

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Όμοια λέγονται δύο πολύγωνα που έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Λόγος ομοιότητας δύο όμοιων πολυγώνων λέγεται ο λόγος δύο πλευρών που είναι απέναντι από αντίστοιχα ίσες γωνίες.

Ισχύουν οι επόμενες προτάσεις:

- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια προς τρίτο τότε είναι και μεταξύ τους όμοια.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι πάντα όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 1$.
- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια τότε όλα τα αντίστοιχα δευτερεύοντα στοιχεία τους έχουν λόγο ίσο με το λόγο ομοιότητας τους.
- Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.
- Δύο τετράγωνα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.

Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

Κριτήριο 1^ο: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Κριτήριο 2^ο: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών γωνίες τους ίσες.

Κριτήριο 3^ο: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Άσκηση 1

Ευθεία ε είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ και τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E . Από το Γ φέρνουμε παράλληλη στη BE που τέμνει την

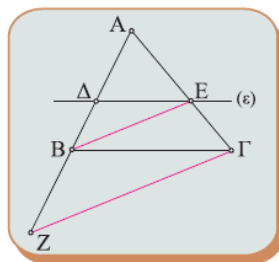
ευθεία AB στο Z , να δείξετε ότι: $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{AZ}$

Λύση

$$\text{Από τις } \Delta E \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad (1)$$

$$\text{Από τις } BE \parallel \Gamma Z \Leftrightarrow \frac{AB}{AZ} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1) και (2) είναι } \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{AZ}$$

**Άσκηση 2**

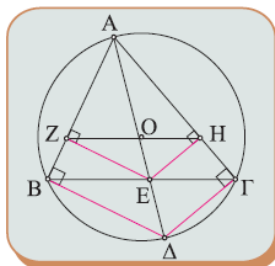
Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Αν η διάμετρος $A\Delta$ τέμνει τη $B\Gamma$ στο E και φέρουμε τις $EZ \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$, να δείξετε ότι: $ZH \parallel B\Gamma$

Λύση

$$\text{Είναι: } \widehat{AB\Delta} = \widehat{AZE} = 1^\circ. \text{ Άρα } EZ \parallel \Delta B \Leftrightarrow \frac{AZ}{ZB} = \frac{AE}{E\Delta} \quad (1)$$

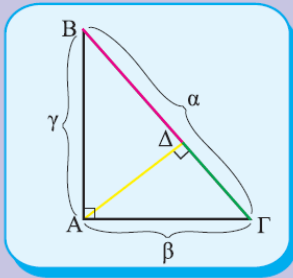
$$\text{Όμοια: } \widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{AHE} = 1^\circ. \text{ Άρα } EH \parallel \Delta\Gamma \Leftrightarrow \frac{AH}{H\Gamma} = \frac{AE}{E\Delta} \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: } \frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}, \text{ οπότε } ZH \parallel B\Gamma.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα.

*BΓ υποτείνουσα**ΑΔ ύψος**ΓΔ προβολή του ΑΓ στην υποτείνουσα**ΒΔ προβολή του ΑΒ στην υποτείνουσα***Θεώρημα I**

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

$$AB^2 = BG \cdot BD$$

$$(\gamma^2 = \alpha \cdot \beta)$$

$$AG^2 = BG \cdot GD$$

$$(\beta^2 = \alpha \cdot \Delta)$$

Πόρισμα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους επάνω στην υποτείνουσα.

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta}{\beta}$$

Θεώρημα II (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας

$$AB^2 + AG^2 = BG^2$$

ή

$$\gamma^2 + \beta^2 = \alpha^2$$

Θεώρημα III (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε κάποιο τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την μεγαλύτερη πλευρά.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ, η

 $\alpha = BG$ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

τότε $\hat{A} = 90^\circ$ **Θεώρημα IV**

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

$$\Delta^2 = BD \cdot GD$$

Βασικές Εφαρμογές

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο αν u_a είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισχύει:

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{u_a^2}$$

$$\beta \cdot \gamma = \alpha u_a$$

Άσκηση 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ με $\hat{O} = 90^\circ$ και Β, Δ τυχαία σημεία των ΟΑ και ΟΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΓΒ^2$.

Λύση

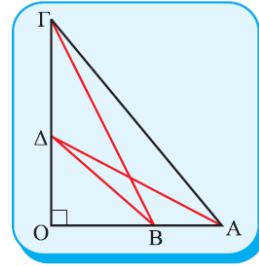
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ ισχύει $ΑΓ^2 = ΟΑ^2 + ΟΓ^2$ (1)

Όμοια, στο ορθογώνιο ΟΒΔ ισχύει $ΒΔ^2 = ΟΔ^2 + ΟΒ^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} ΑΓ^2 + ΒΔ^2 &= ΟΑ^2 + ΟΓ^2 + ΟΔ^2 + ΟΒ^2 = \\ &= (ΟΑ^2 + ΟΔ^2) + (ΟΒ^2 + ΟΓ^2) = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 \end{aligned}$$

διότι τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ορθογώνια και ισχύει το Π.Θ.



Άσκηση 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Έστω Δ το μέσον της ΑΒ και Ε η προβολή του Δ πάνω στη ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $ΕΓ^2 - ΕΒ^2 = ΑΓ^2$.

Λύση

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΕ, ΕΓΔ εφαρμόζουμε το Π.Θ. και έχουμε:

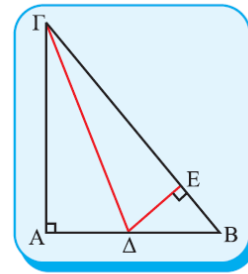
$$ΕΒ^2 = ΒΔ^2 - ΔΕ^2 \quad (1)$$

$$ΕΓ^2 = ΓΔ^2 - ΔΕ^2 \quad (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τη σχέση (1) από τη σχέση (2) και έχουμε

$$ΕΓ^2 - ΕΒ^2 = (ΓΔ^2 - ΔΕ^2) - (ΒΔ^2 - ΔΕ^2) = ΓΔ^2 - ΒΔ^2 = ΓΔ^2 - ΑΔ^2$$

αφού $ΑΔ = ΒΔ$. Άρα $ΕΓ^2 - ΕΒ^2 = ΓΔ^2 - ΑΔ^2 = ΑΓ^2$ διότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

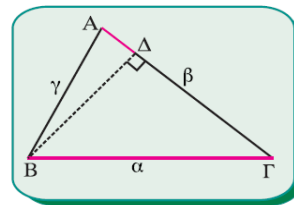


ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Θεώρημα Ι (Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος για πλευρά που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές, επί την προβολή της άλλης επάνω σε αυτήν για παράδειγμα

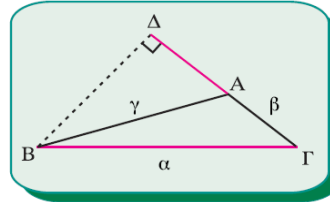
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot ΑΔ$$



Θεώρημα II (Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος για πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές, επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν για παράδειγμα

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$



Πόρισμα

- i. $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 1^L$ ii. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 1^L$ iii. $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 1^L$

Νόμος Συνημιτόνων

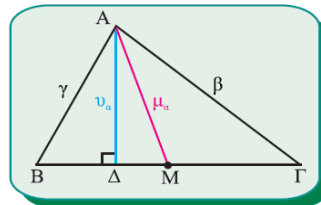
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos\hat{A}, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sin\hat{B}, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sin\hat{\Gamma}$$

Θεώρημα III (1° θεώρημα διαμέσων)

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου, που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς για παράδειγμα

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$



Θεώρημα IV (2° θεώρημα διαμέσων)

Η διαφορά των τετραγώνων των δύο πλευρών ενός τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς, επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου στην πλευρά αυτή.

Για παράδειγμα:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \Delta M \quad (\beta > \gamma)$$

Τύποι διαμέσων:

$$\mu_a^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$$

$$\mu_b^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}$$

$$\mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

Άσκηση 1

I. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta = 7$, $\gamma = 6$ και $\mu_a = \frac{7}{2}$. Να υπολογίσετε:

- α. την πλευρά α β. την προβολή της διαμέσου μ_a πάνω στην ΒΓ.**

Λύση

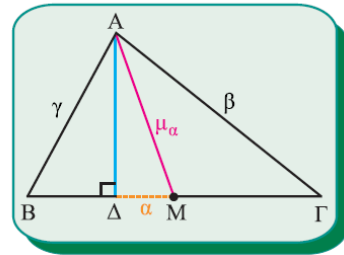
α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα των

διαμέσων $\beta + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{a^2}{2}$ και λύνουμε ως προς α:

$$\alpha = \sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 4\mu_a^2} = \sqrt{2 \cdot 49 + 2 \cdot 36 - 4 \cdot \frac{49}{4}} = \sqrt{121} = 11$$

β. Στο ΑΒΓ η προβολή της διαμέσου στην πλευρά α είναι η ΔΜ. Εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων στο ΑΒΓ, με $\beta > \gamma$ και έχουμε: $\beta^2 - \gamma^2 = 2a \cdot \Delta\Delta$

$$\text{Άρα } \Delta\Delta = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2a} = \frac{49 - 36}{2 \cdot 11} = \frac{13}{22}$$



Άσκηση 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 3, ΒΓ = 5 και ΓΑ = 7. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

Λύση

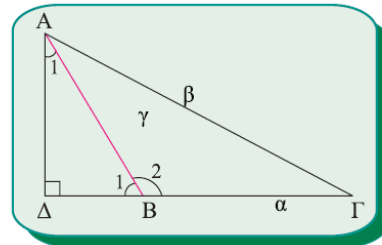
α' τρόπος

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων για τη γωνία $\hat{B}$ και είναι $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos \hat{B}$. Λύνουμε ως

προς $\cos \hat{B}$ και έχουμε:

$$\cos \hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{25 + 9 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

οπότε $\hat{B} = 120^\circ$.



Άσκηση 3

Να βρείτε το είδος της γωνίας που βρίσκεται απέναντι στη μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου ΑΒΓ όταν:

α. $\alpha = 5, \beta = 12, \gamma = 13$ β. $\alpha = 4, \beta = 5, \gamma = 6$ γ. $\alpha = 4, \beta = 5, \gamma = 7$

Λύση

Σύμφωνα με θεώρημα που μάθαμε στην ύλη της Α' Λυκείου σ' ένα τρίγωνο απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά, βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία. Έτσι, έχουμε:

α. Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η γ με $\gamma^2 = 169$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 25 + 144 = 169$.

Είναι $\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2$ οπότε $\hat{\Gamma} = 90^\circ$

β. Η μεγαλύτερη πλευρά η γ με $\gamma^2 = 36$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 16 + 25 = 41$.

Είναι $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ οπότε $\hat{\Gamma} < 90^\circ$

γ. Η μεγαλύτερη πλευρά η γ με $\gamma^2 = 49$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 16 + 25 = 41$.

Είναι $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$ οπότε $\hat{\Gamma} > 90^\circ$

Άσκηση 4

Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές:

- i. $\gamma = \frac{a}{3}$, $\beta = \frac{3a}{5}$, a ii. $\gamma = \frac{7a}{5}$, $\beta = \frac{a}{3}$, a iii. $a = \kappa$, $\beta = \frac{\kappa}{2}$, $\gamma = \frac{2\kappa}{3}$, $\kappa > 0$

Στην περίπτωση που υπάρχει να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Λύση

- i. Αν υπήρχε τρίγωνο με πλευρές $\gamma = \frac{a}{3}$ και $\beta = \frac{3a}{5}$ τότε θα είχαμε $\beta + \gamma = \frac{3a}{5} + \frac{a}{3} = \frac{14a}{15} < a$.

Άτοπο γιατί πρέπει λόγω τριγωνικής ανισότητας $\beta + \gamma > a$.

- ii. Αν υπήρχε τρίγωνο με πλευρές $\gamma = \frac{7a}{5}$, $\beta = \frac{a}{3}$ τότε θα είχαμε $\gamma - \beta = \frac{7a}{5} - \frac{a}{3} = \frac{16a}{15} > a$.

Άτοπο διότι πρέπει λόγω τριγωνικής ανισότητας $\gamma - \beta < a$.

- iii. Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η a . Αφού ισχύει $\frac{\kappa}{6} = \frac{2\kappa}{3} - \frac{\kappa}{2} < a = \kappa < \frac{\kappa}{2} + \frac{2\kappa}{3} = \frac{7\kappa}{6}$ υπάρ-

χει τρίγωνο με αυτές τις πλευρές. Έχουμε $a^2 = \kappa^2$ και $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{\kappa^2}{4} + \frac{4\kappa^2}{9} = \frac{25\kappa^2}{36} < \kappa^2$.

Άρα $a^2 > \beta^2 + \gamma^2$ $\hat{A} > 90^\circ$, οπότε $\hat{B} < 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} < 90^\circ$.

Άσκηση 5

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = B\Gamma$) και N σημείο της βάσης του $B\Gamma$. Αν $BN = 3$, $N\Gamma = 7$ και $AB = A\Gamma = 11$ να υπολογιστεί το AN .

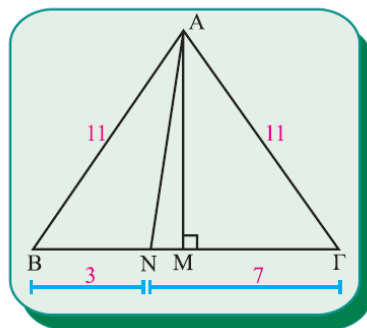
Λύση

Έστω AM η διάμεσος άρα και ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$. Αφού $BN < N\Gamma$ είναι $\hat{A}NB > 90^\circ$. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABN έχουμε:

$$AB^2 = BN^2 + NA^2 + 2BN \cdot NM \quad \text{ή}$$

$$11^2 = 3^2 + NA^2 + 2 \cdot 3(7 - 5) \Leftrightarrow 121 = 9 + NA^2 + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow NA^2 = 100 \Leftrightarrow NA = 10$$



Άσκηση 6

Με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, γράφουμε κύκλο. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου, να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$MA^2 + MB^2 + MI^2 + MD^2$ είναι σταθερό.

