y_M)$ ένα σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Τότε ισχύει:

$$(AM) = 2 \cdot d(M, x'x)$$

$$\text{Είναι } (AM) = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x_M - 4)^2 + y_M^2} \text{ και } d(M, x'x) = |y_M|.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} (AM) &= 2 \cdot d(M, x'x) \\ \sqrt{(x_M - 4)^2 + y_M^2} &= 2|y_M| \\ (x_M - 4)^2 + y_M^2 &= 4y_M^2 \\ (x_M - 4)^2 - 3y_M^2 &= 0 \\ (x_M - 4 - \sqrt{3}y_M)(x_M - 4 + \sqrt{3}y_M) &= 0 \\ x_M - 4 - \sqrt{3}y_M = 0 \quad \text{ή} \quad x_M - 4 + \sqrt{3}y_M &= 0 \end{aligned}$$



Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι οι ευθείες με εξισώσεις

$$\varepsilon_1: x + \sqrt{3}y = 4, \quad \varepsilon_2: x - \sqrt{3}y = 4$$

* * * *

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 12^η

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$, $B(2,6)$ και την αρχή O των αξόνων.

Λύση:

- Το μέσο της χορδής AO είναι το $M(2,1)$, οπότε η μεσοκάθετος της χορδής AO έχει εξίσωση $\varepsilon_1: y - 1 = \lambda_1(x - 2)$.

$$\text{Είναι } AO \perp \varepsilon_1 \text{ και έτσι } \lambda_1 \cdot \lambda_{AO} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \frac{2-0}{4-0} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2$$

$$\text{Άρα } \varepsilon_1: y - 1 = -2(x - 2) \Leftrightarrow 2x + y = 5$$

- Το μέσο της χορδής BO είναι το $N(1,3)$, οπότε η μεσοκάθετος της χορδής BO έχει εξίσωση $\varepsilon_2: y - 3 = \lambda_2(x - 1)$.

$$\text{Είναι } BO \perp \varepsilon_2 \text{ και έτσι } \lambda_2 \cdot \lambda_{BO} = -1 \Leftrightarrow \lambda_2 \frac{6-0}{2-0} = -1 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } \varepsilon_2: y-3 = -\frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow x+3y=10$$

- Το κέντρο K του κύκλου είναι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 . Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους προκύπτει ότι $x_K=1$, $y_K=3$. Άρα το κέντρο είναι $K(1,3)$.
- Η ακτίνα του κύκλου είναι το $\rho = (OK) = \sqrt{x_K^2 + y_K^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.
- Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $C: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$.

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 13^η

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στους άξονες συντεταγμένων και στην ευθεία $\varepsilon: 3x-4y+6=0$, αν το κέντρο του βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο.

Λύση:

- Επειδή ο κύκλος εφάπτεται στους άξονες, θα έχει κέντρο το $K(\alpha, \alpha)$ με $\alpha > 0$ και ακτίνα $\rho = \alpha$.
- Ο κύκλος εφάπτεται στην ε . Άρα θα είναι:

$$\begin{aligned} \rho = d(K, \varepsilon) &\Leftrightarrow \alpha = \frac{|3\alpha - 4\alpha + 6|}{\sqrt{9+16}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |6 - \alpha| = 5\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - \alpha = 5\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1 \\ 6 - \alpha = -5\alpha \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \text{ (απορρίπτεται)} \end{cases} \end{aligned}$$

- Ο κύκλος με κέντρο $K(1,1)$ και ακτίνα $\rho=1$ έχει εξίσωση

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 14^η

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(3+2\sigma\upsilon\nu\theta, -2+2\eta\mu\theta)$ με $\theta \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Έστω C ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M και $M(x, y)$ σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Τότε

$$\begin{aligned} M \in C &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x-3}{2} \\ y = -2+2\eta\mu\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{y+2}{2} \end{cases} \xrightarrow{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1} \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$.

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 15^η

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(2, 3)$ $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$.

(α) Ναδειχθεί ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία.

(β) Για $\lambda = 1$, να βρεθεί

(i) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(ii) Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το A , που εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$.

Λύση:

(α) Έστω ε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων A και $M(x, y)$ ένα σημείο του $A(x, y)$.

Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$ ισχύει

$$M \in \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = 3\lambda + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x+1}{2} \\ y = \frac{3x+3}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow 3x - 2y + 7 = 0$$

Όμως $\lambda \neq -2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} \neq 2 \Leftrightarrow x+1 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 3$. Άρα το σημείο A κινείται στην ευθεία

$\varepsilon: 3x - 2y + 7 = 0$, εκτός του σημείου $(3, 8)$

(β) Για $\lambda = 1$, το σημείο A είναι το $A(1, 5)$

(i) Ισχύει ότι $\overrightarrow{AB} = (0, -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (1, -2)$.

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

(ii) Η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ είναι $B\Gamma: y - 2 = \lambda(x - 1)$ με $\lambda = \frac{3-2}{2-1} = 1$, οπότε

$$B\Gamma: y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0.$$

Η ακτίνα R του κύκλου είναι ίση με την απόσταση του κέντρου A από την εφαπτομένη του $B\Gamma$.

$$R = d(A, B\Gamma) = \frac{|x_A - y_A + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|1 - 5 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Η εξίσωση του κύκλου είναι } (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = \frac{9}{2}.$$

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 16^η

Δίνεται ο κύκλος $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ και το σημείο $M(1, 4)$.

(α) Ναδειχθεί ότι το M είναι εξωτερικό του κύκλου.

(β) Να βρεθούν οι εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το M .

(γ) Να βρεθεί η γωνία των παραπάνω εφαπτομένων.

Λύση:

(α) Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(2, -3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

$$\text{Είναι } (MK) = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-4)^2} = 5\sqrt{2} > \rho.$$

Η απόσταση του σημείου M από το κέντρο του κύκλου είναι μεγαλύτερη της ακτίνας, συνεπώς το σημείο M είναι εξωτερικό του κύκλου.

(β) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε , του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $M(1,4)$ είναι

$$y - 4 = \lambda(x - 1) \Leftrightarrow \lambda x - y - \lambda + 4 = 0$$

$$\lambda \in \mathbb{R} : \chi = 1 \text{ που απορρίπτεται αφού } d(K, \varepsilon_1) = \frac{|X_K - 1|}{\sqrt{1}} = 1 < \rho$$

Γνωρίζουμε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την εφαπτομένη ισούται με την ακτίνα του κύκλου, οπότε

$$\begin{aligned} \rho = d(K, \varepsilon) &\Leftrightarrow \frac{|2\lambda + 3 - \lambda + 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 5 \\ &\Leftrightarrow |\lambda + 7| = 5\sqrt{\lambda^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow 12\lambda^2 - 7\lambda - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}, \quad \lambda = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Επομένως οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου από το σημείο M είναι

$$\varepsilon_1 : 3y - 4x - 8 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 4y + 3x - 19 = 0$$

(γ) Το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των παραπάνω εφαπτομένων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{4}{3} \left(-\frac{3}{4} \right) = -1. \text{ Άρα οι ευθείες είναι κάθετες, δηλαδή σχηματίζουν γωνία } 90^\circ.$$

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 17^η

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y - 2 = 0$ (1)

(α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η σχέση (1) να αντιστοιχεί σε κύκλο.

(β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων της (1).

Λύση:

(α) Για να είναι κύκλος η σχέση (1) πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - 4\Gamma &= \lambda^2 + \lambda^2 + 8 = \\ &= 2\lambda^2 + 8 > 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

οπότε η (1) είναι κύκλος για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Η ακτίνα είναι $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{2\lambda^2 + 8}}{2}$ και το κέντρο $K\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$.

Αν $K(x, y)$ τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = \frac{\lambda}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = -x$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων K του κύκλου είναι η ευθεία $y = -x$.

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 18^η

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 1$, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$.

