

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

- 1) Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος OP, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες MAO και MBO είναι ίσες.

(Μονάδες 13)

- α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle PAO$ και $\triangle PBO$:

1. $PA = PB$ (ως εφαπτόμενα τμήματα)

2. $OA = OB = \rho$

3. OP κοινή πλευρά

Άρα από το τρίτο κριτήριο ισότητας τριγώνων

έχουμε ότι $\triangle PAO = \triangle PBO \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (1)

Συγκρίνω τα $\triangle PAM$ και $\triangle PMB$:

1. $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (σχέση 1)

2. $PA = PB$ (ως εφαπτόμενα τμήματα)

3. MP κοινή πλευρά

Επομένως $\triangle PAM = \triangle PMB$

- β) Αφού $\triangle PAM = \triangle PMB \Rightarrow \hat{PAM} = \hat{PBM}$ (2)

Ακόμα $\hat{OAP} = \hat{OBP} = 90^\circ$.

Επομένως $\hat{MAO} = \hat{OAP} - \hat{PAM} = 90^\circ - \hat{PAM} \stackrel{(2)}{=} 90^\circ - \hat{PBM} = \hat{MBO}$.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ) και ίσες πλευρές AB, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD = \frac{1}{3} AB$ και $AE = \frac{1}{3} AG$. Αν M είναι το μέσο της BΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα BD και ΓΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 5)

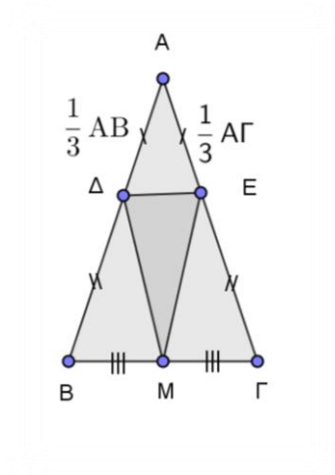
β) τα τρίγωνα BDM και MEG είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔΕM είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου



α) Έχουμε ότι $\Delta B = AB - \Delta A = AB - \frac{1}{3} AB = \Delta \Gamma - \frac{1}{3} \Delta \Gamma = \Delta \Gamma - \Delta E = \Delta E$

Άρα $\Delta B = \Delta E$

β) συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle B \Delta M$ $\triangle E \Delta M$

i) $\hat{B} = \hat{E}$ (γιατί $\triangle ABC$ ισοσκελές)

ii) $B \Delta = \Delta E$ (από το α))

iii) $BM = EM$ (γιατί M μέσο BG)

Επομένως $\triangle B \Delta M = \triangle E \Delta M$ (Π-Γ-Π)

γ) Αφού $\triangle B \Delta M = \triangle E \Delta M$ έχουμε ότι $\Delta M = EM$ άρα $\triangle DEM$ ισοσκελές.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA = KB$) και KΓ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M, έτσι ώστε $AL = BM$. Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο KΛM είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β. Η KΓ είναι διάμεσος του τριγώνου KΛM

(Μονάδες 13)



Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

α) Συγκρίνω τα $\triangle K\Lambda\Lambda$ και $\triangle KBM$ και έχουν:

i) $AK = KB$ (γιατί $\triangle KAB$ ισοσκελές)

ii) $\Lambda\Lambda = BM$ (δεδομένο)

iii) $\hat{K}\Lambda\Lambda = \hat{K}BM$ (ως παραπληρώματα ίσων γωνιών, των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ αφού το $\triangle KAM$ είναι ισοσκελές)

Άρα $\triangle K\Lambda\Lambda = \triangle KBM$ και επομένως $K\Lambda = KM$

β) Αφού $\triangle K\Lambda\Lambda = \triangle KBM$ τότε $\hat{A}\hat{K}\Lambda = \hat{B}\hat{K}M$. Άρα $\hat{L}\hat{K}\Gamma = \hat{M}\hat{K}\Gamma$ και $K\Gamma$ είναι διχοτόμος του $\triangle LKM$ και αφού $\triangle LKM$ είναι ισοσκελές τότε $K\Gamma$ διάμεσος του $\triangle LKM$.

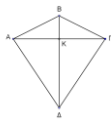
4. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 13)



α) Έστω K το σημείο τομής των $A\Gamma$ και $B\Delta$. Στο $\triangle AB\Gamma$ το BK είναι ύψος ισοσκελούς (αφού $AB = B\Gamma$).

Άρα BK είναι διχοτόμος του $\triangle AB\Gamma$. Ομοίως στο $\triangle A\Gamma\Delta$.

β) Έχουμε ότι $AB = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$.

Δηλαδή τα σημεία B και Δ ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$. Επομένως $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του $A\Gamma$.