Λύση

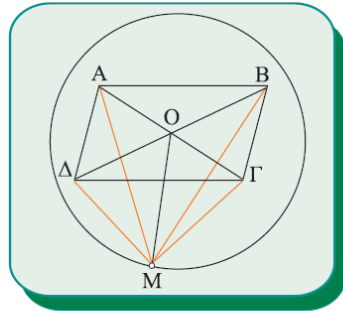
Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Άρα στα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΑΓ η ΜΟ είναι διάμεσος. Από το θεώρημα των διαμέσεων στα τρίγωνα αυτά έχουμε:

$$MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \frac{BD^2}{2} \quad (1)$$

$$MA^2 + MG^2 = 2MO^2 + \frac{AG^2}{2} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε

$$MA^2 + MB^2 + MI^2 + MD^2 = 4MO^2 + \frac{BD^2}{2} + \frac{AG^2}{2} \text{ που είναι σταθερό.}$$



Άσκηση 7

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma = \sqrt{a^2 + b^2} + ab$ να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\Gamma}$.

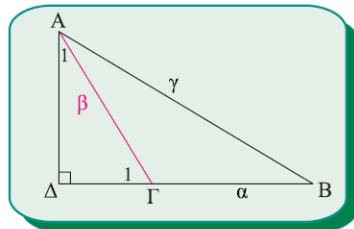
Λύση

Έχουμε $\gamma^2 = a^2 + b^2 + ab$ (1) οπότε $\gamma^2 > a^2 + b^2$ άρα

$\hat{\Gamma} > 90^\circ$. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα για την αμβλεία γωνία Γ στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\gamma^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot \Gamma\Delta$ (2). Από (1), (2) έχουμε:

$$ab = 2\Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{ab}{2}. \text{ Άρα } \hat{A}_1 = 30^\circ \text{ αφού το } \Delta\Gamma\Delta \text{ τρί-}$$

γωνο είναι ορθογώνιο θα είναι $\hat{\Gamma}_1 = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma}_2 = 120^\circ$.

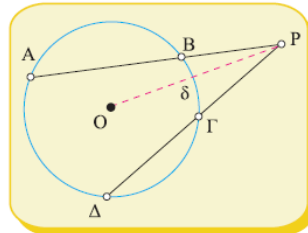
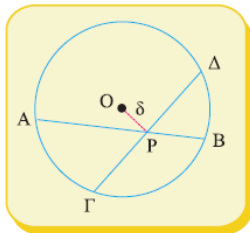


ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

Θεώρημα Ι

Αν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου ή οι προεκτάσεις τους, τέμνονται σ' ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει:

$$PA \cdot PB = PG \cdot PD$$



Εφαρμογή 1 (αντίστροφο του θεωρήματος Ι)

Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ έτσι ώστε: $PA \cdot PB = PG \cdot PD$, τότε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ και Δ είναι εγγράψιμο.

Παρατήρηση 1

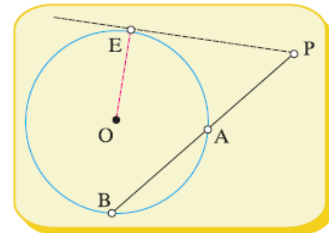
Αν το σημείο Ρ βρίσκεται **εντός του κύκλου** τότε είναι: $PA \cdot PB = R^2 - \delta^2$

όπου $\delta = OP$ (Ο το κέντρο του κύκλου) και R η ακτίνα του κύκλου.

Αν το σημείο Ρ βρίσκεται **εκτός του κύκλου** τότε: $PA \cdot PB = \delta^2 - R^2$

Θεώρημα ΙΙ

Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο, R), φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β, ισχύει: $PE^2 = PA \cdot PB$



Εφαρμογή 2 (αντίστροφο του θεωρήματος ΙΙ)

Αν θεωρήσουμε ευθεία ε και τρία σημεία της Ρ, Α, Β, όπου το σημείο Ρ βρίσκεται εκτός του τμήματος ΑΒ και ένα σημείο Ε εκτός της ε τέτοιο ώστε να ισχύει: $PE^2 = PA \cdot PB$, το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Ε.

Ορισμός

Έστω Ρ σημείο του επιπέδου του κύκλου (Ο, R), με $\delta = OP$. Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται **δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R)** και συμβολίζεται $\Delta_{(O,R)}^P$.

Είναι $\Delta_{(O,R)}^P = \delta^2 - R^2$

Παρατήρηση 2

Το πρόσημο του αριθμού $\delta^2 - R^2$ καθορίζει τη θέση του Ρ ως προς τον κύκλο.

Συγκεκριμένα:

- | | |
|--|---------------------------|
| α. Αν το σημείο Ρ βρίσκεται εντός του κύκλου είναι: | $\Delta_{(O,R)}^P < 0$ |
| β. Αν το σημείο Ρ βρίσκεται εκτός του κύκλου είναι: | $\Delta_{(O,R)}^P > 0$ |
| γ. Αν το σημείο Ρ είναι σημείο του κύκλου είναι: | $\Delta_{(O,R)}^P = 0$ |
| δ. Αν το σημείο Ρ συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου είναι: | $\Delta_{(O,R)}^P = -R^2$ |

Άσκηση 1

Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔΜ συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου.

Λύση

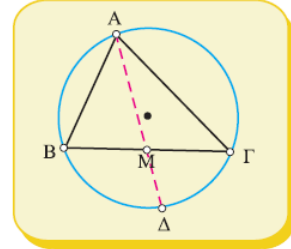
Αφού η ΑΜ είναι διάμεσος ισχύει $BM = MG$.

Ακόμα ισχύει $AM \cdot MD = MB \cdot MG$ οπότε :

$$MD = \frac{MB \cdot MG}{AM} = \frac{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}}{\mu_a} = \frac{\alpha^2}{4\mu_a}$$

Επειδή $\mu_a^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$ έχουμε:

$$MD = \frac{\alpha^2}{2\sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}}$$



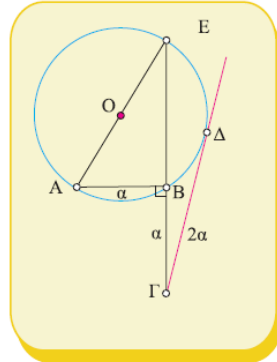
Άσκηση 2

Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε μια χορδή $AB = a$ και εκτός του κύκλου φέρνουμε την ημιευθεία Bx κάθετη στην AB . Επί της Bx θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma = a$ και φέρνουμε ένα εφαπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ στον κύκλο. Αν ισχύει $\Gamma\Delta = 2a$, να εκφράσετε την ακτίνα R συναρτήσει του a .

Λύση

Έστω E το σημείο που τέμνει η ΓB τον κύκλο. Η εγγεγραμμένη γωνία ABE είναι ορθή. Επομένως η AE είναι διάμετρος του κύκλου

Ισχύει $\Gamma B \cdot \Gamma E = \Gamma\Delta^2$. Σύμφωνα με τα δεδομένα παίρνουμε :



$$a \cdot (a + BE) = 4a^2 \text{ δηλαδή } a + BE = 4a \Leftrightarrow$$

$$BE = 4a - a \Leftrightarrow BE = 3a.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABE παίρνουμε :

$$AB^2 + BE^2 = AE^2 \Leftrightarrow a^2 + 9a^2 = 4R^2 \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10:ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Ορισμός 1

Πολυγωνικό χωρίο ονομάζουμε κάθε πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία.

Ορισμός 2

Εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου S ονομάζεται ο θετικός αριθμός λ όπου $S = \lambda \cdot \sigma$ και σ ένα άλλο πολυγωνικό χωρίο, το οποίο λαμβάνουμε ως μονάδα μέτρησης.

Το εμβαδόν ενός πολυγώνου, π.χ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ συμβολίζεται $(AB\Gamma)$ ή $E_{AB\Gamma}$.

Ορισμός 3

Ίσα πολυγωνικά χωρία ονομάζονται τα χωρία που έχουν ίσα αντίστοιχα πολύγωνα.

Ορισμός 4

Ισοδύναμα ή ισεμβαδικά ονομάζονται τα σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν.

Δύο ισοδύναμα σχήματα έχουν την ίδια έκταση χωρίς να έχουν την ίδια μορφή. Εννοείται ότι δύο ισοδύναμα σχήματα δεν είναι απαραίτητο να είναι ίσα

Αξίωμα 1

Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.

Αξίωμα 2

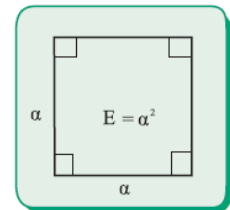
Αν ένα πολυγωνικό χωρίο χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.

Αξίωμα 3

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 μονάδας είναι 1 τετραγωνική μονάδα.

Θεώρημα 1

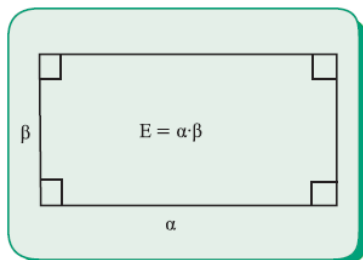
Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς a είναι a^2 , δηλαδή $E = a^2$.



Θεώρημα 2

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του, δηλαδή

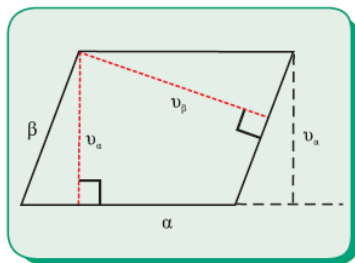
$$E = \alpha \cdot \beta$$



Θεώρημα 3

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μίας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά αυτή, δηλαδή

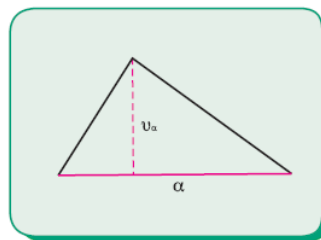
$$E = \alpha \cdot v_{\alpha} = \beta \cdot v_{\beta}$$



Θεώρημα 4

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος, δηλαδή

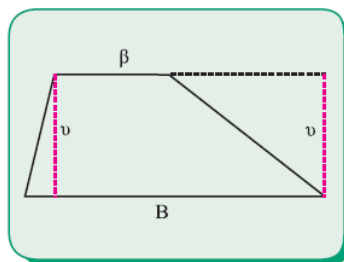
$$E = \frac{1}{2} \alpha v_{\alpha} = \frac{1}{2} \beta v_{\beta} = \frac{1}{2} \gamma v_{\gamma}$$



Θεώρημα 5

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του, δηλαδή

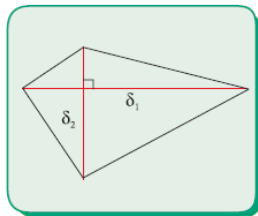
$$E = \frac{\beta + B}{2} \cdot v$$



Θεώρημα 6

Το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιες ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, δηλαδή

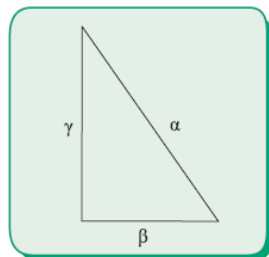
$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$



Πόρισμα 1

Το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο των κάθετων πλευρών του, δηλαδή

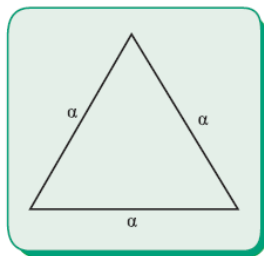
$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma$$



Πόρισμα 2

Το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α δίνεται από τη σχέση :

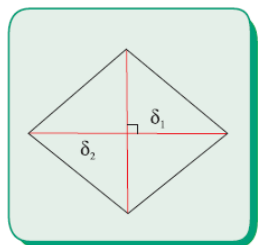
$$E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$$



Πόρισμα 3

Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, δηλαδή :

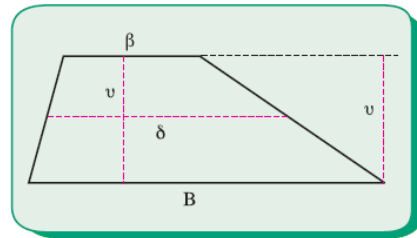
$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$



Πόρισμα 4

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του, δηλαδή είναι

$$E = \delta \cdot v$$



Άσκηση 1

Να βρεθεί το εμβαδόν τριγώνου με πλευρές $AB = k$, $AG = 3k$ και $A = 120^\circ$ και να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου, που είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο ABG .

Λύση

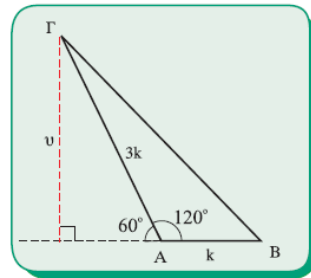
Είναι :

$$(ABG) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot 3k \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot k \cdot 3k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3k^2 \sqrt{3}}{4}$$

όπου $v = 3k \eta\mu 60^\circ$.

Το εμβαδόν τετραγώνου δίνεται από τη σχέση $E = a^2$, όπου a η πλευρά του. Το τετράγωνο επομένως είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο αν ισχύει :

$$a^2 = \frac{3k^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow a = \frac{k\sqrt{3\sqrt{3}}}{2}$$



Άσκηση 2

Το ύψος ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς a ισούται με το ύψος ενός τραπεζίου. Αν το άθροισμα των βάσεων του τραπεζίου είναι 10 μέτρα και το τραπέζιο είναι ισοδύναμο με το ισόπλευρο τρίγωνο να βρεθούν :

α. η πλευρά a του ισοπλεύρου τριγώνου

β. το εμβαδόν του τραπεζίου

Λύση

Το ύψος ενός ισοπλεύρου τριγώνου δίνεται

$$\text{από τη σχέση } v = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

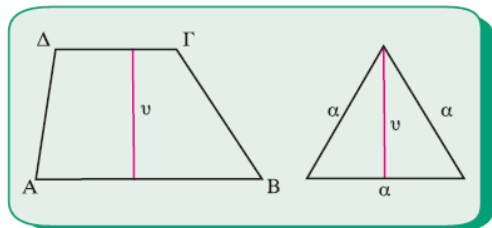
Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$E = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$$

Επειδή το τραπέζιο είναι ισοδύναμο με το ισόπλευρο τρίγωνο έχουμε :

$$\alpha. \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{5a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = 10 \text{ μέτρα και}$$

$$\beta. E = \frac{5 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}.$$



Άσκηση 3

Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 4 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 136 m². Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου αυτού.

