

34. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 60^\circ$. Αν είναι $B\Gamma = \Delta\Gamma = 8$ να βρεθεί το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου.

Λύση:

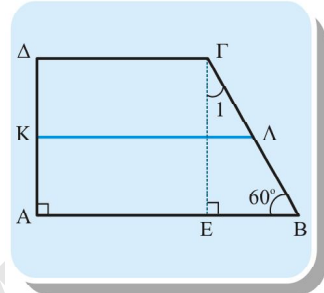
Φέρνουμε το ύψος ΓΕ του τραπέζιου. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ είναι $\hat{\Gamma}_1 = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

$$\text{Άρα } EB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Είναι $AB = AE + EB = \Delta\Gamma + EB = 8 + 4 = 12$

Τότε, αν Κ, Λ μέσα των μη παραλλήλων πλευρών θα είναι:

$$K\Lambda = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{12 + 8}{2} = \frac{20}{2} = 10$$



35. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\Gamma = x^2 + 4x$, $x > 0$. Αν Κ, Λ μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα και $K\Lambda = x + 4$ να βρεθεί το x.

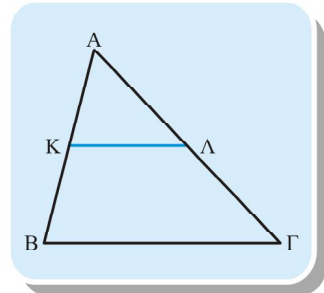
Λύση:

Αφού Κ, Λ μέσα των ΑΒ, ΑΓ τότε $K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα

$$x + 4 = \frac{x^2 + 4x}{2} \Leftrightarrow 2(x + 4) = x^2 + 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

Επομένως $x = 2$ ή $x = -4$ απορρίπτεται.



Κεφάλαιο 6

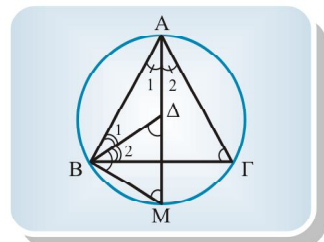
36. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλο στο Μ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΜ στο Δ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΒΔ είναι ισοσκελές.

Λύση:

Επειδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$, θα ισχύει:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}. \text{ Επίσης και } \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}, \text{ αφού η ΒΔ είναι}$$

διχοτόμος της $\hat{B}$. Στο $\triangle B\hat{A}M$ έχουμε:



• $\hat{M} = \hat{\Gamma}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\widehat{AB}$.

• $\hat{MB\Gamma} = \hat{A}_2$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\widehat{MG}$.

$$\text{Οπότε: } \hat{\Delta BM} = \hat{B}_2 + \hat{MB\Gamma} = \hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

$$\bullet \hat{B\Delta M} = 180^\circ - \hat{\Delta BM} - \hat{M} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

Άρα $\hat{\Delta BM} = \hat{B\Delta M} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, οπότε το $\triangle MB\Delta$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ.

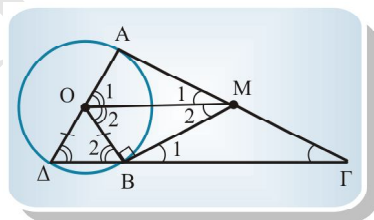
37. Από σημείο Μ εκτός κύκλου (Ο, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ στον κύκλο. Προεκτείνουμε την ΑΜ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα ΜΓ = ΜΑ. Αν Δ είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α, να δείξετε ότι τα σημεία Δ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Λύση:

Ισχύει: $MA = MB$ (1) ως εφαπτομένα τμήματα προς κύκλο από σημείο αυτού.

Επίσης η ΟΜ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{AMB}$ και $\hat{AOB}$,

οπότε: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.