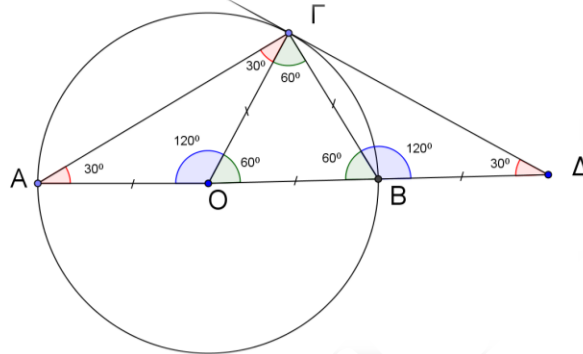
5. Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB , και χορδή AG τέτοια ώστε $\hat{BAG} = 30^\circ$. Στο σημείο G φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $O\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AO\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)



α) Το τρίγωνο $\triangle AOG$ είναι ισοσκελές γιατί $AO = OG = R$. Άρα $\hat{OAG} = \hat{AGO} = 30^\circ$

Η $\hat{BOG}$ είναι εξωτερική του $\triangle AOG$, άρα $\hat{BOG} = \hat{OAG} + \hat{AGO} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

Όμως $\Gamma\Delta$ εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R) άρα $\Gamma\Delta \perp OG$. Δηλαδή $\hat{O\Gamma\Delta} = 90^\circ$.

Άρα $\hat{\Gamma\Delta O} = 180^\circ - (\hat{GO\Delta} + \hat{O\Gamma\Delta}) = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle AOG$ $\triangle \Gamma B\Delta$:

i) $AO = B\Delta$ γιατί: Το $\triangle BOG$ είναι ισόπλευρο αφού $OB = OG = R$ και $\hat{BOG} = 60^\circ$. Άρα

$OB = BG = AO = \alpha$ και $\hat{\Delta BG} = 180^\circ - \hat{OBG} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, ενώ $\hat{B\Gamma\Delta} = 30^\circ$ (από το (α) ερώτημα). Άρα $\hat{B\Gamma\Delta} = 30^\circ$.

Επομένως το $\triangle B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές άρα $B\Gamma = B\Delta = R$. Τότε

ii) $B\Delta = B\Gamma = AO = R$

iii) $\hat{AOG} = \hat{\Gamma\Delta O} = 120^\circ$

Από το 1^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων έχουμε ότι $\triangle AOG \cong \triangle \Gamma B\Delta$

6. Δίνεται γωνία α και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες $O\alpha$ και $O\gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $MA = MB$

(Μονάδες 15)

β) Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{AMB}$

(Μονάδες 10)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

α) Συγκρίνω τα $\triangle OAM$ $\triangle OBM$:

i) $OA = OB$ (δεδομένο)

ii) OM κοινή

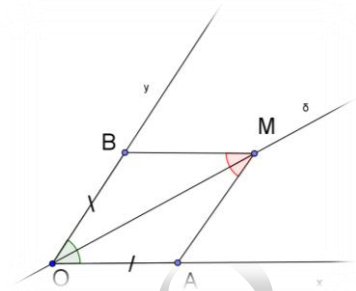
iii) $\angle AOM = \angle BOM = \frac{\angle AOB}{2}$ (αφού Od διχοτόμος)

Από το 1^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων έχουμε

ότι $\triangle OAM = \triangle OBM$.

Άρα $MA = MB$.

β) Αφού $\triangle OAM = \triangle OBM$ τότε $\angle AMO = \angle BMO$ άρα OM διχοτόμος της $\angle AMB$.



7. Αν $\angle AOB = \angle BO\Gamma = \angle \Gamma O\Delta$ και $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, να αποδείξετε ότι:

α) $A\Gamma = B\Delta$.

(Μονάδες 10)

β) Το M είναι μέσον της $B\Delta$, όπου M το σημείο τομής των τμημάτων $O\Gamma$ και $B\Delta$.

(Μονάδες 15)



α) Τα $\triangle AOG$ $\triangle BO\Delta$ έχουν $AO = OB$ και $O\Gamma = O\Delta$, ενώ $\angle AOG = \angle BO\Delta = 2\omega$.

Άρα $\triangle AOG = \triangle BO\Delta \Rightarrow A\Gamma = B\Delta$.

β) Το $\triangle BO\Delta$ είναι ισοσκελές αφού $OB = O\Delta$ και η OM είναι η διχοτόμος της $\angle BO\Delta$.

Άρα OM θα είναι και διάμεσος. Δηλαδή M μέσο της $B\Delta$

8. Δίνεται κύκλος κέντρου O , και από ένα σημείο P εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο M και η εφαπτόμενη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία APB είναι 40° να υπολογίσετε τη γωνία AOB .