Λύση

Έστω τετράγωνο πλευράς x . Το εμβαδόν του είναι x^2 . Αν η πλευρά του αυξηθεί κατά 4 γίνεται $x + 4$ και το εμβαδόν του γίνεται $(x + 4)^2$.

Η αύξηση του εμβαδού είναι $(x + 4)^2 - x^2$. Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης αυτή η αύξηση είναι 136.

Έτσι φτιάχνουμε την ισότητα: $(x + 4)^2 - x^2 = 136 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 - x^2 = 136 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8x = 120 \Leftrightarrow x = 15 \text{ m}$$

Άσκηση 4

Η περίμετρος ενός ρόμβου ΑΒΓΔ είναι 36 cm και η απόσταση των δύο απέναντι πλευρών του είναι 5 cm. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ρόμβου.

Λύση

Αφού η περίμετρος του ρόμβου είναι 36 cm η κάθε πλευρά του

$$\text{είναι } \frac{36 \text{ cm}}{4} = 9 \text{ cm.}$$

Η απόσταση των δύο πλευρών του είναι το ύψος του ρόμβου.

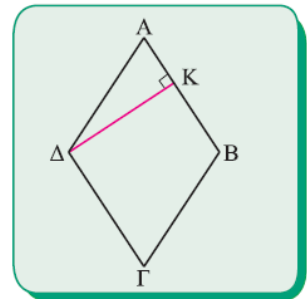
Αφού λοιπόν γνωρίζουμε την πλευρά του και το ύψος του, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του, χρησιμοποιούμε τον τύπο του εμβαδού του παραλληλογράμμου. Δηλ. $E = \text{βάση} \cdot \text{ύψος}$.

$$\text{Επομένως } (ΑΒΓΔ) = ΑΒ \cdot ΔΚ = 9 \cdot 5 = 45.$$

Άρα το εμβαδόν είναι 45 cm².

Προσοχή!

Ο ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο. Επομένως για τον υπολογισμό του εμβαδού του, μπορούμε να χρησιμοποιούμε είτε τον τύπο του εμβαδού του παραλληλογράμμου είτε του ρόμβου.



Άσκηση 5

Να υπολογιστεί το εμβαδό κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αν είναι $AB = 8$, $AG = 12$,

$AD = 6$, $GD = 6\sqrt{3}$ και $BD = 10$

Λύση

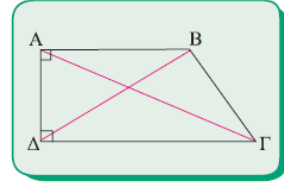
$$\text{Είναι } AB^2 + AD^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 =$$

$$10^2 = BD^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$DG^2 + AD^2 = (6\sqrt{3})^2 + 6^2 = 108 + 36 = 144 =$$

$$12^2 = AG^2 \Leftrightarrow \hat{D} = 90^\circ$$

Άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο τραπέζιο. Για το εμβαδό του ισχύει:



$$E = \frac{(AB + GD) \cdot AD}{2} = \frac{(8 + 6\sqrt{3}) \cdot 6}{2} = 3(8 + 6\sqrt{3}).$$

Άσκηση 6

Αν ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι ρόμβος πλευράς a και τετράγωνο πλευράς a αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ρόμβου είναι μικρότερο ή ίσο του εμβαδού του τετραγώνου.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του ρόμβου ισούται με το ημγινόμενο των διαγωνίων του και ότι το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς a ισούται με a^2 . Άρα αρκεί

$$\text{να δείξουμε ότι } a^2 \geq \frac{1}{2} \delta_1 \cdot \delta_2$$

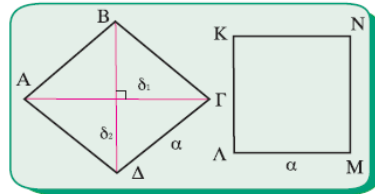
$$\text{Στο ρόμβο : } a^2 = \left(\frac{1}{2}\delta_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\delta_2\right)^2 = \frac{1}{4}(\delta_1^2 + \delta_2^2)$$

Όμως από την άλγεβρα είναι γνωστό ότι για κάθε x και y ισχύει :

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \text{ επομένως } \delta_1^2 + \delta_2^2 \geq 2\delta_1\delta_2 \text{ και λόγω της παραπάνω σχέσης είναι :}$$

$$a^2 = \frac{1}{4}(\delta_1^2 + \delta_2^2) \geq \frac{1}{4}2\delta_1\delta_2 = \frac{\delta_1\delta_2}{2}.$$

$$\text{Άρα } a^2 \geq \frac{\delta_1\delta_2}{2}$$



Άσκηση 7

Από ένα σημείο E της διαγωνίου $ΒΔ$ παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Να δείξετε ότι τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται εκατέρωθεν της $ΒΔ$ είναι ισοδύναμα.

Λύση

Ως γνωστό η διαγώνιος παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Έτσι έχουμε:

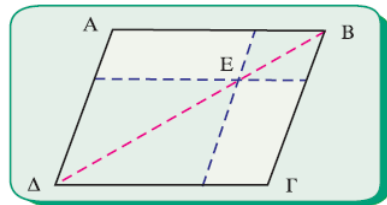
Το παραλληλόγραμμα $ΑΒΓΔ$ που χωρίζεται από τη διαγώνίό του στα ισοδύναμα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$. Είναι $(ΑΒΔ) = (ΒΓΔ)$ (1).

Ομοίως στο παραλληλόγραμμα $ΚΕΝΔ$ είναι:
 $(ΚΕΔ) = (ΔΕΝ)$ (2)

και στο παραλληλόγραμμα $ΜΕΛΒ$ είναι:
 $(ΜΕΒ) = (ΒΕΛ)$ (3)

Αφαιρώντας από την (1) τις (2) και (3) έχουμε:

$$(ΑΒΔ) - (ΚΕΔ) - (ΜΕΒ) = (ΒΓΔ) - (ΔΕΝ) - (ΒΕΛ) \text{ ή } (ΚΑΜΕ) = (ΝΕΛΓ).$$



Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν τριγώνου $ΑΒΓ$, με μήκη πλευρών a, b, c , προκύπτουν οι επόμενοι τύποι:

1. $E = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}$ (Τύπος του Ήρωνα)

Με τον τύπο του Ήρωνα μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν τριγώνου όταν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του.

2. Ο τύπος $E = \frac{a b \gamma}{4R}$ συνδέει το εμβαδόν (E) του τριγώνου με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Συνήθως χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε την ακτίνα, δεδομένου ότι γνωρίζουμε το εμβαδόν. Το ίδιο ισχύει και με τον τύπο $E = \tau \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

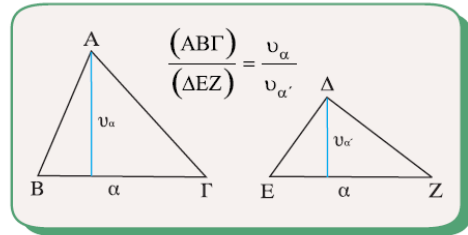
3. Ο τύπος $E = \frac{1}{2} b \gamma \eta\mu A = \frac{1}{2} \gamma a \eta\mu B = \frac{1}{2} a b \eta\mu \Gamma$ μας δίνει το εμβαδόν, όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές του τριγώνου και την περιεχόμενη σε αυτές γωνία.

4. Με συνδυασμό των τύπων $E = \frac{1}{2} b \gamma \eta\mu A$ και $E = \frac{a b \gamma}{4R}$ προκύπτει ο νόμος των ημιτόνων:

$$\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{b}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R, \text{ ο οποίος είναι χρήσιμος για την επίλυση ενός τριγώνου.}$$

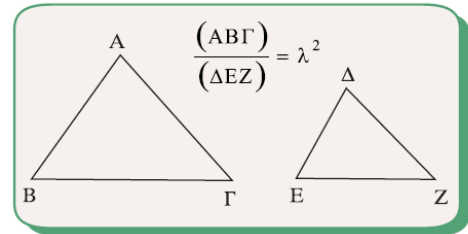
Θεώρημα 1

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.



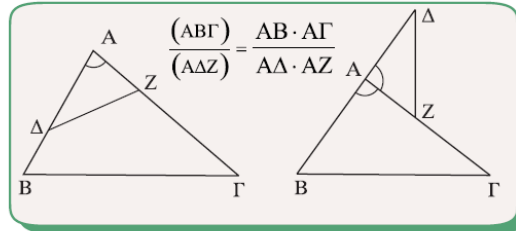
Θεώρημα 2

Αν δύο τρίγωνα (ή οποιαδήποτε πολύγωνα) είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.



Θεώρημα 3

Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις ίσες ή παραπληρωματικές γωνίες.



Άσκηση 1

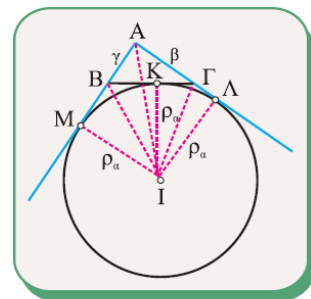
Να δείξετε ότι $(ABΓ) = \rho_a(\tau - \alpha) = \rho_b(\tau - \beta) = \rho_\gamma(\tau - \gamma)$, όπου $\rho_a, \rho_b, \rho_\gamma$ είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } (ABΓ) &= (AIB) + (AIG) - (IBΓ) = \\ &= \frac{1}{2} \gamma IM + \frac{1}{2} \beta IL - \frac{1}{2} \alpha IK = \frac{1}{2} \gamma \rho_a + \frac{1}{2} \beta \rho_a - \frac{1}{2} \alpha \rho_a = \\ &= \frac{1}{2} \rho_a (\beta + \gamma - \alpha). \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } \tau - \alpha = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \alpha = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2\alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}.$$

Επομένως $E = \rho_a(\tau - \alpha)$. Ομοίως και με τους άλλους δύο τύπους.



Άσκηση 2

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) να δείξετε ότι $\rho = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.

Λύση

$$\text{Είναι } (AB\Gamma) = \tau \rho = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \rho \quad (1) \quad \text{και} \quad (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \beta \gamma \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε: } \frac{1}{2} \beta \gamma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \rho \Leftrightarrow \beta \gamma = (\alpha + \beta + \gamma) \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha + \beta + \gamma} .$$

Άσκηση 3

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι $\alpha \geq 2\sqrt{\rho \cdot \rho_a}$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου και ρ_a η ακτίνα του παρεγγεγραμμένου κύκλου που εφάπτεται στην πλευρά α .

Λύση

$$\text{Είναι } \left. \begin{array}{l} E = \tau \cdot \rho \\ E = (\tau - \alpha) \rho_a \text{ (άσκηση 1)} \end{array} \right\} \text{ Άρα } E^2 = \rho \cdot \rho_a \cdot \tau (\tau - \alpha) \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Ήρωνα η σχέση (1) γίνεται:

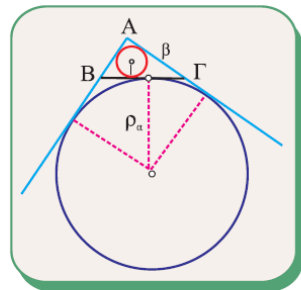
$$\begin{aligned} \tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma) &= \rho \cdot \rho_a \tau (\tau - \alpha) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\tau - \beta)(\tau - \gamma) &= \rho \cdot \rho_a \end{aligned} \quad (2)$$

Ισχύει

$$(\sqrt{x} - \sqrt{\psi})^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\psi} + \sqrt{\psi}^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + \psi \geq 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\psi} \quad (3)$$

Θέτοντας $x = \tau - \beta$ και $\psi = \tau - \gamma$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} \tau - \beta + \tau - \gamma &\geq 2\sqrt{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2\tau - \beta - \gamma \geq 2\sqrt{\rho \cdot \rho_a} \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma - \beta - \gamma \geq 2\sqrt{\rho \cdot \rho_a} \Leftrightarrow \\ \alpha &\geq 2\sqrt{\rho \cdot \rho_a} . \end{aligned}$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Ένα κυρτό πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές ίσες και όλες τις γωνίες ίσες μεταξύ τους.

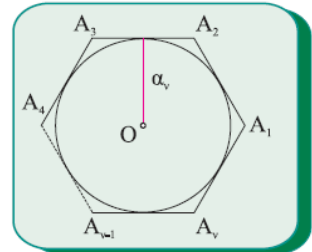
Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρους κύκλους.

Χαρακτηριστικά ενός κανονικού πολυγώνου - Ορισμοί

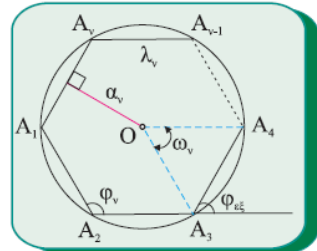
Κέντρο του κανονικού πολυγώνου λέγεται το κοινό κέντρο του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου.

Ακτίνα του κανονικού πολυγώνου λέγεται κάθε ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου που καταλήγει σε κορυφή του πολυγώνου. Συνήθως συμβολίζεται με R_v όπου v το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

Απόστημα του κανονικού πολυγώνου λέγεται η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Συνήθως συμβολίζεται με a_v .



Γωνία του κανονικού πολυγώνου λέγεται η γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του. Συμβολίζεται συνήθως με φ_v . Όλες οι γωνίες του κανονικού πολυγώνου είναι ίσες. Η κάθε γωνία $\hat{\varphi}_v$ είναι εγγεγραμμένη σε $(v-2)$ ίσα τόξα. (Το κάθε τόξο αντιστοιχεί σε μια οποιαδήποτε πλευρά του πολυγώνου).



Γι' αυτές ισχύει ο τύπος

$$\hat{\varphi}_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v}$$

(v είναι ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου).