Όμως $MG = MA \stackrel{(1)}{\Rightarrow} MG = MB$. Άρα το τρίγωνο MBΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ ως

προσκείμενες γωνίες στην βάση του ΒΓ. Η $\hat{AMB}$ είναι εξωτερική γωνία του $\triangle MB\Gamma$, οπότε:

$$\hat{AMB} = \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 2 \cdot \hat{B}_1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \hat{M}_2 = 2 \cdot \hat{B}_1 \Leftrightarrow \hat{M}_2 = \hat{B}_1$. Άρα $B\Gamma \parallel OM$ (2) διότι τεμνόμενες από την ΒΜ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες. Επειδή $OA = OB = R$ το τρίγωνο ΟΔΒ είναι ισοσκε-

λές. Άρα $\hat{\Delta} = \hat{B}_2$. Όμως $\hat{\Delta} = \frac{1}{2} \hat{AOB}$, αφού μια εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό

της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν. Άρα $\hat{\Delta} = \hat{O}_2 \Leftrightarrow \hat{B}_2 = \hat{O}_2$ οπότε $B\Delta \parallel OM$ (3) διότι τεμνόμενες από την ΟΒ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες. Άρα από τις (2) και (3) και λόγω του αιτήματος του Ευκλείδη, συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες ΒΔ και ΒΓ ταυτίζονται. Επομένως τα σημεία Δ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

38. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, θεωρούμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ και έστω Η το ορθόκεντρό του. Στο ΕΓ παίρνουμε τμήμα ΕΖ = ΑΕ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση:

Γεωμετρία της Α' Λυκείου

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ ($\hat{A} = 1^\circ$) έχουμε:

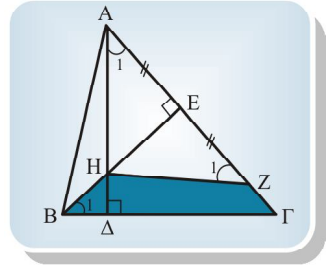
$$\hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma} \quad (1)$$

Ομοίως από το ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma}$ ($\hat{E} = 1^\circ$) έχουμε:

$$\hat{B}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma} \quad (2)$$

Το $\hat{A}\hat{H}\hat{Z}$ είναι ισοσκελές, αφού το HE είναι ύψος και διάμεσος,

άρα $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{Z}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \hat{Z}_1 = \hat{B}_1$. Άρα το τετράπλευρο $BHZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο αφού μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία.



39. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε το ύψος του AA . Από τυχαίο σημείο M του AA φέρουμε τις αποστάσεις του ME και MZ από τις AB και AG αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το $BEZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

Λύση:

Το τετράπλευρο $EM\Delta B$ είναι εγγράψιμο, αφού

$$\hat{B}\hat{E}M + \hat{B}\hat{A}M = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Άρα $\hat{B} + \hat{E}M\Delta = 180^\circ \quad (1)$

Ομοίως και το τετράπλευρο $AEMZ$ είναι εγγράψιμο ($\hat{A}\hat{E}M + \hat{A}\hat{Z}M = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$), οπότε η πλευρά του EM φαίνεται από τις κορυφές A και Z υπό ίσες γωνίες. Άρα

$$\hat{E}\hat{A}M = \hat{E}\hat{Z}M \quad (2).$$

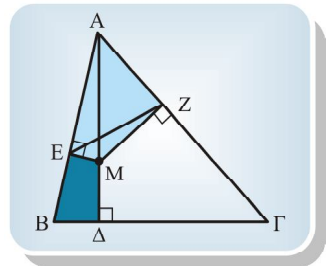
Στο τρίγωνο AEM η $\hat{E}M\Delta$ είναι εξωτερική, οπότε:

$$\hat{E}M\Delta = \hat{E}\hat{A}M + \hat{A}\hat{E}M \Leftrightarrow \hat{E}M\Delta = \hat{E}\hat{A}M + 90^\circ \quad (3)$$

Στο τετράπλευρο $BEZ\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{B} + \hat{E}\hat{Z}\hat{\Gamma} = \hat{B} + (\hat{E}\hat{Z}M + \hat{M}\hat{Z}\hat{\Gamma}) \stackrel{(2)}{=} \hat{B} + (\hat{E}\hat{A}M + 90^\circ) \stackrel{(3)}{=} \hat{B} + \hat{E}M\Delta \stackrel{(1)}{=} 180^\circ$$

Άρα το $BEZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο, αφού δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

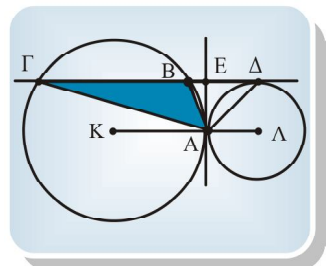


40. Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) με $R > \rho$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Από το σημείο Δ του κύκλου (Λ, ρ) φέρουμε ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο (Λ, ρ) και τέμνει τον κύκλο (K, ρ) στα σημεία B, Γ . Να δείξετε ότι η AA είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Lambda}\hat{A}\hat{\Delta}$

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ η $\hat{\Lambda}\hat{A}\hat{\Delta}$ είναι εξωτερική του γωνία, οπότε: $\hat{\Lambda}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} + \hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} \quad (1)$



Φέρουμε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων, η οποία τέμνει της ΓΔ στο Ε.