(Μονάδες 12)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Έχουμε ότι PA, PB είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα $PA = PB$ (1). Ακόμα $\Delta A, \Delta M$ είναι εφαπτόμενα τμήματα άρα $\Delta A = \Delta M$ (2) και $\Gamma M, \Gamma B$ είναι εφαπτόμενα τμήματα άρα $\Gamma M = \Gamma B$ (3). Τέλος OP είναι διάκεντρος, επομένως M είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$, δηλαδή $\Delta M = \Gamma M$.

$$(4) \xRightarrow{(2)} \Delta A = \Gamma B \xRightarrow{(3)} (5).$$

Άρα $PA = AP - \Delta A = BP - \Gamma B = PB$. Δηλαδή το $\triangle P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) Το $\triangle P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και η PM είναι

διχοτόμος άρα $\hat{A}PO = \frac{\hat{A}PB}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$. Στο

$$\triangle AOP \text{ έχω } \hat{AOP} = 180^\circ - (\hat{AOP} + \hat{APO}) = 180^\circ - (90^\circ + 20^\circ) = 70^\circ. \text{ Ομοίως } \hat{BOP} = 70^\circ.$$

$$\text{Άρα } \hat{AOB} = \hat{AOP} + \hat{BOP} = 70^\circ + 70^\circ = 140^\circ.$$

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς τα A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$

(Μονάδες 6)

β) $B\Delta = \Gamma E$

(Μονάδες 10)

γ) $\hat{\Delta B\Gamma} = \hat{E\Gamma B}$

(Μονάδες 9)

α) Τα $\triangle ABE$ και $\triangle A\Delta\Gamma$ είναι ίσα γιατί $AE = A\Delta$,

$AB = A\Gamma$ (αφού $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές) και $\hat{EAB} = \hat{\Delta A\Gamma}$ ως κατακορυφήν. Άρα από το 1^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων ισχύει ότι

$$\triangle ABE \cong \triangle A\Delta\Gamma \Rightarrow BE = \Gamma\Delta$$

β) Έχουμε ότι $B\Delta = AB + A\Delta \stackrel{AB=A\Gamma}{\stackrel{A\Delta=AE}{=}} A\Gamma + AE = \Gamma E$.

γ) Αφού το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές έχω $\hat{\Delta B\Gamma} = \hat{E\Gamma B}$.



Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

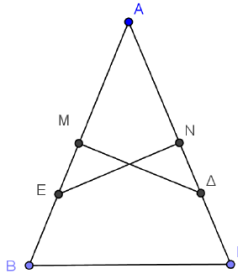
10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $M\Delta = NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

(Μονάδες 12)

β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = NE$.

(Μονάδες 13)



α) Για τα $\triangle AM\Delta$ και $\triangle ANE$ έχω: $M\Delta = NE$, είναι ορθογώνια και $\hat{A}$ κοινή.

$$\text{Άρα } \triangle AM\Delta = \triangle ANE \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow AB = A\Gamma.$$

β) Έχουμε $AB = A\Gamma \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow AM = AN$.

Τα $\triangle AM\Delta$ και $\triangle ANE$ έχουν $AM = AN$, $\hat{A}$ κοινή και είναι ορθογώνια.

$$\text{Άρα } \triangle AM\Delta = \triangle ANE \Rightarrow M\Delta = NE$$

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

11. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $AB = 6$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω .

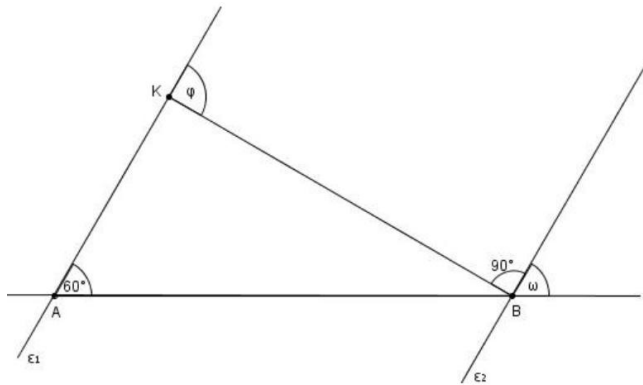
(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)



α) Έχουμε ότι η γωνία K του τριγώνου $\triangle ABK$ είναι εντός εναλλάξ των 90° .

Άρα $\hat{K} = 90^\circ$ δηλαδή $\hat{\phi} = 180^\circ - \hat{K} = 90^\circ$. Τότε $\angle KBA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Ακόμα $30^\circ + 90^\circ + \hat{\omega} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^\circ$.

β) Αφού $\hat{K} = 90^\circ$ έχουμε ότι $\triangle ABK$ είναι ορθογώνιο.

γ) Στο $\triangle ABK$ έχουμε ότι $\hat{K} = 90^\circ$ και $\hat{A} = 60^\circ$ και $\angle KBA = 30^\circ$.

$$\text{Επομένως } AK = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

12. Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 15)

β) Αν η πλευρά $B\Gamma = 2\text{cm}$ να βρείτε το μήκος της $A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

α) Έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \xRightarrow{\hat{A}=3\hat{\Gamma}} 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Επομένως $\hat{A} = 120^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ$

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Άρα το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

$$\text{Ακόμα } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{\Gamma}) = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

β) Στο $\triangle AB\Gamma$ έχω $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$ επομένως $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = 1 \text{ cm}$.