Κεντρική γωνία του κανονικού πολυγώνου λέγεται η γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές ακτίνες του πολυγώνου. Συμβολίζεται με $\hat{\omega}_v$.

Κάθε κεντρική γωνία είναι επίκεντρη και βαίνει σε τόξο, το οποίο αντιστοιχεί σε μία από τις ίσες πλευρές του πολυγώνου.



Για κάθε μία από τις ίσες κεντρικές γωνίες ισχύει ο τύπος

$$\hat{\omega}_v = \frac{360}{v}$$

όπου v ο αριθμός

των πλευρών του πολυγώνου.

Η κεντρική γωνία και η γωνία του πολυγώνου είναι παραπληρωματικές δηλ. $\hat{\varphi}_v + \hat{\omega}_v = 180^\circ$.

Εξωτερική γωνία του κανονικού πολυγώνου λέγεται η οποιαδήποτε γωνία σχηματίζεται από μία πλευρά του πολυγώνου και την προέκτασή της διαδοχικής πλευράς του.

Όλες οι εξωτερικές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους αφού είναι παραπληρωματικές των αντιστοίχων εσωτερικών ίσων γωνιών.

Για τον ίδιο λόγο η εξωτερική γωνία ισούται με την κεντρική γωνία του πολυγώνου.

Ισχύει δηλ.

$$\hat{\varphi}_{\text{εξ}} = \hat{\omega}_v$$

Ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων.

- Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Η γωνία του καθενός είναι $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, επομένως έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες.

Οι πλευρές τους είναι ανάλογες.

Ο λόγος ομοιότητάς τους ισούται με το λόγο των πλευρών τους, το λόγο των ακτίνων τους, το λόγο των αποστημάτων τους και το λόγο των περιμέτρων τους.

λόγος ομοιότητας	=	λόγος πλευρών	=	λόγος αποστημάτων	=	λόγος ακτίνων	=	λόγος περιμέτρων
λ	=	$\frac{\lambda_v}{\lambda'_v}$	=	$\frac{\alpha_v}{\alpha'_v}$	=	$\frac{R}{R'}$	=	$\frac{\Pi_v}{\Pi'_v}$

Ο λόγος των εμβαδών τους ως γνωστόν ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

$$\text{λόγος εμβαδών} = (\text{λόγος ομοιότητας})^2$$

- Κάθε ακτίνα διχοτομεί την αντίστοιχη γωνία κορυφής.

Τύποι που αινδύνουν τα στοιχεία ενός κανονικού πολυγώνου.

$$\alpha_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2$$

όπου α_v το απόστημα, λ_v η πλευρά και R η

ακτίνα του πολυγώνου

(δηλ. η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου).

Ο τύπος αυτός συνδέει την πλευρά με το απόστημα και είναι πολύ χρήσιμος.

$$P_v = n \cdot \lambda_v$$

όπου P_v η περίμετρος του n -γώνου (πολύγωνο με n πλευρές).

$$E_v = \frac{1}{2} P_v \cdot \alpha_v$$

όπου E_v το εμβαδόν του πολυγώνου.

Γωνία	Κεντρική γωνία	Πλευρά λ_n	Απόστημα α_n
Τετράγωνο $\hat{\phi}_4 = 90^\circ$	$\hat{\omega}_4 = 90^\circ$	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$
Κανονικό εξάγωνο $\hat{\phi}_6 = 120^\circ$	$\hat{\omega}_6 = 60^\circ$	$\lambda_6 = R$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$
Ισόπλευρο τρίγωνο $\hat{\phi}_3 = 60^\circ$	$\hat{\omega}_3 = 120^\circ$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$
Κανονικό δεκάγωνο $\hat{\phi}_{10} = 144^\circ$	$\hat{\omega}_{10} = 36^\circ$	$\lambda_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\alpha_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Κανονικό πεντάγωνο $\hat{\phi}_5 = 108^\circ$	$\hat{\omega}_5 = 72^\circ$	$\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\alpha_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$
Κανονικό οκτάγωνο $\hat{\phi}_8 = 135^\circ$	$\hat{\omega}_8 = 45^\circ$	$\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\alpha_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Άσκηση 1

α. Να βρεθεί η γωνία, η κεντρική γωνία και η εξωτερική γωνία ενός κανονικού:

- i. πενταγώνου ii. δεκαγώνου iii. δωδεκαγώνου

β. Ποιο κανονικό ν - γωνο έχει γωνία ίση με:

- i. 120° ii. 150° iii. 205°

γ. Ποιο κανονικό ν - γωνο έχει κεντρική γωνία ίση με:

- i. 18° ii. 6°

Λύση

α. Για τη γωνία $\hat{\phi}_v$ ενός κανονικού ν - γώνου ισχύει $\hat{\phi}_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v}$ ενώ για την κεντρική

γωνία $\hat{\omega}_v$ ισχύει $\hat{\omega}_v = \frac{360^\circ}{v}$. Έτσι έχουμε:

$$\text{i. } \hat{\phi}_5 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ \text{ και } \hat{\omega}_5 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Η εξωτερική γωνία ισούται με την κεντρική.

$$\text{ii. } \hat{\phi}_{10} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{10} = 144^\circ$$

$$\hat{\omega}_{10} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

$$\hat{\phi}_{\text{εξ}} = 36^\circ$$

$$\text{iii. } \hat{\phi}_{12} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{12} = 150^\circ$$

$$\hat{\omega}_{12} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$\hat{\phi}_{\text{εξ}} = 30^\circ.$$

β. i. Είναι

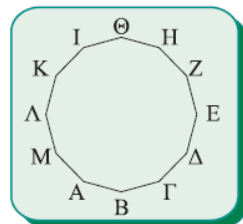
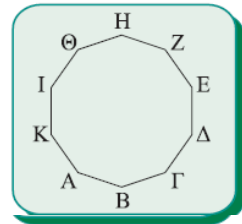
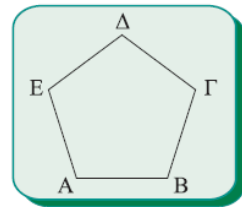
$$\hat{\phi}_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v} \Leftrightarrow 120^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v} \Leftrightarrow \frac{360^\circ}{v} = 60^\circ \Leftrightarrow v = 6.$$

Άρα το 6 - γωνο έχει γωνία 120° .

$$\text{ii. } 150^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v} \Leftrightarrow \frac{360^\circ}{v} = 30^\circ \Leftrightarrow v = 12.$$

Δηλ. το 12 - γωνο έχει γωνία 150° .

$$\text{iii. } 205^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v} \Rightarrow v = 14,4$$



Επομένως δεν υπάρχει n - γωνο με γωνία 205° . (πρέπει το n να είναι ακέραιος).

$$\gamma. \text{Είναι } \hat{\omega}_n = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\text{i. } 18^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow n = 20 \text{ δηλ. το } 20 - \text{γωνο έχει κεντρική γωνία } 18^\circ.$$

$$\text{ii. } 6^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow n = 60. \text{ Επομένως το } 60 - \text{γωνο έχει κεντρική γωνία } 6^\circ.$$

Άσκηση 2

Σε κάθε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ να αποδείξετε ότι:

- κάθε διαγώνιος χωρίζει το πεντάγωνο σε ένα ισοσκελές τραπέζιο και σε ένα ισοσκελές τρίγωνο.
- από τα σχήματα, στα οποία χωρίζεται τα πεντάγωνο με δύο διαγωνίους του που δεν έχουν κοινό άκρο, το ένα είναι ρόμβος.

γ. αν Z είναι το σημείο τομής της $ΑΓ$ με τη $ΒΔ$, τότε είναι $AZ^2 = AG \cdot ZG$.

Λύση

α. Θεωρούμε την διαγώνιο $ΑΓ$ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ.

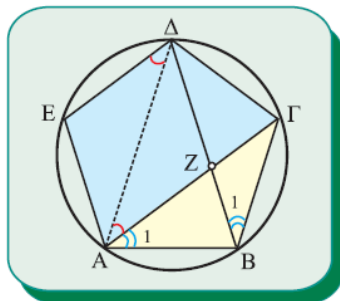
Τότε αυτή χωρίζει το πεντάγωνο στο τετράπλευρο $ΑΓΔΕ$ και στο τρίγωνο $ΑΒΓ$.

Επειδή το πεντάγωνο είναι κανονικό θα ισχύει:

$$AB = BG = GD = DE = EA.$$

Αφού $AB = BG$ το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

Ακόμη επειδή το πεντάγωνο είναι κανονικό θα είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



Είναι $GD = EA$ συνεπώς $\widehat{GD} = \widehat{EA}$. Αν λοιπόν φέρουμε

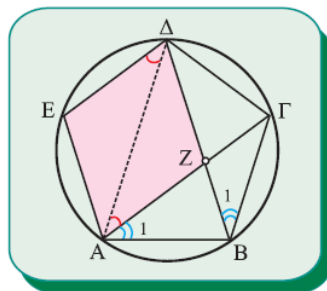
βοηθητικά την $ΑΔ$ οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{\Gamma AD}, \hat{EAD}$ θα είναι ίσες. Επομένως $AG \parallel$

ED γιατί έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\hat{\Gamma AD}, \hat{EAD}$ ίσες. Άρα το $ΑΓΔΕ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

- Θεωρούμε τις διαγωνίους $ΑΓ, ΒΔ$ του κανονικού πενταγώνου, $ΑΒΓΔΕ$ οι οποίες έστω ότι τέμνονται στο Z . Όμοια με το προηγούμενο ερώτημα μπορούμε να αποδείξουμε ότι $ΑΓ \parallel ED$ και $ΒΔ \parallel EA$. Άρα το τετράπλευρο $ΑΖΔΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή ακόμη ισχύει $DE = EA$ συμπεραίνουμε ότι το $ΑΖΔΕ$ είναι ρόμβος.

- Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ, ΖΒΓ$ έχουν τη γω-



νία τους $\hat{\Gamma}$ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εγγεγραμμένες που

βαίνουν στα ίσα τόξα $\widehat{B\Gamma}, \widehat{\Gamma\Delta}$ αντίστοιχα).

Άρα ισχύει $\triangle AB\Gamma \sim \triangle ZB\Gamma$ και έχουμε: $\frac{B\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow B\Gamma^2 = A\Gamma \cdot Z\Gamma$

Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι το $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος. Άρα ισχύει $AZ = \Delta E = B\Gamma$ και η τελευταία ισότητα γίνεται: $AZ^2 = A\Gamma \cdot Z\Gamma$.

Άσκηση 3

Αν ένα κανονικό n -γώνο είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) και εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και α_n είναι το απόστημα κανονικού n -γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, ρ) , να δείξετε ότι: $R\alpha_n = \rho^2$.

Λύση

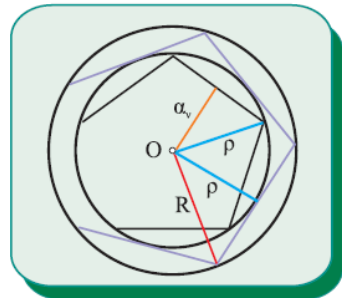
Γνωρίζουμε το θεώρημα “Αν δύο κανονικά πολύγωνα έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών, είναι όμοια και τότε ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των αποστημάτων τους και με το λόγο των ακτίνων τους”.

- Το κανονικό n -γώνο που είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο (O, ρ) και εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) έχει ακτίνα R και απόστημα ρ .

- Το κανονικό n -γώνο που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, ρ) έχει ακτίνα ρ και απόστημα α_n .

Σύμφωνα με το θεώρημα τα δύο κανονικά n -γώνα είναι όμοια και ο λόγος των αποστημάτων τους είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων τους. Δηλαδή έχουμε:

$$\frac{\rho}{\alpha_n} = \frac{R}{\rho} \Leftrightarrow R\alpha_n = \rho^2$$



Άσκηση 4

Ναδειχτεί ότι το εμβαδόν E_{2n} ενός κανονικού $2n$ -γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R)

είναι $E_{2n} = \frac{1}{2} P_n R$ όπου P_n είναι η περίμετρος του κανονικού n -γώνου ακτίνας R .

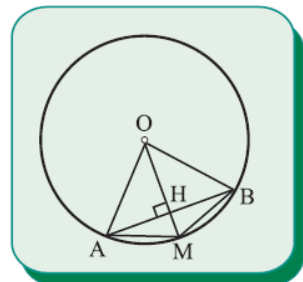
Λύση

Έστω AB μια πλευρά του εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R) κανονικού n -γώνου. Τότε θα ισχύει $AB = \lambda_n$.

Επειδή το κανονικό $2n$ -γώνο είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο (O, R) , αν M είναι το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$ θα ισχύει $AM = MB = \lambda_{2n}$.

Όπως γνωρίζουμε η OM είναι κάθετη στην AB και διέρχεται από το μέσο της H .

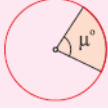
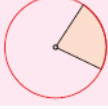
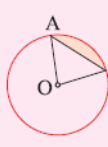
Επομένως το τρίγωνο OAM έχει εμβάδο:



$$(OAM) = \frac{1}{2} OM \cdot AH = \frac{1}{2} OM \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{4} AB \cdot OM = \frac{1}{4} \lambda_v \cdot R.$$

Άρα το εμβαδό E_{2v} του κανονικού $2v$ -γωνου είναι:

$$E_{2v} = 2v(OAM) = 2v \frac{1}{4} \lambda_v \cdot R = \frac{1}{2} v \lambda_v \cdot R = \frac{1}{2} P_v \cdot R$$

Μήκος κύκλου		$L = 2\pi R$
Μήκος τόξου μ°		$\ell = \frac{\pi R \mu}{180}$
Μήκος τόξου α rad		$\ell = \alpha \cdot R$
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου		$E = \pi R^2$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ°		$E = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα α rad		$E = \frac{1}{2} \alpha R^2$
Εμβαδόν κυκλικού τμήματος		$E = E_{\text{τομ. OAB}} - E_{\text{τρ. AOB}}$

Β.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Το μήκος ενός τόξου κύκλου με ακτίνα $R = 12$ είναι $S = 3\pi$. Να βρείτε πόσων μοιρών είναι το τόξο.