Τότε $EA = ED$ σαν εφαπτόμενα τμήματα από το Ε προς τον κύκλο (Λ, ρ). Άρα $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{\Delta}\hat{A}E$ (2) σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.

Επίσης $E\hat{A}B = A\hat{I}B$ (3) διότι η γωνία από χορδή και εφαπτομένη είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της.

$$H \quad (1) \xRightarrow{(2)} \hat{A}\hat{\Delta}\Delta = E\hat{A}B + \hat{\Delta}\hat{A}E \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\Delta = B\hat{A}\Delta \quad \text{ο.ε.δ.}$$

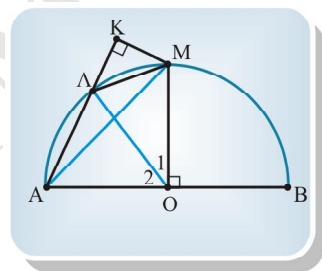
41. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, θεωρούμε το μέσο του Μ. Έστω Λ τυχαίο σημείο του

τόξου $\widehat{AB}$. Φέρουμε την ευθεία $MK \perp AL$. Να δείξετε ότι: $MK = KL$

Λύση:

Φέρουμε τα τμήματα ΛΜ, ΑΜ, ΟΛ, όπου Ο το κέντρο του ημικύκλιου. Τότε $OM \perp AB$, αφού για την επίκεντρη γωνία $B\hat{O}M$ ισχύει $B\hat{O}M = 90^\circ$ διότι βαίνει στο τόξο

$$\widehat{BM} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$



Στο τρίγωνο ΑΛΜ η $K\hat{A}M$ είναι εξωτερική, οπότε:

$$K\hat{A}M = \hat{A}\hat{A}M + A\hat{M}L \quad (1)$$

Όμως κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι, κατά μέτρο, ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν.

$$\text{Άρα: } \bullet \hat{A}\hat{A}M = \frac{1}{2}\hat{O}_1 \quad \bullet A\hat{M}L = \frac{1}{2}\hat{O}_2$$

$$H \quad (1) \xRightarrow{(2)} K\hat{A}M = \frac{1}{2}\hat{O}_1 + \frac{1}{2}\hat{O}_2 \Leftrightarrow K\hat{A}M = \frac{1}{2}(\hat{O}_1 + \hat{O}_2) \Leftrightarrow K\hat{A}M = \frac{1}{2}A\hat{O}M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K\hat{A}M = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ \Leftrightarrow K\hat{A}M = 45^\circ$$

Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο στο Κ και $K\hat{A}M = 45^\circ$, οπότε και $K\hat{M}L = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι και ισοσκελές, οπότε $LK = MK$.

42. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου σε σημείο Δ, να δείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΙΒΔ είναι ισοσκελές, όπου Ι είναι το εγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Το σημείο Δ είναι περίκεντρο του τριγώνου ΙΒΓ.

Λύση:

α. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ, οι οποίες τέμνονται

Γεωμετρία της Α' Λυκείου

στο έγκεντρο I. Τότε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$.

Στο τρίγωνο IΒΔ έχουμε:

- η γωνία του $\hat{B}\hat{I}\Delta$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΙ, οπότε:

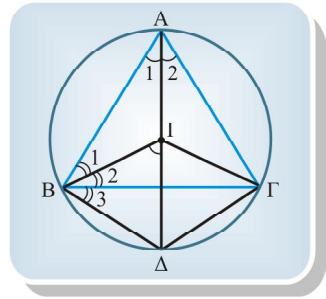
$$\hat{B}\hat{I}\Delta = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$$

- $\hat{I}\hat{B}\Delta = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = \hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$, αφού

$\hat{B}_3 = \hat{A}_2$ σαν εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$. Άρα $\hat{B}\hat{I}\Delta = \hat{I}\hat{B}\Delta$ οπότε το τρίγωνο IΒΔ είναι ισοσκελές με κορυφή το Δ, οπότε: $\Delta B = \Delta I$ (1)

- β. Επειδή οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ είναι ίσες, θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές τους, δηλαδή $\Delta B = \Delta \Gamma$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $\Delta B = \Delta I = \Delta \Gamma$, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου IΒΓ, άρα είναι το περίκεντρο του.