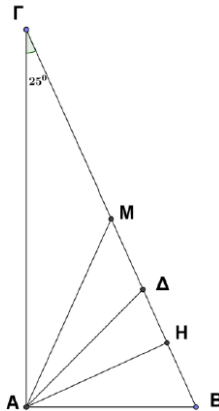
13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{AMB}$, $\hat{HAB}$, $\hat{ADB}$

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{MAD} = \hat{DAH} = 20^\circ$

(Μονάδες 10)



α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχω $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{B} + 25^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 65^\circ$.

Ακόμα AM διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

$$\text{Άρα } AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM.$$

Το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές αφού $AM = BM$.

$$\text{Άρα } \hat{MAB} = \hat{B} = 65^\circ. \text{ Ακόμα } \hat{AMB} = 180^\circ - (\hat{MAB} + \hat{B}) = 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ) = 50^\circ$$

$$\text{Στο τρίγωνο } AHB \text{ έχω: } \hat{HAB} = 180^\circ - (\hat{AHB} + \hat{B}) = 180^\circ - (90^\circ + 65^\circ) = 25^\circ$$

$$\text{Στο τρίγωνο } ADB \text{ έχω: } \hat{ADB} = 180^\circ - (\hat{DAB} + \hat{B}) = 180^\circ - (45^\circ + 65^\circ) = 70^\circ.$$

β) $\hat{MAD} = \hat{MAB} - \hat{DAB} = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$ και $\hat{DAH} = \hat{DAB} - \hat{HAB} = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$

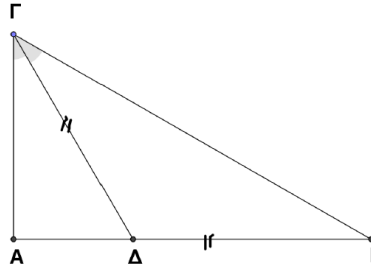
14. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{ cm}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = 30^\circ$.

(Μονάδες 12)

β) $AB = 3\text{ cm}$

(Μονάδες 13)



α) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, άρα $\hat{A\Gamma\Delta} = \hat{\Delta\Gamma B} = \omega$. Ακόμα $\Gamma\Delta = \Delta B$ άρα το $\triangle\Gamma\Delta B$ είναι ισοσκελές και επομένως $\hat{\Delta\Gamma B} = \hat{B} = \omega$

Στο $\triangle AB\Gamma$ έχω $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 2\omega + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = 30^\circ$. Άρα $\hat{B} = 30^\circ$.

β) Στο $\triangle A\Gamma\Delta$ έχω $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{A\Gamma\Delta} = 30^\circ$ άρα $A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Άρα $AB = A\Delta + \Delta B = 1 + 2 = 3\text{ cm}$.

15. Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία A ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει

$\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AEZ\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Να υποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και EBZ είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 12)

α) Στο $\triangle AB\Gamma$ έχω $\hat{B} = 30^\circ$ και είναι ορθογώνιο άρα

$$\hat{A\Gamma B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

Στο $\triangle A\Delta E$ έχω $\hat{\Delta} = 30^\circ$ και είναι ορθογ. άρα $\hat{A\Delta E} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{\Delta}) = 60^\circ$

Στο τετράπλευρο $AEZ\Gamma$ έχω $\hat{A} + \hat{A\Gamma Z} + \hat{\Gamma Z E} + \hat{Z E A} = 360^\circ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{\Gamma Z E} + 60^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma Z E} = 150^\circ$$

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

β) Ακόμα $\hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta = 180^\circ - \hat{\Gamma}\hat{Z}E = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ = \hat{\Delta}$. Άρα το $\hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta$ είναι ισοσκελές.

Ακόμα $\hat{E}\hat{Z}B = \hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta = 30^\circ$ ως κατακορυφήν. Άρα $\hat{E}\hat{Z}B = \hat{B} = 30^\circ$, δηλαδή το $\hat{E}\hat{Z}B$ είναι ισοσκελές.

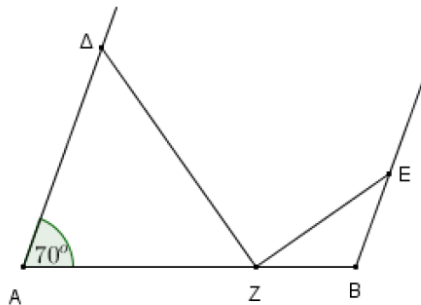
16. Στο παρακάτω σχήμα, οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΑΖ$, $ΒΕ = ΒΖ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ.

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta}\hat{Z}E = 90^\circ$.