Λύση

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι το μήκος S ενός τόξου μ^0 κύκλου ακτίνας R , δίνεται από

$$\text{τον τύπο: } S = \frac{\pi R \mu}{180}.$$

Άρα με αντικατάσταση όπου $S = 3\pi$ και $R = 12$ παίρνουμε: $3\pi = \frac{\pi \cdot 12 \mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 45^0$.

Άσκηση 2

Δίνεται ένας κύκλος (O, R) και διαδοχικά τα σημεία του A, B, Γ , ώστε να είναι $AB = R\sqrt{2}$, $B\Gamma = R\sqrt{3}$. Να βρεθούν τα μήκη των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma A}$ ως συνάρτηση του R .

Λύση

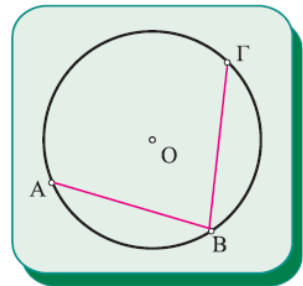
Όπως γνωρίζουμε ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο

εγγεγραμμένα σε κύκλο (O, R) έχουν πλευρές:

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= R\sqrt{2} \\ \lambda_3 &= R\sqrt{3} \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι χορδές $AB, B\Gamma$ του κύκλου (O, R) είναι πλευρές τετραγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου, εγγεγραμμένα στον κύκλο αυτό αντίστοιχα.

Επειδή το τετράγωνο έχει κεντρική γωνία $\widehat{\omega}_4 = 90^0$ και το



ισόπλευρο τρίγωνο έχει κεντρική γωνία $\widehat{\omega}_3 = 120^0$ συμπεραίνουμε ότι:
$$\begin{cases} \widehat{AB} = 90^0 \\ \widehat{B\Gamma} = 120^0 \end{cases}$$

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι το μήκος S ενός τόξου μ^0 κύκλου ακτίνας R , δίνεται από

$$\text{τον τύπο: } S = \frac{\pi R \mu}{180}.$$

• Άρα το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ είναι: $S_1 = \frac{\pi R 90}{180} = \frac{\pi}{2} R$.

• Το μήκος του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ είναι: $S_2 = \frac{\pi R 120}{180} = \frac{2\pi}{3} R$

• Το μήκος το τόξου $\widehat{\Gamma A}$ επειδή ισχύει: $\widehat{\Gamma A} = 360^0 - \widehat{AB} - \widehat{B\Gamma} = 360^0 - 90^0 - 120^0 = 150^0$

$$\text{είναι: } S_3 = \frac{\pi R 150}{180} = \frac{5\pi}{6} R.$$

Άσκηση 3

Δίνεται ένας κύκλος ($O, R = 1$) και ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 1, τοποθετημένο, όπως φαίνεται στο σχήμα i. Στρέψουμε το τετράγωνο γύρω από το σημείο Γ κατά τη φορά στροφής των δεικτών ενός ρολογιού μέχρι το Δ να γίνει σημείο του κύκλου. Να βρεθεί το μήκος του τόξου που διαγράφεται από το A .

Λύση

Έστω A', B', Δ' οι νέες κορυφές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ όταν στραφεί γύρω από το σημείο Γ (Βλέπε σχήμα ii).

Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο τόξο $\widehat{AA'}$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$. Αφού η $A\Gamma$ είναι διαγώνιος του τετραγώνου, έχουμε:

$$A\Gamma = AB \cdot \sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Όπως γνωρίζουμε η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) είναι $\lambda_6 = R$.

Επειδή λοιπόν ισχύει $B\Gamma = \Gamma\Delta' = R$ συμπεραίνουμε ότι οι χορδές $B\Gamma, \Gamma\Delta'$ είναι διαδοχικές πλευρές κανονικού εξαγώνου

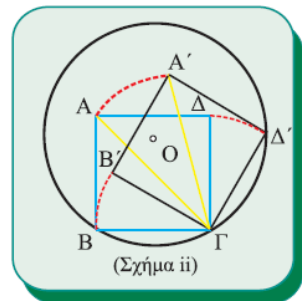
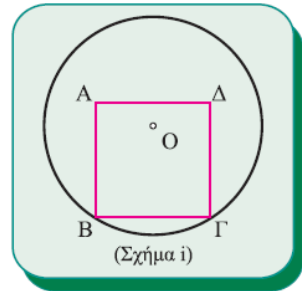
εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R). Άρα η γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta'}$ είναι γωνία κανονικού εξαγώνου και ισχύει:

$$\widehat{B\Gamma\Delta'} = \hat{\phi}_6 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$$

Επειδή οι διαγώνιες του τετραγώνου διχοτομούν τις γωνίες του, έχουμε: (σχήμα ii)

$$\widehat{A\Gamma A'} = \widehat{B\Gamma\Delta'} - \widehat{A\Gamma B} - \widehat{A'\Gamma\Delta'} = 120^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 30^\circ.$$

Επομένως το τόξο $\widehat{AA'}$ έχει μήκος: $S = \frac{\pi \cdot A\Gamma \cdot 30}{180} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}.$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Κεφάλαιο 7ο: Αναλογίες

Τράπεζα θεμάτων – Β' Λυκείου

Θέμα Β

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (18975)

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=9$ και $A\Gamma=15$. Από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου, φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

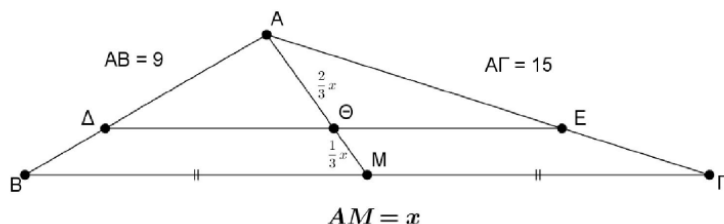
α) Να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$

Μονάδες 15

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta$ και ΓE .

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ



Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου έχει την ιδιότητα να απέχει από την κάθε κορυφή τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

Οπότε, αν $AM = x$, τότε αφού το Θ είναι βαρύκεντρο του $AB\Gamma$ και η AM είναι διάμεσος έχουμε:

$$A\Theta = \frac{2}{3}AM \Rightarrow A\Theta = \frac{2}{3}x \quad \text{και} \quad \Theta M = \frac{1}{3}AM \Rightarrow \Theta M = \frac{1}{3}x$$

α) Από τις παράλληλες DE και BM , με τεμνόμενες AB και AM , από το θεώρημα Θαλή έχουμε,

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Theta}{AM} \Rightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\frac{2}{3}x}{x} \Rightarrow \boxed{\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}} \quad (1)$$

Από τις παράλληλες DE και ΓM , με τεμνόμενες $A\Gamma$ και AM , από το θεώρημα Θαλή έχουμε,

$$\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta M} \Rightarrow \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{\frac{2}{3}x}{\frac{1}{3}x} \Rightarrow \boxed{\frac{AE}{E\Gamma} = 2} \quad (2)$$

β) Έχουμε,

$$(1) \Rightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A\Delta}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow A\Delta = 9 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow A\Delta = 6$$

και

$$(2) \Rightarrow \frac{AE}{EG} = 2 \Rightarrow \frac{AE+EG}{EG} = \frac{2+1}{1} \Rightarrow \frac{AG}{EG} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{15}{EG} = \frac{3}{1} \Rightarrow EG = 15 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow EG = 5$$

Άσκηση Δ1 (18994)

Στην πλευρά AB παραλληλογράμιου ABΓΔ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $BE = \frac{1}{3}AB$ και στην πλευρά ΔΓ θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Delta Z = \frac{1}{3}\Delta\Gamma$. Αν η διαγώνιος ΑΓ τέμνει τις ΔΕ και ΒΖ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

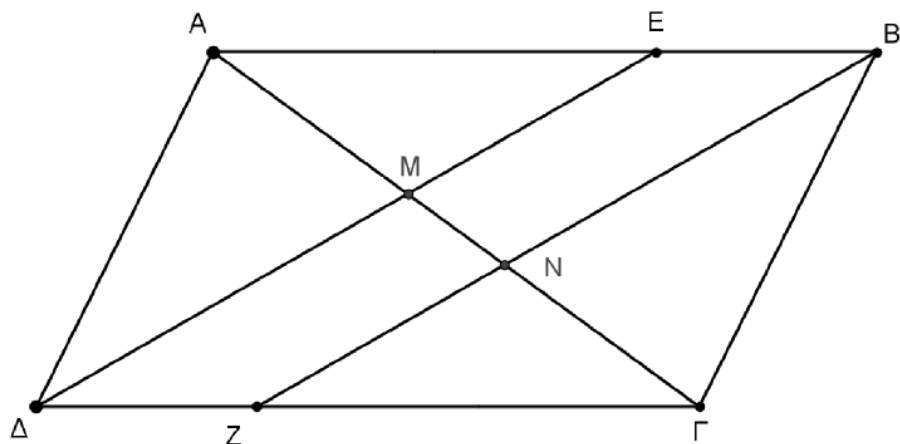
α) $AM = GN = 2MN$

Μονάδες 13

β) $MN = \frac{1}{5}AG$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ



α) Έχουμε ότι το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο $\Rightarrow AB \parallel \Delta\Gamma \Rightarrow BE \parallel \Delta Z$ (1)

$$BE = \frac{1}{3}AB \stackrel{AB=\Delta\Gamma}{\Rightarrow} BE = \frac{1}{3}\Delta\Gamma \stackrel{\Delta Z = \frac{1}{3}\Delta\Gamma}{\Rightarrow} BE = \Delta Z \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι το τετράπλευρο BEΔZ είναι παραλληλόγραμμο άρα $\Delta E \parallel ZB \Rightarrow ME \parallel NB$ (3)

$$BE = \frac{1}{3}AB \Rightarrow AB = 3BE \quad (4)$$

Έτσι, στο τρίγωνο ANB, λόγω της (3) έχουμε (πόρισμα σελίδα 152)

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MN} &= \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{AB - BE}{BE} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \frac{AM}{MN} = \frac{3BE - BE}{BE} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{2BE}{BE} \Rightarrow \frac{AM}{MN} = 2 \Rightarrow AM = 2MN \quad (5) \end{aligned}$$

Το τετράπλευρο BEDZ είναι παραλληλόγραμμο $\Rightarrow DE \parallel ZB \Rightarrow DM \parallel ZN \quad (6)$

$$\Delta Z = \frac{1}{3}\Delta\Gamma \Rightarrow \Delta\Gamma = 3\Delta Z \quad (7)$$

Έτσι, στο τρίγωνο ANB, λόγω της (6) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{IN}{MN} &= \frac{IZ}{\Delta Z} \Rightarrow \frac{IN}{MN} = \frac{\Delta\Gamma - \Delta Z}{\Delta Z} \stackrel{(7)}{\Rightarrow} \frac{IN}{MN} = \frac{3\Delta Z - \Delta Z}{\Delta Z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{IN}{MN} = \frac{2\Delta Z}{\Delta Z} \Rightarrow \frac{IN}{MN} = 2 \Rightarrow IN = 2MN \quad (8) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (5) και (8) έχουμε,

$$AM = IN = 2MN \quad (9)$$

β) Έχουμε:

$$AM + MN + IN + A\Gamma \stackrel{(9)}{\Rightarrow} 2MN + MN + 2MN = A\Gamma \Rightarrow 5MN = A\Gamma \Rightarrow MN = \frac{1}{5}A\Gamma$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (19001)

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ABΓ είναι $\alpha=8$, $\beta=6$ και $\gamma=5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 11)

β) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς AB στις πλευρές AΓ και BΓ.

(Μονάδες 14)

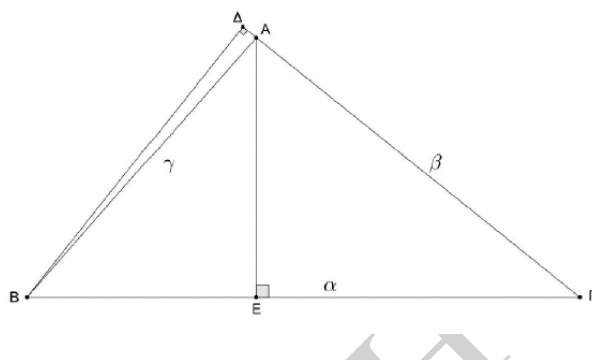
ΛΥΣΗ

α) Είναι,

$$\alpha^2 = 8^2 = 64 \text{ και } \beta^2 + \gamma^2 = 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61,$$

δηλαδή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, οπότε $\hat{A} > 90^\circ$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

β) Επειδή $\hat{A} > 90^\circ$ από τη Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:



$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot AD$, όπου ΑΔ η προβολή της ΑΒ = γ στην πλευρά ΑΓ, άρα είναι:

$$2\beta \cdot AD = \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \quad \text{ή} \quad 2 \cdot 6 \cdot AD = 8^2 - 6^2 - 5^2 = 64 - 61 = 3 \quad \text{ή} \quad AD = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Όμοια αν ΒΕ η προβολή της πλευράς ΑΒ = γ στην ΒΓ τότε:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot BE, \text{ γιατί } \hat{B} < 90^\circ,$$

άρα

$$2\alpha \cdot BE = \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 \quad \text{ή} \quad 2 \cdot 8 \cdot BE = 8^2 + 5^2 - 6^2 = 64 + 25 - 36 = 53 \quad \text{ή} \quad BE = \frac{53}{16}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (19005)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την πλευρά ΒΓ σε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $\frac{BD}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $AB = \frac{3}{4}AG$

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $B\Gamma = \frac{5}{4}AG$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

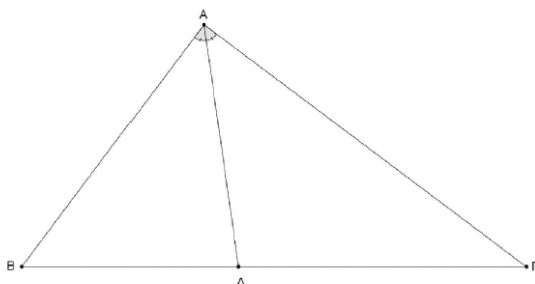
ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, άρα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{DG}$$

Οπότε,

$$\frac{AB}{AG} = \frac{3}{4} \text{ ή } AB = \frac{3}{4}AG$$



β) Επειδή $AB = \frac{3}{4}AG$ συμπεραίνουμε ότι $AB < AG$ και αφού $BG = \frac{5}{4}AG$ προκύπτει ότι $BG > AG$.

