ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΝΕΑ ΠΑΙΔΕΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ 2ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

Α1. Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

Α2. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$.

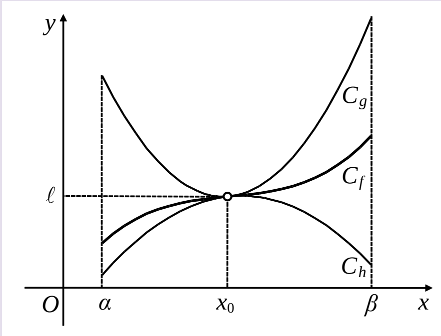
Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α3. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$

τότε

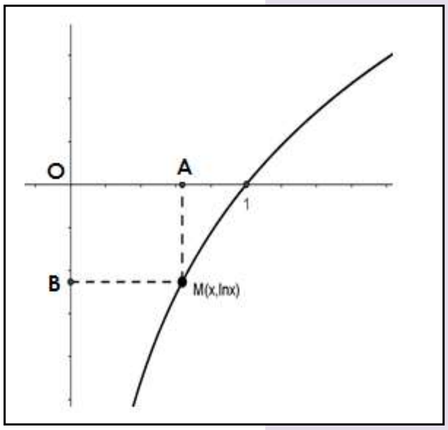
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$



(5 μονάδες)

Α4. 1.Σ 2.Σ 3.Λ 4.Σ 5.Σ

Θέμα Β



α) $E = \text{ΒΑΣΗ} \cdot \text{ΥΨΟΣ} \Rightarrow E(x) = |x| \cdot |\ell nx|$.

Όμως αφού $x \in (0,1)$, τότε $\ell nx < 0$. Άρα έχουμε $E(x) = -x \cdot \ell nx$, $x \in (0,1)$

β) Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο παραγωγισίμων με $E'(x) = -\ell nx - 1$, $x \in (0,1)$. Άρα $E'(x) = 0$

$\Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

Για $0 < x < \dfrac{1}{e} \Rightarrow \ell nx < \ln\dfrac{1}{e} \Rightarrow -1 - \ell nx > 0 \Rightarrow E'(x) > 0$

Για $\dfrac{1}{e} < x < 1 \Rightarrow \ell nx > \ell n\dfrac{1}{e} \Rightarrow -1 - \ell nx < 0 \Rightarrow E'(x) > 0$

x	0		$\frac{1}{e}$		1
E'(x)		+	0	-	
E(x)		↗	Ο.Μ Εμχ	↘	

Άρα για $x_0 = \dfrac{1}{e}$, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μέγιστο εμβαδόν.

γ) Εξ ορισμού ολικού μεγίστου ισχύει $E(x)\le E\left(\frac{1}{e}\right)$ για κάθε $x\in(0,1)$. Άρα $E(x)\le\frac{1}{e}$.

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\ell nx\le x-1$ για κάθε $x>0$. Πολλαπλασιάζοντας με $-x<0$, έχουμε $-x\cdot\ell nx\ge x-x^2\Rightarrow E(x)\ge x-x^2$.

Τελικά από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε $x-x^2\le E(x)\le\frac{1}{e}$, $x\in(0,1)$.

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{e}}(x-x^2)dx<\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{e}}E(x)dx<\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{e}}\frac{1}{e}dx\Rightarrow$

$$\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{e}}<\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{e}}E(x)dx<\frac{1}{e}\left(\frac{2}{e}-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\frac{6e-8}{3e^3}-\frac{5}{192}<\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{e}}E(x)dx<\frac{8-e}{4e^2}.$$

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων στο (0,1) με
$g'(x)=-4a-4x\cdot\ell nx,\quad x\in(0,1)\Rightarrow g'(x)=-4a+4E(x)$.

x	0		$\frac{1}{e}$		1
h'(x)		+	0	-	
h(x)		↗	Ο.Μ Συν	↘	

Γι α να
έχει η C_g παράλληλη εφαπτόμενη στον x'x, πρέπει $g'(x)=0\Rightarrow E(x)=a$

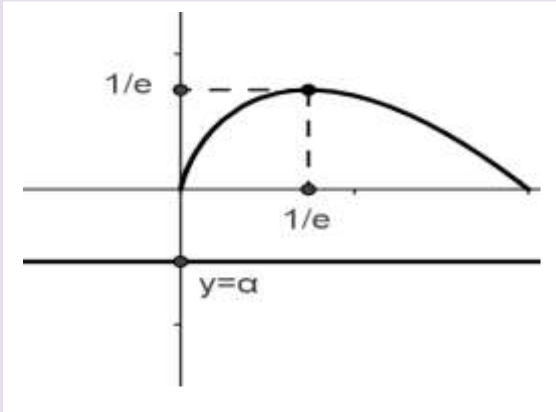
Θεωρούμε $h(x)=E(x)-a$ με $x\in(0,1)$, παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων στο $(0,1)$ με $h'(x)=E'(x)$. Άρα από (b), ο πίνακας μεταβολών της μονοτονίας γίνεται

