Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα 263 (i)

Α2. Σχολικό σελίδα 301

Α3. **(α)** Σωστή, **(β)** Σωστή, **(γ)** Σωστή, **(δ)** Σωστή, **(ε)** Λανθασμένη

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι f γνησίως μονότονη και $f(1)=3<5=f(3)$. Άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β2. Η f είναι "1-1" ως γνησίως μονότονη.

$$f\left(f\left(e^{5-x}\right)\right)=5 \Leftrightarrow f\left(f\left(e^{5-x}\right)\right)=f(3) \overset{\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f\left(e^{5-x}\right)=3 \Leftrightarrow f\left(e^{5-x}\right)=f(1) \overset{\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow e^{5-x}=1 \Leftrightarrow x=5$$

Β3. Η f είναι αντιστρέψιμη ως "1-1".

$$f(1)=3 \Leftrightarrow f^{-1}(3)=1$$

$$f(3)=5 \Leftrightarrow f^{-1}(5)=3 \quad \text{και έτσι} \quad f^{-1}\left(f^{-1}(5)\right)=f^{-1}(3)=1$$

Β4. Επειδή $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$ και η f αντιστρέφεται, η αντίστροφη f^{-1} ορίζεται στο $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$. Επομένως η ανίσωση $f\left(f^{-1}(x^2+4x)-2\right)<3$ ορίζεται αν $x^2+4x>0 \Leftrightarrow x<-4$ ή $x>0$ (1)

$$f\left(f^{-1}(x^2+4x)-2\right)<3 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x^2+4x)-2\right)<f(1) \Leftrightarrow$$

$$\overset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x^2+4x)-2<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+4x)<3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+4x)<f^{-1}(5) \overset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x<5 \Leftrightarrow x^2+4x-5<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5<x<1 \quad (2)$$

Αρα από (1) και (2) θα είναι $x\in(-5,-4)\cup(0,1)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και επειδή διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,1)$ θα είναι $f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0\in(1,3)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ $x\in[1,3]$.

Είναι g συνεχής στο $[1,3]$ ως διαφορά των συνεχών y=f(x), y=x και $g(1)g(3)=(f(1)-1)(f(3)-3)=2(-2)=-4<0$.

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$. Άρα η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0\in(1,3)$.

Γ2.: Για κάθε σημείο $M(x,f(x))$ της C_f η απόσταση (ΟΜ) είναι: $(OM)=\sqrt{x^2+f^2(x)}$.

Θεωρώντας τη συνεχή συνάρτηση $d(x)=\sqrt{x^2+f^2(x)}$ $x\in[1,3]$ από το θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής η συνάρτηση d παρουσιάζει ελάχιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχει $x_1\in[1,3]$ ώστε $d(x)\ge d(x_1)$ για κάθε $x\in[1,3]$.

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

Όμως $d(1)=d(3)=\sqrt{10}>d(2)=\sqrt{5}$. Έτσι υπάρχει $x_1\in(1,3)$ ώστε $d(x)\geq d(x_1)$ για κάθε $x\in[1,3]$.

Γ3. Για να είναι η εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία OM_1 αρκεί να δειχθεί ότι:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}\lambda_{OM}=-1 \Leftrightarrow f'(x_1)\frac{f(x_1)}{x_1}=-1 \Leftrightarrow f'(x_1)\,f(x_1)=-x_1 \qquad (1)$$

Στο Β2 δείξαμε ότι η συνάρτηση d παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1\in(1,3)$. Επίσης η d είναι παραγωγίσιμη με $d'(x)=\dfrac{f'(x)f(x)+x}{\sqrt{x^2+f^2(x)}}$.

Το θεώρημα Fermat δίνει ότι $d'(x_1)=0 \Leftrightarrow f'(x_1)f(x_1)=-x_1$ δηλαδή δείχθηκε η (1).

\-------

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$F'(x)e^{F(x)}+F'(x)=1$$

$$F'(x)=\frac{1}{e^{F(x)}+1} \quad \text{και} \quad F''(x)=-\frac{F'(x)e^{F(x)}}{\left(e^{F(x)}+1\right)^2}$$

Είναι $F'(x)>0$ δηλαδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $F''(x)<0$ δηλαδή η F είναι κοίλη $\mathbb{R}$.

Δ2. Στο κοινό σημείο Μ των C_F, x'x είναι: $F(x_M)=0$

$$e^{F(x_M)}+F(x_M)=1+x_M$$

$$e^0+0=1+x_M$$

$$x_M=0$$

Άρα το σημείο επαφής είναι η αρχή $O(0,0)$ και η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι:

$$y-F(0)=F'(0)(x-0)$$

$$y-0=\frac{1}{2}(x-0)$$

$$y=\frac{1}{2}x$$

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

Δ3. Η F ως γνήσια αύξουσα είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $y = F(x)$ η αρχική ισότητα δίνει

$$e^{F(x)} + F(x) = 1 + x$$
$$e^{y} + y = 1 + x$$
$$x = e^{y} + y - 1$$

Άρα $F^{-1}(x) = e^{x} + x - 1 \quad x \in \mathbb{R}$

Δ4. Κάνοντας αντικατάσταση με τη βοήθεια της αντίστροφης έχουμε

$$I = \int_0^1 F(x)\,dx \overset{(1)}{=} \int_0^{\alpha} y(e^{y}+1)\,dy =$$

$$(1)\begin{cases} y = F(x) \\ F^{-1}(y) = x \Leftrightarrow x = e^{y} + y - 1 \\ dx = (e^{y}+1)\,dy \\ x = 0 : \ y = F(0) = 0 \\ x = 1 : \ y = F(1) = \alpha \end{cases}$$

$$= \int_0^{\alpha} ye^{y}\,dy + \int_0^{\alpha} y\,dy =$$

$$= \left[ye^{y}\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} e^{y}\,dy + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\alpha} =$$

$$= \left[ye^{y}\right]_0^{\alpha} - \left[e^{y}\right]_0^{\alpha} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\alpha} =$$

$$= \alpha e^{\alpha} - e^{\alpha} + 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Δ5. Στο Γ1 δείξαμε ότι η F είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$. Έτσι η εφαπτομένη $\varepsilon :\ y = \frac{1}{2}x$ του Γ2 ερωτήματος θα βρίσκεται πάνω από την C_F. Δηλαδή

$$F(x) \le \frac{x}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

– – – – – – –

Επιμέλεια : Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
Δέσποινα Σωτηροπούλου