43. Έστω σημείο Δ το οποίο δεν ανήκει στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ. Αν οι προβολές του Δ στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ είναι συνευθειακά σημεία, να δείξετε ότι το Δ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση:

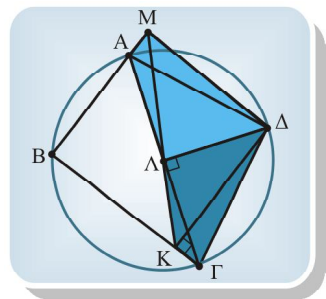
Έστω $\Delta K \perp \Delta \Gamma$, $\Delta \Delta \perp \Delta \Gamma$, $\Delta \Delta \perp \Delta \Gamma$, με τα σημεία Κ, Λ, Μ να ανήκουν στην ίδια ευθεία. Για να δείξουμε ότι το Δ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ αρκεί να δείξουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο. Το τετράπλευρο

ΚΛΔΓ είναι εγγράψιμο, αφού $\hat{\Gamma}\hat{K}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\Delta = 90^\circ$, δηλαδή η πλευρά του ΓΔ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Κ, Λ

υπό ίσες γωνίες. Άρα $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Delta}\hat{\Lambda}\Delta$ (1), διότι σε εγγράψιμο τετράπλευρο μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική. Επίσης το τετράπλευρο ΑΜΔΛ είναι εγγράψιμο, αφού δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές

($\hat{\Delta}\hat{\Lambda}\Delta + \hat{\Delta}\hat{\Delta}\Delta = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$). Άρα $\hat{\Delta}\hat{\Lambda}\Delta = \hat{\Delta}\hat{\Delta}\Delta$ (2), αφού σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Delta}\hat{\Delta}\Delta$. Συνεπώς στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική. Άρα το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.



44. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα ύψη του BA και ΓE . Αν H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, M το μέσο της πλευράς AB και N το μέσο του HB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔMEN είναι εγγράψιμο.

Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle B\hat{A}\Delta$ η $M\Delta$ είναι η διάμεσος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του AB . Άρα

$$\Delta M = \frac{AB}{2} = AM. \text{ Συνεπώς το τρίγωνο } A\Delta M \text{ είναι ισοσκε-}$$

λές με κορυφή το M , οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}$ (1) ως προσκείμενες γωνίες στην βάση του $A\Delta$. Τότε για την εξωτερική γωνία $\hat{M}_1$ του τριγώνου $A\Delta M$ έχουμε:

$$\hat{M}_1 = \hat{A} + \hat{\Delta}_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{M}_1 = 2\hat{A} \quad (2).$$

Το τετράπλευρο $A\Delta H E$ έχει $\hat{A}\hat{\Delta}H + \hat{A}\hat{E}H = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο. Συνεπώς θα ισχύει ότι $\hat{H}_1 = \hat{A}$ (3), αφού κάθε εξωτερική γωνία εγγράψιμου τετραπλευρού είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEH η EN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα BH .

$$\text{Άρα } EN = \frac{BH}{2} = NH. \text{ Δηλαδή το τρίγωνο } ENH \text{ είναι ισοσκελές με κορυφή } N. \text{ Άρα } \hat{H}_1 = \hat{E}_1$$

(4) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του. Οπότε για την εξωτερική του γωνία $\hat{N}_1$ έχουμε:

$$\hat{N}_1 = \hat{E}_1 + \hat{H}_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{N}_1 = 2\hat{H}_1 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{N}_1 = \hat{M}_1. \text{ Άρα το τετράπλευρο } \Delta MEN \text{ είναι εγγράψιμο, αφού}$$

μία εξωτερική γωνία του είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