- Αν $A_1=\left(0,\frac{1}{e}\right]$ τότε $h(A_1)\overset{\nearrow}{=}\left(\lim_{x\to0^+}h(x),h\left(\frac{1}{e}\right)\right]=\left(-a,\frac{1}{e}-a\right]$

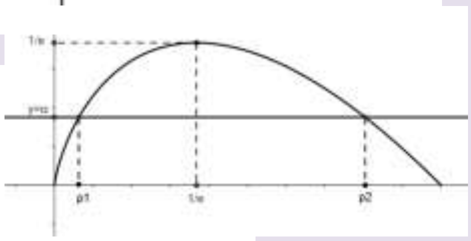
- Αν $A_2=\left[\frac{1}{e},1\right)$ τότε $h(A_2)\overset{\searrow}{=}\left(\lim_{x\to1^-}h(x),h\left(\frac{1}{e}\right)\right]=\left(-a,\frac{1}{e}-a\right]$

Α περ: Αν $\alpha<0$ τότε $-\alpha>0$ και $\frac{1}{e}-\alpha>\frac{1}{e}>0$

Τότε $0\notin h(A_1)$ και $0\notin h(A_2)$, άρα η h δεν έχει ρίζες, οπότε η g δεν έχει παράλληλες εφαπτόμενες στον x'x.

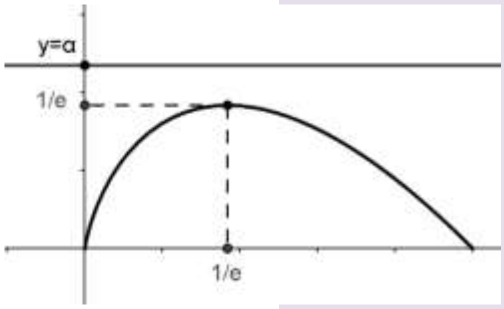


Β περ: Αν $0<\alpha<\frac{1}{e}$ τότε $-\alpha<0$ και $\frac{1}{e}-\alpha>0$



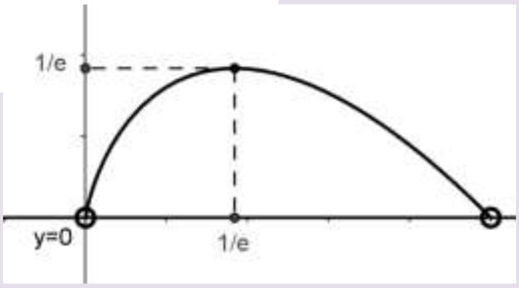
- Τότε $0\in h(A_1)$ άρα η h έχει μοναδική ρίζα $\rho_1\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$, οπότε η g έχει παράλληλη εφαπτόμενη στον x'x.

- Τότε $0\in h(A_2)$ άρα η h έχει μοναδική ρίζα $\rho_2\in\left[\frac{1}{e},1\right)$, οπότε η g έχει παράλληλη εφαπτόμενη στον x'x.



Γ περ: Αν $\alpha>\frac{1}{e}$ τότε $-\alpha<0$ και $\frac{1}{e}-\alpha<0$

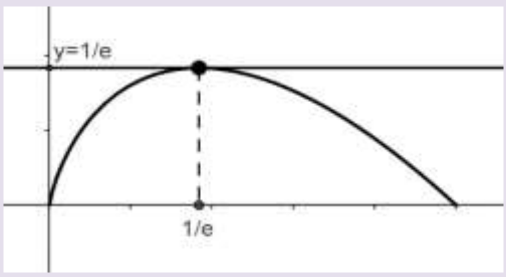
Τότε $0\notin h(A_1)$ και $0\notin h(A_2)$, άρα η h δεν έχει ρίζες, οπότε η g δεν έχει παράλληλες εφαπτόμενες στον x'x.



Δ περ: Αν $\alpha=0$

$h(A_1)\overset{\nearrow}{=}\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και $h(A_2)\overset{\searrow}{=}\left(0,\frac{1}{e}\right]$

Τότε $0\notin h(A_1)$ και $0\notin h(A_2)$, άρα η h δεν έχει ρίζες, οπότε η g δεν έχει παράλληλες εφαπτόμενες στον x'x.



Ε περ: Αν $\alpha=\frac{1}{e}$

$h(A_1)\overset{\nearrow}{=}\left(-\frac{1}{e},0\right]$ και $h(A_2)\overset{\searrow}{=}\left(-\frac{1}{e},0\right]$

Τότε $0 \in h(A_1)$ και $0 \in h(A_2)$ h έχει μοναδική ρίζα $\rho = \frac{1}{e}$. Σε αυτή την περίπτωση **<u>η ρίζα καλείται διπλή.</u>**

Θέμα Γ

Α. Η σχέση : $f(x)\cdot ημx + f(x)\cdot συνx = f'(x)\cdot ημx, \quad x \in (0,\pi)$ γράφεται ισοδύναμα:

$(ημx + συνx)f(x) = f'(x)ημx \underset{ημx>0}{\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{ημx+συνx}{ημx} \Leftrightarrow \left[\ell n(f(x))\right]' = \left(x + \ell n(ημx)\right)'$ για κάθε $x \in (0,\pi)$ άρα, $\ell n(f(x)) = x + \ell n(ημx) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει $c = 0$. Άρα