(Μονάδες 9)



α) Το $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z}$ είναι ισοσκελές γιατί $ΑΔ = ΑΖ$, επομένως $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = \hat{\Delta}\hat{Z}A = \omega$.

$$\text{Ακόμα } \hat{\Delta}\hat{A}\hat{Z} + \hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} + \hat{\Delta}\hat{Z}A = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \omega + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega = 110^\circ \Leftrightarrow \omega = 55^\circ.$$

$$\text{Άρα } \hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = \hat{\Delta}\hat{Z}A = 55^\circ.$$

Ομοίως το $\hat{Z}\hat{B}E$ είναι ισοσκελές γιατί $BZ = BE$ άρα $\hat{B}\hat{Z}E = \hat{Z}\hat{E}B = \varphi$.

Ακόμα $ΑΔ // ΒΕ$ άρα $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{Z}, \hat{Z}\hat{B}E$ είναι εντός και επί τα αυτά των ΑΔ και ΒΕ άρα και παραπληρωματικές.

$$\text{Δηλαδή } \hat{\Delta}\hat{A}\hat{Z} + \hat{Z}\hat{B}E = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{Z}\hat{B}E = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Z}\hat{B}E = 110^\circ.$$

$$\text{Στο } \hat{B}\hat{E}Z \text{ έχω: } \hat{Z}\hat{B}E + \hat{B}\hat{Z}E + \hat{Z}\hat{E}B = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + \varphi + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi = 35^\circ$$

$$\text{Άρα } \hat{B}\hat{Z}E = \hat{Z}\hat{E}B = 35^\circ.$$

β) Ισχύει ότι $\hat{A}\hat{Z}\Delta + \hat{\Delta}\hat{Z}E + \hat{E}\hat{Z}B = 180^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + \hat{\Delta}\hat{Z}E + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{Z}E = 90^\circ$.

17. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

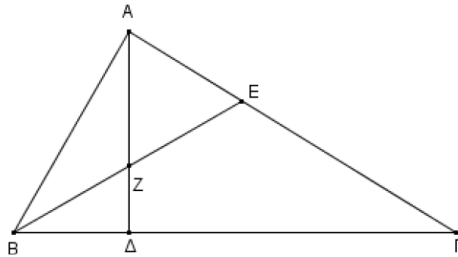
α) Να αποδείξετε ότι η γωνία Β είναι 60° .

(Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 15)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου



α) Έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$

β) Στο $\triangle AB\Gamma$ έχω $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$. Ακόμα στο $\triangle ABE$ έχω $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{ABE} = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$.

Άρα $\hat{AEB} = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$.

Στο $\triangle BZ\Delta$ έχω $\hat{BZ\Delta} + \hat{\Delta} + \hat{Z\Delta B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BZ\Delta} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Ακόμα $\hat{BZ\Delta}$, $\hat{AZE}$ είναι ίσες ως κατακορυφήν, άρα $\hat{BZ\Delta} = \hat{AZE} = 60^\circ$.

Δηλαδή, $\hat{AEB} = \hat{BZ\Delta} = 60^\circ$ άρα το $\triangle AZE$ είναι ισοσκελές.

18. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και με M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB .

(Μονάδες 15)



α) Στο $\triangle AB\Gamma$ έχω $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 35^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 55^\circ$.

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

β) Ισχύει ότι $AM = \frac{BG}{2} = BM$, αφού AM η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $\triangle AB\Gamma$

Άρα $\triangle ABM$ είναι ισοσκελές με $BM = AM$, επομένως $\hat{B} = \hat{BAM} = 35^\circ$ και

$$\hat{BMA} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{BAM}) = 180^\circ - (35^\circ + 35^\circ) = 110^\circ.$$

19. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i) $\hat{ABE}$

(Μονάδες 8)

ii) $\hat{BEA}$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

α) i) Το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, επομένως $\hat{AB\Gamma} = 60^\circ$.

$$\text{Άρα } \hat{ABE} = \hat{AB\Gamma} + \hat{\Gamma BE} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.$$

ii) Στο $\triangle ABE$ έχω $AB = B\Gamma = BE$, άρα $\triangle ABE$ ισοσκελές

Επομένως $\hat{BAE} = \hat{BEA} = \omega$. Στο $\triangle ABE$ ισχύει:

$$\hat{ABE} + \hat{BAE} + \hat{BEA} = 180^\circ \Leftrightarrow 150^\circ + \omega + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega = 30^\circ \Leftrightarrow \omega = 15^\circ.$$

$$\text{Άρα } \hat{BEA} = 15^\circ.$$

β) Για τα $\triangle ABE$ και $\triangle A\Gamma\Delta$ έχω $AB = A\Gamma$, $BE = \Gamma\Delta$ και $\hat{ABE} = \hat{A\Gamma\Delta} = 150^\circ$.

$$\text{Άρα } \triangle ABE \cong \triangle A\Gamma\Delta \Rightarrow AE = A\Delta \Rightarrow \triangle A\Delta E \text{ ισοσκελές.}$$

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

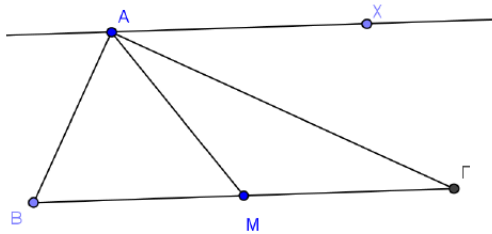
20. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$

(Μονάδες 12)

β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx

(Μονάδες 13)



α) Στο $\triangle AB\Gamma$ έχω $\hat{A} = 90^\circ$ και AM διάμεσος, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$.

