2ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
Γ΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

Α1. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

(5 μονάδες)

Α2. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν η $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

(5 μονάδες)

Α3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

(5 μονάδες)

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο νούμερο που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

1. Είναι $\int_1^e \ell n x dx = \int_e^1 \ell n \frac{1}{t} dt$.

2. Αν $\int_\alpha^\beta f(x) dx = 0$ (f συνεχής) και η f δεν είναι παντού 0 στο [α , β] τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

3. Αν f: $[-2, 2] \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = (x-2)^2(x+1)$ τότε η f έχει κρίσιμα σημεία στις θέσεις $x_0 = -1$ και $x_1 = 2$.

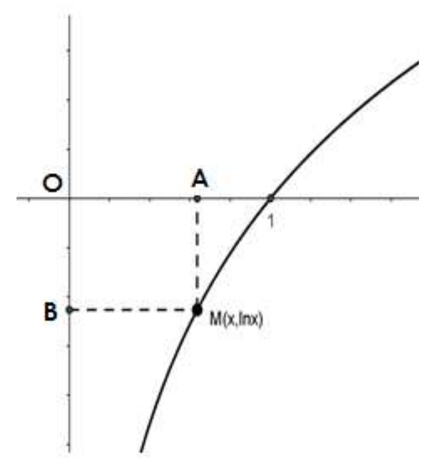
4. Αν $0 \le f(x) \le 1$ κοντά στο 0 τότε ισχύει $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^2 f(x)\right) = 0$

5. Ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$

(5x 2 = 10 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η $f(x) = \ell n x$, $x \in (0,1)$, Μ τυχαίο σημείο της και Α, Β οι προβολές του Μ στους άξονες x'x και y'y αντίστοιχα.



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΜΒ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = -x \cdot \ln x$.

β) Να δείξετε ότι για $x_0 = \dfrac{1}{e}$, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μέγιστο εμβαδόν.

γ) Να δείξετε ότι $\dfrac{6e-8}{3e^3} - \dfrac{5}{192} < \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{e}} E(x)\,dx < \dfrac{8-e}{4e^2}$

δ) Έστω $g(x) = x^2 - 4ax - 2x^2 f(x)$. Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, βρείτε το πλήθος των παράλληλων εφαπτόμενων της C_g στον x'x.

Από εφαρμογή βιβλίου ισχύει:
$\ell n x \le x - 1$ για κάθε $x > 0$.

Θέμα Γ

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ και ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$
- $f(x) \cdot \eta\mu x + f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = f'(x) \cdot \eta\mu x$, για κάθε $x \in (0,\pi)$

Α. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση f.

8 μονάδες

Β. Να δειχθεί ότι $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}e^{\frac{\pi}{4}} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x \,\eta\mu x\, dx \le \frac{\pi}{4}e^{\frac{\pi}{2}}$

8 μονάδες

Γ. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda \cdot \eta\mu^2 x$ στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ

8 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{\ell n(x+1)} - \frac{f(x)}{(x+1)\cdot \ell n(x+1)},\ x \in (-1,0)\cup(0,+\infty).$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ell n(x+1)}, & \text{αν } x \in (-1,0)\cup(0,+\infty) \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

7 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-1,+\infty)$ και να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της.

6 μονάδες

Δ3. Να λυθεί στο $(0,+\infty)$ η εξίσωση $(2x+1)^x = (x^2+1)^2$.

6 μονάδες

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(0, 1) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{1-\ln 2}{\ln 2}$.

6 μονάδες

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)</u>

1. Στις κόλλες να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ονοματεπώνυμο, ημερομηνία, τμήμα). Τα θέματα <u>να μην τα αντιγράψετε</u> στη κόλλες.

2. Στη φωτοτυπία <u>δεν</u> θα σημειώσετε τίποτα.

3. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

4. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.