

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ . Μονάδες 10
- A2.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα  $\Delta$ . Να γράψετε τον ορισμό της αρχικής  $F$  της συνάρτησης  $f$  στο  $\Delta$ . Μονάδες 5
- A3.** Σημειώστε Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις: Μονάδες 10
- (α) Η εφαπτομένη της  $C_f$  σε σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  μπορεί να διαπερνά την  $C_f$ .
- (β) Το σημείο  $(x_0, f(x_0))$  της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f$  στο οποίο η εφαπτόμενη της  $C_f$  είναι παράλληλη στον  $x'$ , είναι ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) = 0$ .
- (γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και είναι  $f(x_0) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  για  $x$  κοντά στο  $x_0$ .
- (δ) Αν  $A(x_0, y_0)$  σημείο της γραφικής παράστασης μιας αντιστρέψιμης και συνεχούς συνάρτησης  $f$ , τότε θα είναι  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$ .
- (ε) Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = 2016$  τότε  $g(x_0) = 0$ .

### ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ , που είναι γνησίως μονότονη και με γραφική παράσταση που διέρχεται από τα  $A(1,3)$ ,  $B(3,5)$ .

**B1.** Βρείτε την μονοτονία της  $f$ . Μονάδες 6

**B2.** Λύστε την εξίσωση:  $f(f(e^{5-x})) = 5$  Μονάδες 6

**B3.** Δείξτε ότι αντιστρέφεται και βρείτε τις τιμές  $f^{-1}(3)$ ,  $f^{-1}(f^{-1}(5))$ . Μονάδες 6

**B4.** Να λύσετε την ανίσωση:  $f(f^{-1}(x^2 + 4x) - 2) < 3$  Μονάδες 7

-----

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ , που διέρχεται από τα σημεία  $A(1,3)$ ,  $B(2,1)$ ,  $\Gamma(3,1)$ . Να δειχθεί ότι:

**Γ1.** Η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει την διχοτόμο της γωνίας  $xOy$  σ'ένα τουλάχιστον σημείο του  $(1,3)$ . Μονάδες 7

**Γ2.** Υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_1 \in (1,3)$  τέτοιο ώστε, το σημείο  $M_1(x_1, f(x_1))$  να απέχει από την αρχή  $O$  ελάχιστη απόσταση. Μονάδες 10

**Γ3.** Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M_1(x_1, f(x_1))$  είναι κάθετη στην ευθεία  $OM_1$ . Μονάδες 8

-----

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $F$  με  $e^{F(x)} + F(x) = 1 + x$   $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Δείξτε ότι η  $F$  είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. Μονάδες 5

Δ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  της γραφικής παράστασης  $C_F$ , στο κοινό σημείο της  $C_F$  με τον άξονα  $x'x$ . Μονάδες 5

Δ3. Δείξτε ότι η  $F$  είναι αντιστρέψιμη και προσδιορίσετε τον τύπο της αντίστροφης. Μονάδες 5

Δ4. Αν  $F(1) = \alpha$ , να υπολογίσετε ως συνάρτηση του  $\alpha$  το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 F(x) dx$$

Μονάδες 5

Δ5. Να δειχθεί ότι  $F(x) \leq \frac{x}{2}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης  
Δέσποινα Σωτηροπούλου