Επομένως $\triangle AM\Gamma$ είναι ισοσκελές και τότε $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$.

β) Έχουμε ότι $Ax \parallel B\Gamma$ και $\hat{x}\hat{A}\hat{\Gamma}$, $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{M}$ είναι εντός εναλλάξ άρα

$$\hat{x}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{M} \stackrel{\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}}{\Rightarrow} \hat{x}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} \Rightarrow A\Gamma \text{ διχοτόμος της } \hat{M}\hat{A}\hat{x}.$$

21. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $\Delta\Delta=9$, $E\Gamma=10$, και $B\Gamma=30$.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

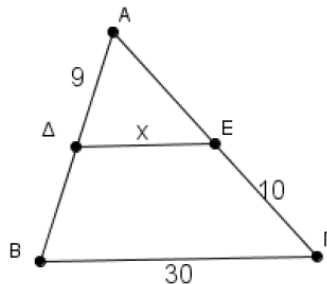
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔE .

(Μονάδες 8)



α) Αφού Δ, E μέσα των $AB, A\Gamma$ ότι $\Delta\Delta = \Delta B = 9$ και $\Delta E = E\Gamma = 10$.

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Άρα $AB = 2AD = 18$ και $AG = 2AE = 2 \cdot 10 = 20$.

Επομένως $\Pi_{AB\Gamma} = AB + BG + AG = 18 + 30 + 20 = 68$

β) Αφού Δ, E μέσα των AB, AG έχω ότι $DE \parallel \frac{BG}{2}$ άρα $\Delta E\Gamma B$ τραπέζιο.

γ) Ακόμα $DE \parallel \frac{BG}{2} \Leftrightarrow x = \frac{30}{2} = 15$

22. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, $AE=8$, $E\Delta=9$, $\Delta B=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

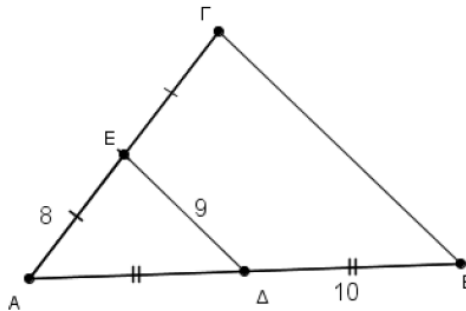
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

(Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$.

(Μονάδες 9)



α) Έχουμε ότι Δ, E μέσα των AG, AB άρα $DE \parallel B\Gamma$, επομένως $\Delta E\Gamma B$ τραπέζιο.

β) Ακόμα $DE \parallel \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 9 \Leftrightarrow x = 18$

γ) $\Pi_{AB\Gamma} = AB + B\Gamma + AG = 20 + 16 + 18 = 54$

$\Pi_{\Delta E\Gamma B} = E\Delta + \Delta B + B\Gamma + \Gamma E = 9 + 10 + 18 + 8 = 45$

Επομένως $\Pi_{AB\Gamma} > \Pi_{\Delta E\Gamma B}$

23. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE=8$ και $\Delta B=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 8)

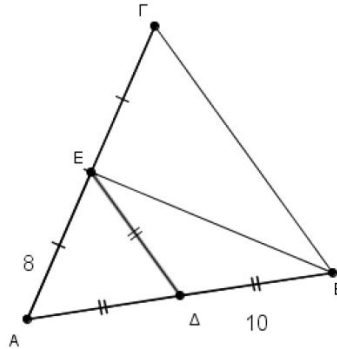
β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma=20$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου



α) Έχουμε ότι $AD = DE$ άρα το $\triangle ADE$ είναι ισοσκελές.

Επομένως $\hat{A} = \hat{AED} = \hat{\omega}$ και το $\triangle EDB$ είναι ισοσκελές αφού $\hat{DEB} = \hat{EBD} = \hat{\omega}$

Στο $\triangle AEB$ έχω ότι $\hat{A} + \hat{AEB} + \hat{EBA} = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$\omega + 2\omega + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow 4\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = 45^\circ.$$

Επομένως $\hat{AEB} = 2\omega = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. Άρα το $\triangle AEB$ είναι ορθογώνιο.

β) Ακόμα Δ, E τα μέσα των πλευρών AG, AB άρα $DE \parallel \frac{BG}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow BG = 20$

γ) $\Pi_{ABG} = AB + BG + GA = 20 + 20 + 16 = 56$

24. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και το σημείο O είναι το μέσο της BA .