Λύση:

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,0)$ και $\rho=1$

Η ευθεία ε που διέρχεται από το $A(1, \sqrt{3})$ έχει εξίσωση των μορφών

$$y - \sqrt{3} = \lambda(x - 1) \quad \text{ή} \quad x = 1$$

- Αν είναι $\varepsilon: y - \sqrt{3} = \lambda(x - 1) \Leftrightarrow \lambda x - y + \sqrt{3} - \lambda = 0$ τότε επειδή η ε είναι εφαπτομένη στον κύκλο θα ισχύει:

$$\begin{aligned} d(K, \varepsilon) = \rho &\Leftrightarrow \frac{|0 - 0 + \sqrt{3} - \lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 1 \Leftrightarrow |\lambda - \sqrt{3}| = \sqrt{1 + \lambda^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda - \sqrt{3})^2 = 1 + \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\frac{\sqrt{3}}{3}x - y + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y + 2\sqrt{3} = 0$

- Αν είναι $\varepsilon: x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$. Επειδή $d(O, \varepsilon) = \frac{|0 - 1|}{\sqrt{0 + 1}} = 1 = \rho$, η ευθεία $\varepsilon: x = 1$ είναι και αυτή εφαπτομένη.

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 19^η

Να προσδιορισθεί η εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στον κύκλο με εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 10x = 0$, στο σημείο $A(2, 4)$.

Λύση:

- Ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 10x = 0$ έχει κέντρο με συντεταγμένες $x_K = -\frac{-10}{2} = 5, y_K = 0$ δηλαδή $K(5, 0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 0 - 0} = 5$.

- Έστω $M(x, y)$ σημείο της εφαπτομένης ε του κύκλου στο $A(2, 4)$. Τότε είναι

$$\overrightarrow{MA} = (2 - x, 4 - y) \text{ και } \overrightarrow{KA} = (-3, 4). \text{ Επομένως}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{KA} = 0 &\Leftrightarrow -3(2 - x) + 4(4 - y) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x - 4y + 10 = 0 \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon: 3x - 4y + 10 = 0$.

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 20^η

Να προσδιορισθεί η εξίσωση της χορδής του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 4$, που έχει μέσο το σημείο $M(-1, 1)$.

Λύση:

Ο κύκλος έχει κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$. Η χορδή που διέρχεται από το σημείο M θα έχει εξίσωση $\varepsilon: y - 1 = \lambda(x + 1)$ ή $\varepsilon_1: x = -1$ που απορρίπτεται αφού $y_M \neq y_0$ δηλαδή η OM δεν είναι οριζόντια.

$$\text{Είναι } OM \perp \varepsilon \text{ και έτσι } \lambda \cdot \lambda_{OM} = -1 \Leftrightarrow \lambda \cdot \frac{1 - 0}{-1 - 0} = -1 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Άρα η εξίσωση της χορδής είναι $\varepsilon: y - 1 = x + 1 \Leftrightarrow y = x + 2$

* * * *

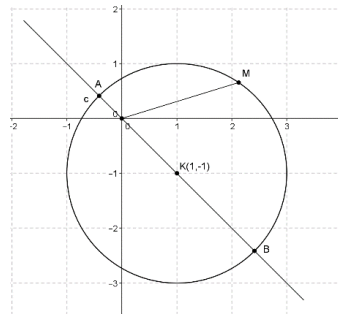
ΑΣΚΗΣΗ 21^η

Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου $C: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ τα οποία απέχουν από την αρχή των αξόνων την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση.

Λύση:

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(1, -1)$ και ακτίνα $\rho = 2$

- Ισχύει ότι: $(AM) \leq (OM) \leq (BM)$ όπου A, B, K, O συνευθειακά.
- Βρίσκουμε τα σημεία A, B λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου C και της ευθείας OK .



Είναι OK: $y = \lambda_{OK} x \Leftrightarrow y = -x$.

$$A, B \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (-x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Έτσι τα σημεία $A(1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2})$, $B(1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ είναι τα σημεία του κύκλου που έχουν την μικρότερη και την μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 22^η

Δίνεται ο κύκλος $C_1: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$.

(α) Να βρεθεί η σχετική θέση του κύκλου με την ευθεία $\varepsilon: y-2x+1=0$.

(β) Να βρεθεί η σχετική θέση του κύκλου με το σημείο $M(0,2)$.

(γ) (i) Δείξτε ότι οι κύκλοι που έχουν εξισώσεις $C_1: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$,

$$C_2: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \text{ τέμνονται.}$$

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής χορδής AB των κύκλων C_1, C_2 .