$\ell n(f(x)) = x + \ell n(ημx) \Rightarrow f(x) = e^{x+\ell n(ημx)} \Rightarrow f(x) = e^x \cdot e^{\ell n(ημx)} \Rightarrow f(x) = e^x ημx \ ,\ x \in (0,\pi)$

Β. Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει ότι $f(x) = e^x(ημx + συνx)$ στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
Επομένως, ισχύει

$$f(\frac{\pi}{4}) \le f(x) \le f(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow e^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} \le f(x) \le e^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\pi}{2}}dx \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^x ημx \le \frac{\pi}{4}e^{\frac{\pi}{2}}$$

Γ. Για $x \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ προκύπτει

$f(x) = \lambda \cdot ημ^2 x \Leftrightarrow e^x ημx = \lambda \cdot ημ^2 x \overset{ημx>0}{\Leftrightarrow} e^x = \lambda \cdot ημx \Rightarrow \frac{e^x}{ημx} = \lambda$.

Θεωρούμε μια συνάρτηση $g:\left(0,\frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, με $g(x) = \frac{e^x}{ημx}$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ με $g'(x) = \frac{e^x(ημx - συνx)}{ημ^2 x} < 0$

(αφού $ημx < συνx$ στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$)άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι :

$$g\left(\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[g\left(\frac{\pi}{4}\right),\lim_{x\to 0^+}g(x)\right]=\left[\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}},\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{\eta\mu x}\right]=\left[\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{\eta\mu x}\right]=\left[\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},+\infty\right]$$

Άρα,

- Αν $\lambda<\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ η εξίσωση $g(x)=\lambda$ είναι αδύνατη στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$
- Αν $\lambda\geq\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ τότε υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=\lambda$ και το x_0 είναι μοναδικό αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Θέμα Δ

Δ1. Αν $x\in(-1,0)$:

$$\ell n(x+1)\cdot f'(x)=1-\frac{f(x)}{(x+1)}\Leftrightarrow \ell n(x+1)\cdot f'(x)+\frac{f(x)}{(x+1)}=1\Leftrightarrow$$

$$\left[\ell n(x+1)\cdot f(x)\right]'=(x)'$$

$$\ell n(x+1)\cdot f(x)=x+c_1 \text{ για κάθε } x\in(-1,0]$$

και επειδή η f συνεχής στο 0 : $\ell n(0+1)\cdot f(0)=0+c_1\Rightarrow c_1=0$

Αν $x\in(0,+\infty)$:

$$\ell n(x+1)\cdot f'(x)=1-\frac{f(x)}{(x+1)}\Leftrightarrow \ell n(x+1)\cdot f'(x)+\frac{f(x)}{(x+1)}=1\Leftrightarrow$$

$$\left[\ell n(x+1)\cdot f(x)\right]'=(x)'$$

$$\ell n(x+1)\cdot f(x)=x+c_2 \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty)$$

και επειδή η f συνεχής στο 0 : $\ell n(0+1)\cdot f(0)=0+c_2\Rightarrow c_2=0$.

Τελικά για $f(x)=\frac{x}{\ell n(x+1)}$, $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$

Η f συνεχής στο 0 επομένως

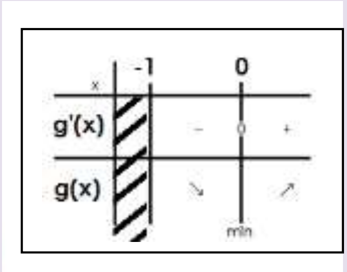
$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ell n(x+1)} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=1$$

Επομένως

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ell n(x+1)}, & \text{αν } x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)\\ \\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}.$$

Δ2. Για την μονοτονία της f:
Για $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$:

$$f'(x)=\frac{\ell n(x+1)-\dfrac{x}{x+1}}{\ell n^2(x+1)}=\frac{g(x)}{\ell n^2(x+1)}$$



Όπου $g(x)=\ell n(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$ με $x>-1$

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

Άρα g(x)≥g(0)=0 (η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0)

Τελικά $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ και f συνεχής στο 0 επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$

Για το σύνολο τιμών της f

Βρίσκω τα όρια:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x}{\ell n(x+1)}=-1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ell n(x+1)} \overset{+\infty/+\infty}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$$

Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το σύνολο τιμών είναι: $(0,+\infty)$

Δ3. Για x > 0 είναι :

$$(2x+1)^x = (x^2+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\ell n(2x+1)^x = \ell n(x^2+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$x\ell n(2x+1) = 2\ell n(x^2+1) \Leftrightarrow$$
$$\frac{x}{\ell n(x^2+1)} = \frac{2}{\ell n(2x+1)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2}{\ell n(x^2+1)} = \frac{2x}{\ell n(2x+1)} \Leftrightarrow$$
$$f(x^2) = f(2x) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow}$$
$$x^2 = 2x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 2$$

Δ4. Η f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{1}{\ell n2} - 1 \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{1-\ell n2}{\ell n2}$.