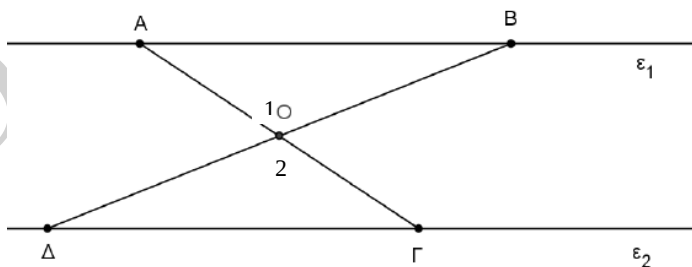
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα AOB και $GOΔ$ είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους.

(Μονάδες 12)

β) το $ABΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω τα $\triangle AOB$, $\triangle GOΔ$:

1. $\hat{B} = \hat{\Delta}$ (ως εντός εναλλάξ)

2. $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ως κατακορυφήν)

3. $OB = OΔ$ (δεδωμένο)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

$$\text{Άρα } \hat{\Delta} \text{ AOB} = \hat{\Delta} \text{ ΓΟΔ} \Rightarrow \text{AB} = \text{ΓΔ}, \text{OA} = \text{ΟΓ} \hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$$

β) Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί $\text{AB} // \text{ΓΔ}$. Δηλαδή το ΑΒΓΔ έχει δύο πλευρές ίσες και παράλληλες.

25. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αx της γωνίας $\hat{\Delta}$ και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αx. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

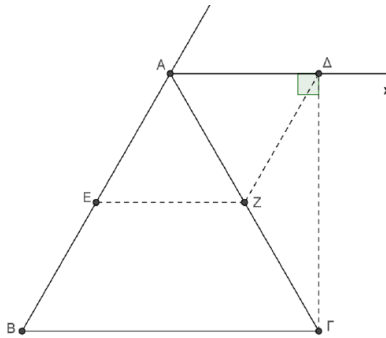
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 12)



α) Το $\hat{\Delta}$ ΑΒΓ είναι ισόπλευρο επομένως $\hat{\Delta} = 60^\circ$. Ακόμα $\hat{\Delta}_{\text{εξ}} = 120^\circ$. Αφού Αx εξωτερική διχοτόμος τότε $\hat{\Delta} \text{ ZAA} = 60^\circ$. Στο $\hat{\Delta}$ ΑΔΓ έχω $\hat{\Delta} = 90^\circ$ και ΔΖ η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου. Άρα $\Delta \text{Z} = \frac{\text{ΑΓ}}{2} = \text{AZ}$ δηλαδή το $\hat{\Delta}$ ΑΔΖ είναι ισοσκελές με $\hat{\Delta} \text{ AZ} = 60^\circ$ άρα είναι και ισόπλευρο.

β) Έστω ότι η κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου $\hat{\Delta}$ ΑΒΓ είναι 2α .

Έχω ότι Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ τότε $\text{EZ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Ακόμα το $\hat{\Delta}$ ΑΔΖ είναι ισόπλευρο επομένως $\text{AD} = \text{ΔΖ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Επιπλέον $\text{AE} = \frac{\text{ΑΒ}}{2} = \alpha$. Άρα ΑΔΖΕ ρόμβος (4 ίσες πλευρές).

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

26. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ καθέτους στη διαγώνιο BA , οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα.

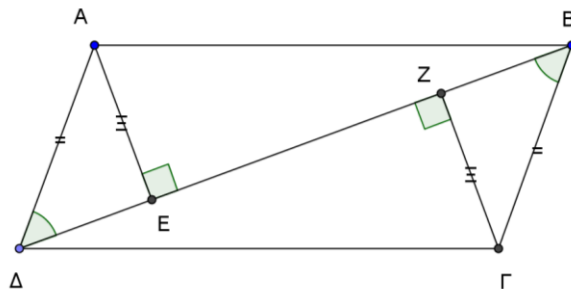
Να αποδείξετε ότι:

α) $AE = \Gamma Z$.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)



α) Συγκρίνω τα $\triangle AED$ $\triangle \Gamma Z$ (ορθογώνια)

i) $\hat{A} = \hat{B}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AD , $B\Gamma$

ii) $AD = B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου

Άρα $\triangle AED = \triangle \Gamma Z \Rightarrow AE = \Gamma Z$

β) Αφού $AE \perp BA$ και $\Gamma Z \perp BA$ έχουμε ότι $AE // \Gamma Z$.

Ακόμα $AE = \Gamma Z$. Άρα οι δύο απέναντι πλευρές του $AE\Gamma Z$ είναι ίσες και παράλληλες άρα το $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο

27. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ($AB//\Gamma\Delta$), με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AED , $BZ\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 9)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου



α) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο άρα $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο $B\Gamma Z$ έχω: $\hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ - (\hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}) = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$.