Λύση:

(α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(1,3)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$.

$$\text{Είναι } d(K, \varepsilon) = \frac{|-2 \cdot 1 + 3 + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} < \rho_1, \text{ οπότε η ευθεία } \varepsilon \text{ τέμνει τον κύκλο } C_1.$$

(β) $(KM) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < \rho_1$, οπότε το σημείο M είναι εσωτερικό του κύκλου.

(γ) (i) Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(2,1)$ και ακτίνα $\rho_2 = \sqrt{2}$.

H διάκεντρος ισούται με $(K\Lambda) = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} < \rho_2$ και το άθροισμα των ακτινών $\rho_1 + \rho_2 = 2 + \sqrt{2}$ και $\rho_1 - \rho_2 = 2$

Ισχύει ότι $\rho_1 - \rho_2 < (K\Lambda) < \rho_1 + \rho_2$, οπότε οι δύο κύκλοι τέμνονται.

(ii) Οι εξισώσεις των κύκλων γίνονται

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0 \quad (1)$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις (1) και (2) έχουμε ότι $6x + 8y + 5 = 0$.

Η παραπάνω εξίσωση αντιστοιχεί στην ευθεία της κοινής χορδής των δύο κύκλων.

* * * *

ΑΣΚΗΣΗ 23^η

Σε καρτεσιανό σύστημα Οxy θεωρούμε κύκλο C_1 που έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon: x - y - 1 = 0$. Έστω επίσης τα σημεία $A(5, 3)$, $B(1, 5)$ δύο σημεία του κύκλου C_1 .

(α) Να αποδείξετε ότι $C_1: (x - 1)^2 + y^2 = 25$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1 .

(γ) Αν M_1, M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2 τότε:

(γ1) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά.

(γ2) Να δείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1 .

Λύση:

(α) Έστω $K(x_K, y_K)$ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου. Τότε:

- K σημείο της ευθείας $\varepsilon: x_K - y_K - 1 = 0$ (1)

- $(KA) = (KB) \Leftrightarrow \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(x_B - x_K)^2 + (y_B - y_K)^2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (5 - x_K)^2 + (3 - y_K)^2 = (1 - x_K)^2 + (5 - y_K)^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2x_K + y_K + 2 = 0$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) προσδιορίζουμε το κέντρο K . Πράγματι:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_K - y_K - 1 = 0 \\ -2x_K + y_K + 2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_K = 1 \\ y_K = 0 \end{array} \right\} \text{ Άρα } K(1, 0).$$

Η ακτίνα είναι $\rho = (KA) = \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 0)^2} = 5$

Έτσι ο κύκλος έχει εξίσωση $C_1: (x - 1)^2 + y^2 = 25$

(β) Η ζητούμενη παραβολή έχει εστία το κέντρο του κύκλου. Δηλαδή θα είναι το σημείο με συντεταγμένες $(1, 0)$. Γνωρίζουμε όμως ότι η εστία που βρίσκεται στον $\chi'\chi$ έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Επομένως $p = 2$. Τότε η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον $\chi'\chi$ και εξίσωση

$$C_2: y^2 = 2px \Leftrightarrow y^2 = 4x$$

(γ) Τα κοινά σημεία του κύκλου και της παραβολής είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 + y^2 = 25 \\ y^2 = 4x \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x-1)^2 + 4x = 25 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 4, y = \pm 4$$

Έτσι τα κοινά σημεία είναι $M_1(4,4)$, $M_2(4,-4)$.

(γ1) Η εφαπτομένη της παραβολής στο $M_1(4,4)$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_1 : yy_1 = 2(x+x_1) \Leftrightarrow 4y = 2(x+4) \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο $M_2(4,-4)$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_2 : yy_2 = 2(x+x_2) \Leftrightarrow -4y = 2(x+4) \Leftrightarrow x + 2y + 4 = 0$$

(γ2) Το κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$ των παραπάνω εφαπτομένων είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 4 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_0 = -4, y_0 = 0$$

Οι συντεταγμένες του κοινού σημείου $A(-4,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου. Άρα το κοινό σημείο A ανήκει στο κύκλο.

* * * *