Άρα $AB < AG < BG$, δηλαδή η ΒΓ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.

Επομένως:

$$BG^2 = \left(\frac{5}{4}AG\right)^2 = \frac{25}{16}AG^2 \text{ και } AB^2 + AG^2 = \left(\frac{3}{4}AG\right)^2 + AG^2 = \frac{9}{16}AG^2 + AG^2 = \frac{25}{16}AG^2$$

Οπότε $AB^2 + AG^2 = BG^2$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

Θέμα Δ

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (18985)

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται σε ένα σημείο M .

α) Αν το σημείο A είναι μέσο του τόξου $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

i) Όταν η χορδή AB είναι κάθετη στη χορδή $\Gamma\Delta$, τότε $AM \cdot AB = A\Gamma^2$

(Μονάδες 8)

ii) Όταν η χορδή AB δεν είναι κάθετη στη χορδή $\Gamma\Delta$, ισχύει η σχέση $AM \cdot AB = A\Gamma^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

β) Αν για τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται στο M ισχύει ότι $AM \cdot AB = A\Gamma^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι μέσο του τόξου $\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) i) Έχουμε, $OA = OD$ (1), ως ακτίνες του κύκλου.

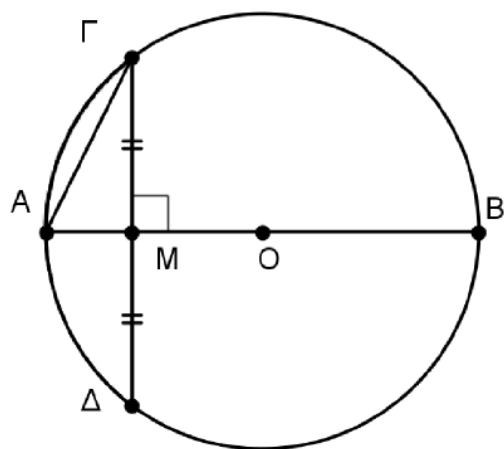
Επειδή A είναι το μέσο του $\widehat{\Gamma\Delta}$ έχουμε $\widehat{\Gamma A} = \widehat{A\Delta} \Rightarrow \Gamma A = A\Delta$ (2).

Άρα από (1),(2) έχουμε, η OA είναι μεσοκάθετος της $\Gamma\Delta$ άρα $OA \perp \Gamma\Delta$ (3).

Όμως από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $AB \perp \Gamma\Delta$ (4).

Από (3),(4) έχουμε, $OA \parallel AB$ και επειδή έχουν κοινό σημείο τα σημεία A, O, B είναι συνευθειακά δηλαδή η AB

είναι διάμετρος του κύκλου άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$), το τμήμα BM θα είναι το ύψος προς την υποτείνουσα AB άρα $A\Gamma^2 = AM \cdot AB$.



ii) Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{A\Gamma\Delta}$ βαίνουν στα ίσα τόξα ΑΓ και ΑΔ οπότε $\hat{B} = \hat{A\Gamma\Delta} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A\Gamma M}$ (1).

Έτσι τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΒΓ είναι όμοια γιατί έχουν κοινή, την γωνία $\hat{A}$ και $\hat{B} = \hat{A\Gamma M}$ (1) άρα θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες δηλαδή:

$$\frac{AM}{AG} = \frac{AG}{AB} \Rightarrow AG^2 = AM \cdot AB$$

Άρα η σχέση $AG^2 = AM \cdot AB$ ισχύει και όταν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ δεν είναι κάθετες.

β) Αν $AG^2 = AM \cdot AB \Rightarrow \frac{AM}{AG} = \frac{AG}{AB}$ (1). Η γωνία $\hat{A}$ είναι κοινή στα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΒΓ και περιεχόμενη στις ανάλογες πλευρές της σχέσης (1), άρα τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΒΓ είναι όμοια οπότε θα έχουν και τις άλλες γωνίες τους ίσες μία προς μία συνεπώς $\hat{B} = \hat{A\Gamma M} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A\Gamma\Delta}$ και επειδή οι γωνίες Β και ΑΓΔ είναι εγγεγραμμένες τα αντίστοιχα τόξα ΑΓ και ΑΔ θα είναι ίσα δηλαδή το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.



«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (19028)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και ΒΕ το ύψος του. Αν είναι $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 7$ και $B\Gamma = 4$ τότε ,

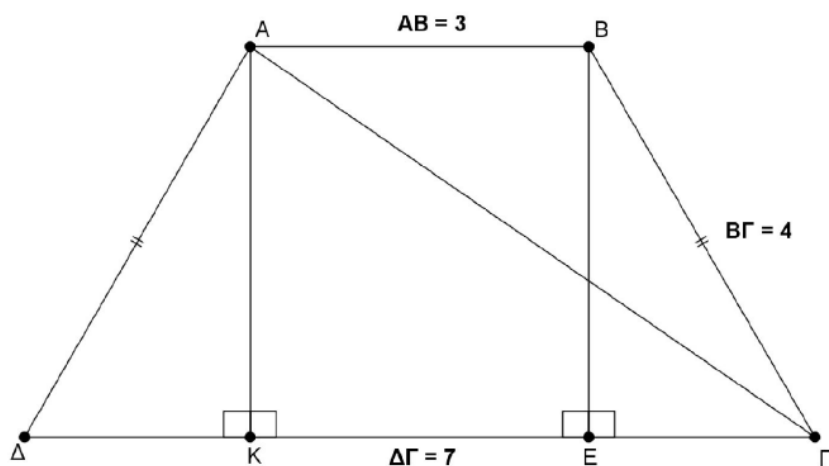
α) Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{3}$

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 13

Λύση



α) Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ φέρω τα ύψη του AK και BE ($AK \perp \Gamma\Delta$ και $BE \perp \Gamma\Delta$)

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta K$ και $B\Gamma E$, ($\hat{K} = \hat{E} = 90^\circ$)

(1^ο στοιχείο) $A\Delta = B\Gamma$ (αφού από υπόθεση το τραπέζιο είναι ισοσκελές)

(2^ο στοιχείο) $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (προσκειμένες γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τραpezίου)

Άρα από κριτήριο ισότητας ορθογώνιων τριγώνων τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μία άρα είναι ίσα .επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα δηλαδή $\Delta K = E\Gamma$ (1).

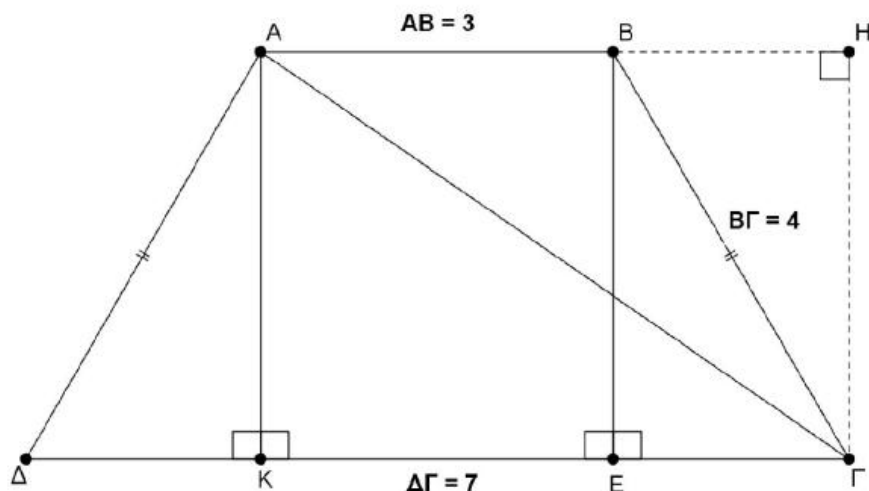
Τα κάθετα τμήματα $AK \perp \Gamma\Delta$ και $BE \perp \Gamma\Delta$ μεταξύ των δύο παραλλήλων $AB \parallel \Gamma\Delta$ είναι ίσα άρα $AK = BE$ και παράλληλα εφόσον είναι κάθετα στην ίδια ευθεία ($\Gamma\Delta$) επομένως το $ABEK$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει μία γωνία ορθή $\hat{K} = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο άρα $AB = KE$ άρα $KE = 3$

$$\text{Όμως : } \Gamma\Delta = \Delta K + KE + E\Gamma \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 7 = E\Gamma + 3 + E\Gamma \Leftrightarrow 4 = 2 \cdot E\Gamma \Leftrightarrow E\Gamma = 2$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma E$ με $\hat{E} = 90^\circ$ από Πυθαγόρειο θεώρημα έχω ότι:

$$BE^2 + \Gamma E^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow BE^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow BE^2 = 12 \Leftrightarrow BE = \sqrt{12} \Leftrightarrow BE = 2\sqrt{3}$$

β) Φέρω $\Gamma H \perp AB$



Το $AB\Gamma$ έχει ύψος $H\Gamma$, αφού $GH \perp AB$, $BE \perp \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$ τότε $BH\Gamma E$ είναι ορθογώνιο άρα, $H\Gamma = BE$ οπότε : $H\Gamma = 2 \cdot \sqrt{3}$ (λόγω του α)

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι :

$$(AB\Gamma) = \frac{AB \cdot H\Gamma}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \sqrt{3}$$

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (19022)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) τέτοιο ώστε να ισχύει $2a^2 = b^2 + c^2$. Αν η προέκταση της διαμέσου του AM τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο P , να αποδείξετε ότι :

α) $\mu_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

(Μονάδες 8)

β) $MP = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

(Μονάδες 8)

γ) $(AB\Gamma) = 6(MP\Gamma)$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Από το πρώτο θεώρημα διαμέσων

στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε :

$$\begin{aligned} \beta^2 + \gamma^2 &= 2\mu_a^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 2a^2 = 2\mu_a^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \\ 2\mu_a^2 &= \frac{3a^2}{2} \Leftrightarrow \mu_a^2 = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow \mu_a = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

β) Οι χορδές ΑΡ και ΒΓ του κύκλου τέμνονται στο Μ άρα το θεώρημα τεμνομένων χορδών έχουμε :

$$MA \cdot MP = MB \cdot MG \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot MP = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot MP = \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MP = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow MP = \frac{2a^2}{4a\sqrt{3}} \Leftrightarrow MP = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow MP = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

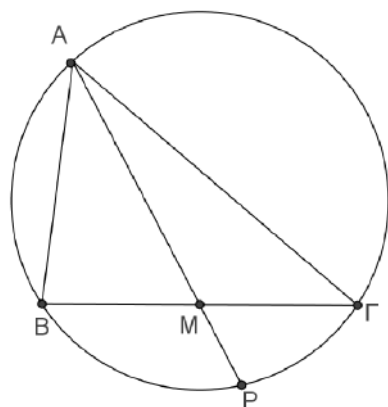
γ) Η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ , οπότε $(AB\Gamma) = 2(ABM)$ (1)

Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΜΓΡ έχουν τις γωνίες $\widehat{AMB}, \widehat{GMP}$ ίσες ως κατακορυφήν .

$$\text{Οπότε } \frac{(AMB)}{(GMP)} = \frac{MA \cdot MB}{MP \cdot MG} \Leftrightarrow \frac{(AMB)}{(GMP)} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a}{2}} = 3$$

Άρα $(AMB) = 3 (MP\Gamma)$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $(AB\Gamma) = 6(MP\Gamma)$



Θέμα Β

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (22295)

Με ένα σύρμα μήκους c κατασκευάζουμε ένα κανονικό εξαγώνο.

α) Να εκφράσετε την πλευρά του εξαγώνου ως συνάρτηση του c .

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του εξαγώνου ισούται με $\frac{c^2\sqrt{3}}{24}$

Μονάδες 15

**ΛΥΣΗ**

α) Έστω λ_6 η πλευρά του κανονικού εξαγώνου.

Το μήκος του σύρματος ισούται με την περίμετρο του κανονικού εξαγώνου, άρα

$$6 \cdot \lambda_6 = c \Leftrightarrow \lambda_6 = \frac{c}{6}$$

β) Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν ενός κανονικού πολυγώνου πλευράς ν ισούται με το μισό του γινόμενο της περιμέτρου του επί το απόστημά του,

$$\text{δηλαδή } E_\nu = \frac{1}{2} P_\nu a_\nu$$

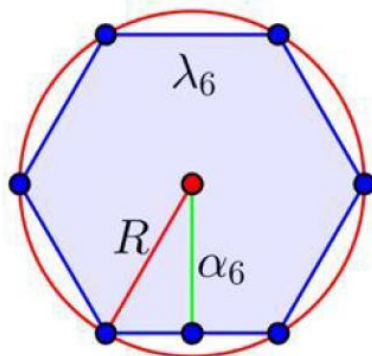
άρα για το κανονικό εξαγώνο έχουμε

$$E_6 = \frac{1}{2} P_6 a_6$$

Η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου προφανώς ισούται με $P_6 = c$.

Η πλευρά του κανονικού εξαγώνου ισούται με την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου, δηλαδή $\lambda_6 = R$.

Το απόστημα του κανονικού εξαγώνου ισούται με



$$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\lambda_6\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{c}{6}\sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{12}$$

Άρα σύμφωνα με τον αρχικό τύπο είναι

$$E_6 = \frac{1}{2}P_6\alpha_6 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c\sqrt{3}}{12} = \frac{c^2\sqrt{3}}{24}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (22303)

Δύο ίσοι κύκλοι (K, R) , (Λ, R) τέμνονται στα σημεία A, B , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και έχουν διάκεντρο $K\Lambda = R\sqrt{3}$.

