ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

Α1. Έστω ένας δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

Α2. Να διατυπώσετε τον νόμο των μεγάλων αριθμών.

Α3. Αν $F(x)=c\cdot f(x)$ όπου f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της να αποδείξετε ότι $F'(x)=c\cdot f'(x)$

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

α) Αν $A'\subseteq B$ τότε $P(A)+P(B)<1$

β) Αν $P(A)=P(A')$ τότε $2P(A)=P(\Omega)$

γ) Η εξίσωση εφαπτομένης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $(x_0,f(x_0))$ είναι $y-f'(x_0)=f(x_0)\cdot(x-x_0)$

δ) Ισχύει ότι $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

ε) Για δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ισχύει ότι $A\cap B\neq\varnothing$

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x+2}{x-1}, & x\neq 1\\ k-\left(P(A)+P(B)\right), & x=1\end{cases}$

Β1. Αν f συνεχής στο $x_0=1$ να αποδείξετε ότι $|k|\leq 1$.

Β2. Έστω συνάρτηση g τέτοια ώστε $x\cdot e^{g(x)}+2=(x-1)\cdot f(x)$

Να βρεθεί ο τύπος της g.

Β3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

Β4. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Β5. Αν $x>\sqrt{3}$ και $A\subseteq B$ να αποδείξετε ότι $g\left(P(A)\right)\leq g\left(P(B)\right)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ με $x>0$ και 5 σημεία της γραφικής παράστασης της f $A_1,A_2,\dots,A_5$ με τετμημένες $x_1,x_2,\dots,x_5$ όπου $0<x_1<x_2<\dots<x_5<1$ που έχουν εύρος $R=\dfrac{1}{4}$ και $\delta=\dfrac{1}{2}$ και οι τετραγωνικές ρίζες των τετμημένων των σημείων A_1 και A_5 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-\alpha x+\beta=0$ όπου $\alpha,\beta\in\Re$ με τους αριθμούς β και $1+20\alpha$ να είναι αντίστροφοι αριθμοί.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2}\cdot f(x_2)-3>0$

Γ2. Έστω $M\left(x,f\left(x\right)\right)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης f με $x>0$ να αποδείξετε ότι το τετράγωνο της απόστασης του σημείου Μ από το $O\left(0,0\right)$ είναι ίσο με $x^2+x+2+\dfrac{1}{x}$.

Γ3. Να βρεθεί το εύρος των τεταγμένων των σημείων $A_1,A_2,...,A_5$

Γ4. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του τετραγώνου της απόστασης τυχαίου σημείου $M\left(x,f\left(x\right)\right)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από το $O\left(0,0\right)$ όταν η τετμημένη του σημείου Μ γίνει ίση με 1.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Θεωρούμε κύκλο ακτίνας $R=2$ και εγγεγραμμένο ορθογώνιο σε αυτό $\mathrm{ΑΒΓΔ}$ με $\mathrm{AB}=x$ και $\mathrm{ΒΓ}=z$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Δ1. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο

$E\left(x\right)=x\cdot\sqrt{16-x^2}$

με $0<x<4$.

Δ2. Να βρεθεί το x ώστε το ορθογώνιο να έχει μέγιστο εμβαδόν.

Δ3. Θεωρούμε σημεία $A_i\left(x_i,y_i\right)$ με $y_i=E\left(x_i\right)$ και $1=x_1<x_2<x_3<x_4=2<x_5=2\sqrt{2}$ ενώ η διάμεσος των $y_i=E\left(x_i\right)$ είναι

$\delta = \dfrac{3\sqrt{55}}{4}$. Να υπολογίσετε το εύρος των τεταγμένων $y_i = E\left(x_i\right)$, $i = 1,2,3,4,5$.

Δ4. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα σημεία $A_i\left(x_i, y_i\right)$ με $i = 1,2,3,4,5$. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου

$$A = \left\{ A_i\left(x_i, y_i\right),\ i = 1,2,3,4,5 \text{ τέτοια ώστε } y_i \geq \sqrt{4x_3 - Rx_i - \left(\sqrt{15}x_i - 12\right) + 5x_i} \cdot x_i \right\}$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