α) Να βρείτε τη γωνία $\widehat{K\Lambda}$

(Μονάδες 7)

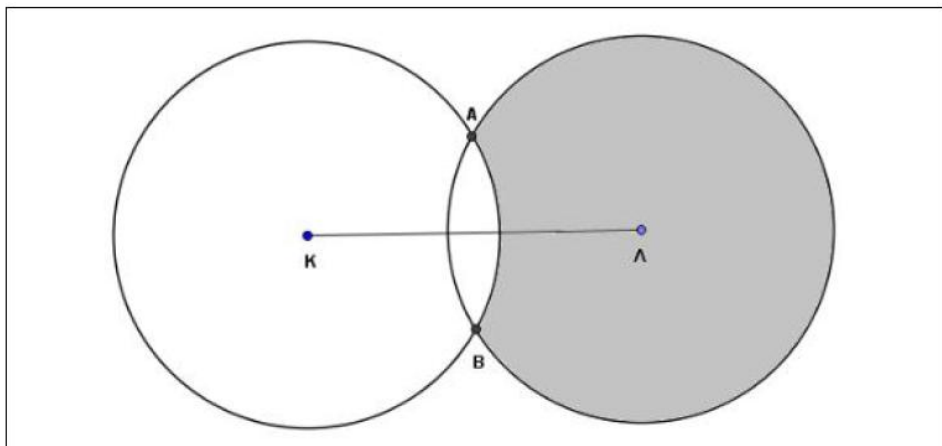
β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδόν:

i) Του τετραπλεύρου $AK\Lambda B$.

(Μονάδες 10)

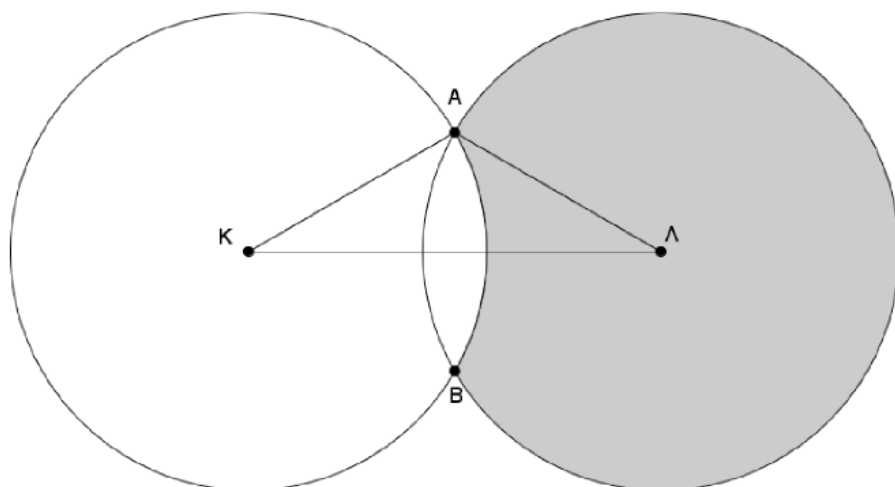
ii) Του σκιασμένου μηνίσκου.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) 1^{ος} Τρόπος Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων (§9.4) στο τρίγωνο ΑΚΛ:



$$ΚΛ^2 = ΑΚ^2 + ΑΛ^2 - 2 \cdot ΑΚ \cdot ΑΛ \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{Κ\hat{A}\hat{L}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3R^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{Κ\hat{A}\hat{L}}$$

$$\Rightarrow R^2 = -2 \cdot R^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{Κ\hat{A}\hat{L}}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{Κ\hat{A}\hat{L}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{Κ\hat{A}\hat{L}} = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{Κ\hat{A}\hat{L}} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

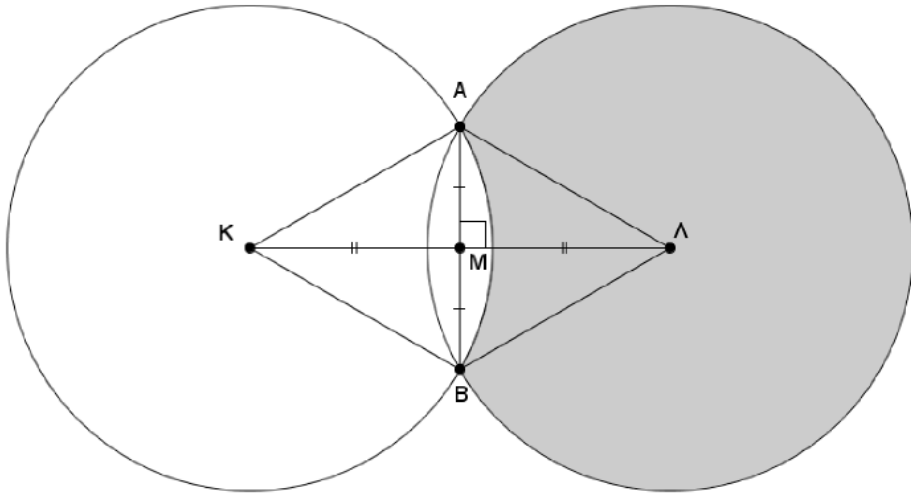
$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{Κ\hat{A}\hat{L}} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 0 < \hat{Κ\hat{A}\hat{L}} < \pi \\ \Rightarrow \hat{Κ\hat{A}\hat{L}} = \frac{2\pi}{3} \text{ ή } \hat{Κ\hat{A}\hat{L}} = 120^\circ \end{matrix}}$$

β) i) 1^{ος} Τρόπος

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΜ είναι $\hat{ΑΚΜ} = 90^\circ - \hat{Κ\hat{A}\hat{M}} \stackrel{(3)}{=} 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (4) οπότε η απέναντι από αυτήν κάθετη πλευρά θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας (§5.9),

$$\text{δηλαδή } ΑΜ = \frac{ΑΚ}{2} = \frac{R}{2} \quad (5)$$



Επίσης, γνωρίζουμε ότι η διάκεντρος ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής των δύο κύκλων (§3.16), οπότε Μ μέσο της ΑΒ (6), οπότε $AB = 2 \cdot AM \stackrel{(5)}{=} 2 \cdot \frac{R}{2} = R$ (7)

Τότε, το τετράπλευρο ΑΚΒΛ, που έχει κάθετες διαγώνιους (2), θα έχει εμβαδόν που δίνεται από τον τύπο (§10.3)

$$(AKBL) = \frac{1}{2} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot K\Lambda \stackrel{(7)}{=} \frac{1}{2} \cdot R \cdot \sqrt{3}R = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ii. } E_{\text{KT}} = (KAB) - (KAB) = \frac{\pi R^2 60}{360} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} R^2$$

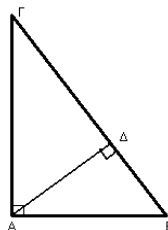
$$E_{\text{Mην}} = \pi R^2 - E_{\text{KT}} = \frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{12} R^2$$

ΘΕΩΡΙΑ: ΟΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΘΕΩΡΗΜΑ (1)

Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\angle A = 90^\circ$ και ΑΔ το ύψος προς την υποτείνουσα



ισχύουν:

$$1. AB^2 = BG \cdot BD, \quad AG^2 = BG \cdot GD$$

$$2. \frac{AB^2}{AG^2} = \frac{BD}{GD}$$

$$3. AD^2 = BD \cdot GD$$

$$4. BG^2 = AB^2 + AG^2$$

Απόδειξη

1. Είναι $\triangle ABG \sim \triangle BGD$ διότι $\hat{A} = \hat{G} = 90^\circ$, $\hat{B} = \hat{B}$ (κοινή)

$$\text{Άρα} \quad \frac{AB}{BG} = \frac{BG}{BD} \Leftrightarrow AB^2 = BG \cdot BD$$

$$\text{Ομοίως} \quad \triangle ABG \sim \triangle GAD \quad \text{άρα} \quad AG^2 = BG \cdot GD$$

$$2. \text{Είναι} \quad \left. \begin{array}{l} AB^2 = BG \cdot BD \\ AG^2 = BG \cdot GD \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB^2}{AG^2} = \frac{BG \cdot BD}{BG \cdot GD} \Rightarrow \frac{AB^2}{AG^2} = \frac{BD}{GD}$$

3. Είναι $\triangle ABD \sim \triangle GAD$, $\angle A\hat{G} = \angle A\hat{B} = 90^\circ$
 $\angle A\hat{B} = \hat{G}$ ($= 90^\circ - B$ ή γωνίες με πλευρές κάθετες)

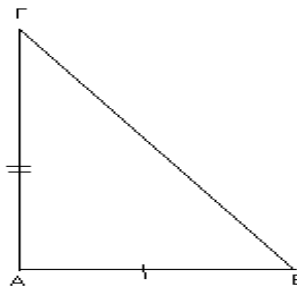
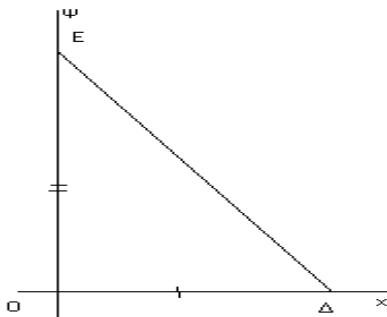
$$\text{Άρα} \quad \frac{AD}{BD} = \frac{GD}{AD} \Leftrightarrow AD^2 = BD \cdot GD$$

$$4. \text{Είναι} \quad \left. \begin{array}{l} AB^2 = BG \cdot BD \\ AG^2 = BG \cdot GD \end{array} \right\} \Rightarrow AB^2 + AG^2 = BG \cdot BD + BG \cdot GD = BG \cdot (BD + GD) = BG \cdot BG = BG^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (2) (Αντίστροφο του Π.Θ.)

Αν σε τρίγωνο ισχύει $AB^2 + AG^2 = BG^2$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$

Απόδειξη



Γεωμετρία Β' Λυκείου

Θεωρούμε ορθή γωνία $\chi O\psi$ και στις πλευρές της $O\chi$ και $O\psi$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα

$$O\Delta = AB \text{ (1) και } O\epsilon = A\Gamma \text{ (2)}$$

Το $\Delta O\epsilon$ είναι ορθογώνιο άρα από Π.Θ. έχουμε

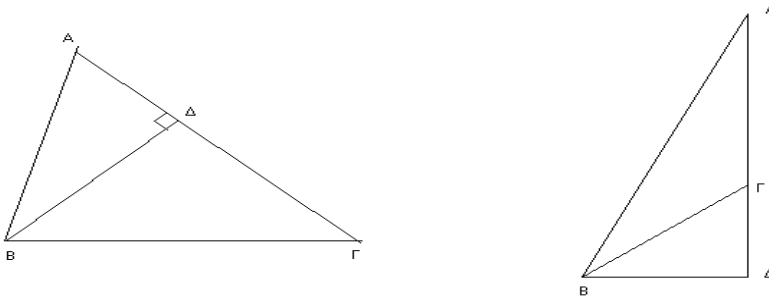
$$\begin{aligned}\Delta\epsilon^2 &= O\Delta^2 + O\epsilon^2 = \\ &= AB^2 + A\Gamma^2 = \quad \text{(από (1) ΚΑΙ (2))} \\ &= B\Gamma^2 \quad \text{(από υπόθεση)}$$

Επομένως τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta O\epsilon$ είναι ίσα (γιατί $AB = O\Delta$, $A\Gamma = O\epsilon$ ΚΑΙ $B\Gamma = \Delta\epsilon$) άρα και $\angle A = \angle O = 90^\circ$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (3) (Γενίκευση Π.Θ – οξείας γωνίας)

Το τετράγωνο μιας πλευράς που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία ενός τριγώνου, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιάς επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτή.

Απόδειξη



Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $\Delta B A$ με εφαρμογή Π.Θ. έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 \text{ (1)} & \Delta B^2 &= \gamma^2 - A\Delta^2 \text{ (2)} \\ \bullet \text{ αν } \Gamma < 1^\circ & & \Delta\Gamma &= \beta - A\Delta \\ \bullet \text{ αν } \Gamma > 1^\circ & & \Delta\Gamma &= A\Delta - \beta\end{aligned}$$

$$\text{και στις δύο περιπτώσεις } \Delta\Gamma^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta A\Delta \text{ (3)}$$

Από (1), (2) και (3) έχουμε

$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta A\Delta$$

- αν $\Gamma = 1^\circ$ το Δ συμπίπτει με το Γ δηλαδή $A\Delta = \beta$ και $\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta A\Delta = \gamma^2 - \beta^2 = \alpha^2$.

(3)

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

1. $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 1^\circ$
2. $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 1^\circ$

Απόδειξη

1. Έστω $A > 1^\circ$ τότε από τη Γενίκευση του Π.Θ. έχουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\alpha\Delta > \beta^2 + \gamma^2$
αντιστρόφως έστω $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε θα είναι $A > 1^\circ$ γιατί αν $A \leq 1^\circ$ θα είναι $\alpha^2 \leq \beta^2 + \gamma^2$
που είναι άτοπο.

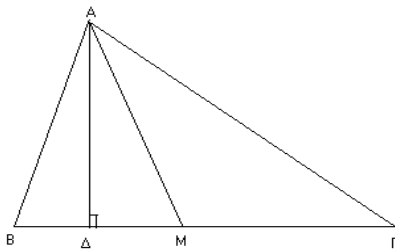
2. ομοίως.

ΘΕΩΡΗΜΑ (5) (Διαμέσου)

1. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται ανάμεσα στις δύο αυτές πλευρές αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.
2. Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι ίση με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της διαμέσου πάνω σ' αυτήν.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $AM = \mu_\alpha$ και $A\Delta = \nu_\alpha$
Αν $A\Gamma > AB$ το Δ βρίσκεται μεταξύ των B και M και $AM\Gamma > 1^\circ$ ενώ $AMB < 1^\circ$



Στο $\triangle AM\Gamma$ από Θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AM^2 + M\Gamma^2 + 2 M\Gamma M\Delta \quad (1)$$

Στο $\triangle AMB$ από Θεώρημα οξείας γωνίας έχουμε: $AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2 MB M\Delta$ (2)

$$(1)+(2) \Rightarrow A\Gamma^2 + AB^2 = 2AM^2 + 2MB^2 + 2M\Gamma M\Delta - 2MB M\Delta \stackrel{(MB=M\Gamma)}{=} 2AM^2 + 2MB^2 + 2MB M\Delta - 2MB M\Delta$$

$$= 2AM^2 + 2MB^2 + 2MB M\Delta - 2MB M\Delta \stackrel{(MB=M\Gamma/2)}{=} 2AM^2 + 2\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = 2AM^2 + 2\frac{B\Gamma^2}{4} =$$

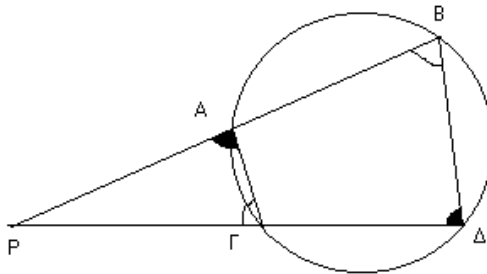
$$2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \Rightarrow \boxed{\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow A\Gamma^2 - AB^2 = 4MB M\Delta = 4\frac{B\Gamma}{2} M\Delta = 2B\Gamma M\Delta = 2\alpha M\Delta. \Rightarrow \boxed{\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha M\Delta}$$

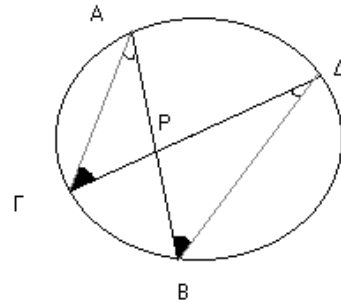
ΘΕΩΡΗΜΑ (6) (τέμνουσες κύκλου)

Αν δύο χορδές AB, ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο P τότε ισχύει $PA \cdot PB = PG \cdot PD$

Απόδειξη



σχήμα 1



σχήμα 2

είναι $\hat{PAG} \approx \hat{PBD}$ γιατί
 $\hat{PGA} = \hat{PBD}$ και
 $\hat{PAG} = \hat{PBD}$
 $\hat{PAG} = \hat{PBD}$ και
 $\hat{PGA} = \hat{PBD}$

στο σχήμα 1 γιατί το ABΔΓ είναι εγγράψιμο και κάθε εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

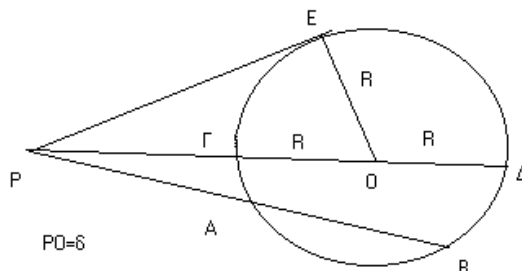
στο σχήμα 2 γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

επομένως ισχύει ότι: $\frac{PA}{PD} = \frac{PG}{PB} \Leftrightarrow PA \cdot PB = PG \cdot PD$

ΘΕΩΡΗΜΑ (7)

Αν από ένα εξωτερικό σημείο P του κύκλου (O,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα PE και μια τέμνουσα AB τότε ισχύει $PE^2 = PA \cdot PB$

Απόδειξη



Φέρνουμε την ευθεία ΡΟ που τέμνει τον κύκλο στα Γ και Δ. Αν ΡΟ = δ τότε ισχύει $ΡΑ ΡΒ = ΡΓ ΡΔ = (δ - R)(δ + R) = δ^2 - R^2$ (1)

από το ορθογώνιο τρίγωνο ΡΕΟ από το Π.Θ. έχουμε $ΡΕ^2 = ΡΟ^2 - ΟΕ^2 = δ^2 - R^2$ (2)

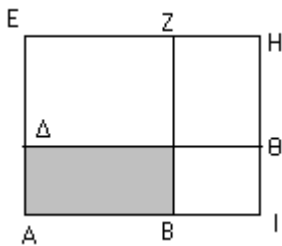
από (1) και (2) $ΡΕ^2 = ΡΑ ΡΒ$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΘΕΩΡΗΜΑ (8)

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του

Απόδειξη



Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=α και ΑΔ=β. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=α την ΑΒ κατά ΒΙ=β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ με πλευρά α+β.

Είναι $(ΑΙΗΕ) = (α+β)^2$ (1)

Τα ΔΓΖΕ και ΒΙΘΓ είναι τετράγωνα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ είναι ίσο με το ΑΒΓΔ άρα $(ΔΓΖΕ) = α^2$, $(ΒΙΘΓ) = β^2$, $(ΓΘΗΖ) = (ΑΒΓΔ)$ (2)

Και $(ΑΙΗΕ) = (ΑΒΓΔ) + (ΓΘΗΖ) + (ΒΙΘΓ) + (ΔΓΖΕ)$

από (1) και (2) έχουμε: $(α+β)^2 = 2(ΑΒΓΔ) + α^2 + β^2 \Rightarrow α^2 + β^2 + 2αβ = 2(ΑΒΓΔ) + α^2 + β^2 \Rightarrow (ΑΒΓΔ) = αβ$.

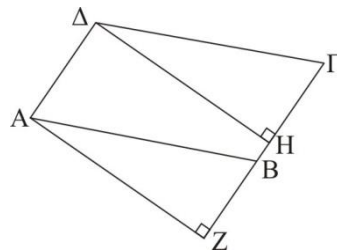
ΘΕΩΡΗΜΑ (9)

Το εμβαδό ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο της μιας πλευράς επί το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά αυτή

Απόδειξη

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ΑΖ το ύψος προς την πλευρά ΒΓ. Από το Δ φέρνουμε ΔΗ κάθετη στην ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα ($Ζ = Η = 90^\circ$, $ΖΒ = ΔΓ$ και $Β_1 = Γ_1$ εντός εκτός και επί τα αυτά)
 οπότε $(ΖΒΑ) = (ΗΓΔ)$ (1)

Είναι $(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΓΔ) - (ΖΒΑ) = (ΑΖΓΔ) - (ΔΓΗ) = (ΑΖΗΔ) = ΑΔ ΑΖ = ΒΓ ΑΖ$.



ΘΕΩΡΗΜΑ (10)

Το εμβαδό ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

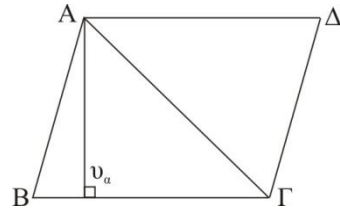
Απόδειξη

Με πλευρές AB και BG σχηματίζουμε το παρ/μο ABΓΔ.

Είναι $(ABΓΔ) = \alpha v_a$ (1)

Όμως τα τρίγωνα ABΓ και ΑΓΔ είναι ίσα ($AB = ΓΔ$, $BΓ = ΑΔ$ και ΑΓ κοινή) οπότε $(ABΓ) = (ΑΓΔ)$ (2)

$$\text{Είναι } (ABΓΔ) = (ABΓ) + (ΑΓΔ) \xRightarrow{(1)(2)} \alpha v_a = 2(ABΓ) \Rightarrow (ABΓ) = \frac{1}{2} \alpha v_a$$



ΘΕΩΡΗΜΑ (11)

Το εμβαδό τραπέζιου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων επί το ύψος του.

Απόδειξη

Θεωρούμε τραπέζιο ABΓΔ ($BΓ \parallel ΑΔ$) με βάσεις $BΓ = B$ και $ΑΔ = \beta$ και ύψος v .

$$\text{Φέρνουμε τη διαγώνιο ΑΓ τότε } (ABΓΔ) = (ABΓ) + (ΑΓΔ) = \frac{1}{2} Bv + \frac{1}{2} \beta v = \frac{(B + \beta)v}{2} \text{ γιατί τα}$$

δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο ύψος v .

Άλλοι τύποι για εμβαδό τριγώνου (12)

$$E = \sqrt{\tau \cdot (\tau - \alpha) \cdot (\tau - \beta) \cdot (\tau - \gamma)} \quad \tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

Απόδειξη

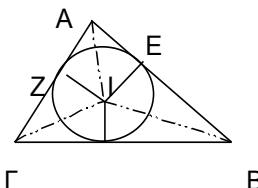
$$\text{Γνωρίζουμε ότι } v_a = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

$$\text{Άρα } E = \frac{1}{2} \alpha v_a = \frac{1}{2} \alpha \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

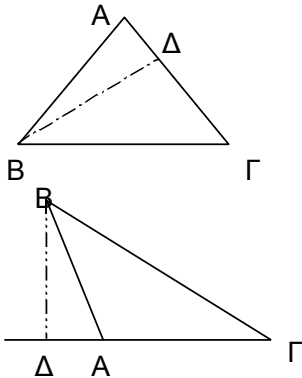
ΘΕΩΡΗΜΑ (12)

$E = \tau \rho$ όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (I, ρ) . Φέρνουμε τα τμήματα IA, IB και $I\Gamma$. Τα τρίγωνα $IB\Gamma$, $I\Gamma A$ και IAB έχουν το ίδιο ύψος ρ , οπότε έχουμε:



$$\begin{aligned} E &= (AB\Gamma) = (IB\Gamma) + (I\Gamma A) + (IAB) = \\ &= \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\rho = \\ &= \frac{1}{2}2\tau\rho = \tau\rho \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$$

Απόδειξη

Αν $A < 180^\circ$ τότε από το ορθογώνιο ΔBA προκύπτει ότι $v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$

Αν $A > 180^\circ$ τότε από το ορθογώνιο ΔBA προκύπτει ότι

$$v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A_{\text{εξ}} = \gamma \cdot \eta\mu(180^\circ - A) = \gamma \cdot \eta\mu A$$

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις: $E = \frac{1}{2}\beta \cdot v_\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A$

ΘΕΩΡΗΜΑ (13)

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Απόδειξη

$$\text{Είναι } \frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}\alpha \cdot v_\alpha}{\frac{1}{2}\alpha' \cdot v'_\alpha} = \frac{\alpha \cdot v_\alpha}{\alpha' \cdot v'_\alpha} \quad (1)$$

- Αν $\alpha = \alpha'$ (1) $\Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{v_\alpha}{v'_\alpha}$

- Αν $v_\alpha = v'_\alpha$ (1) $\Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (14)

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας

Απόδειξη

Έστω δύο όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $A=A'$ και $B=B'$ τότε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{v_{\alpha'}}{v_{\alpha}} = \lambda$ όπου λ ο

λόγος ομοιότητας. Τότε $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\frac{1}{2}\alpha v_{\alpha}}{\frac{1}{2}\alpha' v'_{\alpha}} = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ (15)

Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $A=A'$ ή $A+A'=180^\circ$. Τότε και στις δύο

περιπτώσεις είναι $\eta\mu A = \eta\mu A'$ οπότε έχουμε: $\frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A}{\frac{1}{2}\beta'\gamma' \cdot \eta\mu A'} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Γωνία κανονικού πολυγώνου $\varphi_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v}$

Έστω $A_1 A_2 \dots A_v$ ένα κανονικό v -γωνο με $A_1 = A_2 = \dots = A_v = \varphi_v$

Το άθροισμα των γωνιών κάθε v -γώνου είναι $(v-2)180^\circ$, άρα $v\varphi_v = (v-2)180^\circ = v180^\circ - 360^\circ$

άρα $\varphi_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v}$

Ομοιότητα κανονικών πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε δύο κανονικά v -γωνια $AB\Gamma \dots T$ και $A'B'\Gamma' \dots T'$ με τον ίδιο αριθμό πλευρών

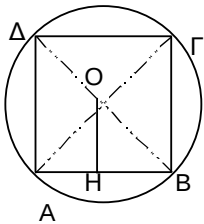
οπότε η γωνία του καθενός είναι $\varphi_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v}$ δηλαδή $A=A'$ $B=B', \dots, T=T'$

Επίσης $AB=B\Gamma=\dots=TA$ και $A'B'=B'\Gamma'=\dots=T'A'$

άρα $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dots = \frac{TA}{T'A'}$

οπότε τα πολύγωνα είναι όμοια γιατί έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μια προς μία.

Εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο και στοιχεία του.



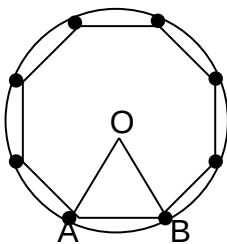
Έστω κύκλος (O, R) Αν φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους AG και BD , θα είναι: $\angle AOB = \angle BO\Gamma = \angle \Delta OA = 90^\circ$ οπότε

$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ και επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο OAB από το Π.Θ.

$$\text{έχουμε } \lambda_4^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Rightarrow \lambda_4 = R\sqrt{2}$$

$$\text{επίσης } \alpha_4^2 + \frac{\lambda_4^2}{4} = R^2 \Rightarrow \alpha_4^2 = R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4} = \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



Εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο και στοιχεία του

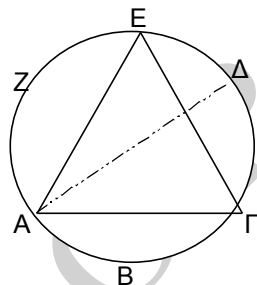
Έστω κύκλος (O, R) και AB η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (O, R) .

Τότε $\angle AOB = \omega_6 = 60^\circ$ και $AO = BO = R$ το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο δηλαδή $AB = OA = R$ δηλ $\lambda_6 = R$

Για την εγγραφή λοιπόν παίρνουμε πάνω στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ = ZA$ με αντίστοιχη χορδή ίση με την ακτίνα .

$$\alpha_6^2 + \frac{\lambda_6^2}{4} = R^2 \Rightarrow \alpha_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Εγγραφή ισόπλευρου τριγώνου σε κύκλο και στοιχεία του.



Αν τα σημεία A, B, Γ, Δ, E και Z διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα 60° το καθένα (με αντίστοιχες χορδές $=R$) τότε τα σημεία A, Γ, E είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, αφού $\angle A\Gamma E = \angle E\Gamma A = \angle A\Gamma E = 120^\circ$

Επειδή $\angle A\Gamma\Delta = 180^\circ$, η $A\Delta$ είναι διάμετρος και επομένως το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε

$$\lambda_3^2 = A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Delta\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow \lambda_3 = R\sqrt{3}$$

$$\alpha_3^2 + \frac{\lambda_3^2}{4} = R^2 \Rightarrow \alpha_3^2 = R^2 - \frac{(R\sqrt{3})^2}{4} = \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{R}{2}$$