Επομένως $\hat{B} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$ αφού $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ (ορθογώνια)

i) $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$

ii) $A\Delta = B\Gamma$

Επομένως $\overset{\Delta}{AE\Delta} = \overset{\Delta}{B\Gamma Z}$

γ) Στο τρίγωνο $B\Gamma Z$ έχω $\hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ άρα $Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Ακόμα $\Delta E = Z\Gamma = 2$ (αφού $\overset{\Delta}{AE\Delta} = \overset{\Delta}{B\Gamma Z}$). Τέλος το $ABZE$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τις απέναντι πλευρές ανά 2 παράλληλες και μία γωνία ορθή ($\hat{Z} = 90^\circ$).

Άρα $EZ = AB = 6$. Δηλαδή $\Gamma\Delta = \Delta E + EZ + Z\Gamma = 2 + 6 + 2 = 10$ και

$\Pi_{AB\Gamma\Delta} = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 6 + 4 + 10 + 4 = 24$.

28. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην $A\Delta$ στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $\Delta E = B\Gamma$. (Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $AB\Delta E$ παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)



α) Το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 60^\circ$ και η $A\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, άρα $A\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} + \hat{B} = 120^\circ$.

Γεωμετρία Α' Λυκείου

Το $\triangle A\hat{G}\Delta$ είναι ισοσκελές γιατί $AG = G\Delta$, άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}A = x$.

Ακόμα $\Gamma\hat{A}\Delta + A\hat{G}\Delta + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow x + 120^\circ + x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ$.

Άρα $B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, $B\hat{\Delta}A = 30^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$

- β) Έχουμε ότι $B\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}E = 90^\circ$ και $B\hat{A}\Delta$, $A\hat{\Delta}E$ είναι εντός εναλλάξ των AB , ΔE άρα $AB \parallel \Delta E$. Ακόμα $AB = \Delta E$ επομένως $ABE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

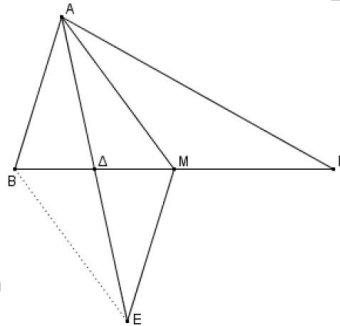
29. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta = \Delta E$.
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

β) $ME = M\Gamma$.

(Μονάδες 13)



- α) Στο τετράπλευρο $ABEM$ ισχύει ότι $A\Delta = \Delta E$ και $B\Delta = \Delta M$ αφού Δ μέσο της BM . Άρα οι διαγώνιοι του $ABEM$ διχοτομούνται επομένως το $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Έχουμε ότι το $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $AB = ME$ και $AB = M\Gamma$. Επομένως $ME = M\Gamma$.

30. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE = 1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

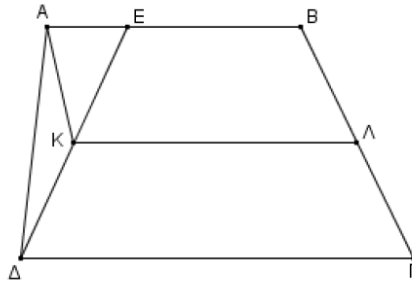
α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπεζίου $EB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου



α) Στο τραπέζιο BEΔΓ έχω ΚΛ διάμεσο άρα $ΚΛ = \frac{BE + ΓΔ}{2} = 3$

β) Αφού ΚΛ διάμεσος του BEΔΓ έχω $ΚΛ // AB$. Ακόμα $ΚΛ = AB = 3$.
Άρα $ΚΛ // = AB$, επομένως το ABΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

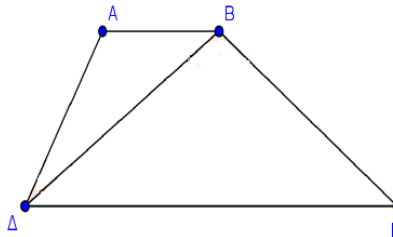
31. Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $AB // ΓΔ$ και $ΒΔ = ΒΓ$. Αν $\hat{\Delta B \Gamma} = 110^\circ$ και $\hat{A \Delta B} = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία Γ.

(Μονάδες 11)

β) Τη γωνία Α.

(Μονάδες 14)



α) Το $\Delta B \Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{\Delta B \Gamma} = 110^\circ$ και $\hat{B \Delta \Gamma} = \hat{B \Gamma \Delta} = \omega$.

$$\text{Επομένως } 110^\circ + \hat{B \Delta \Gamma} + \hat{B \Gamma \Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega = 180^\circ - 110^\circ \Leftrightarrow 2\omega = 70^\circ \Leftrightarrow \omega = 35^\circ$$

β) Το ABΓΔ είναι τραπέζιο με $AB // ΓΔ$ και $\hat{A \Delta B}$, $\hat{B \Delta \Gamma}$ είναι εντός εναλλάξ και επομένως ίσες, άρα $\hat{A \Delta B} = \hat{B \Delta \Gamma} = 35^\circ$.

$$\text{Άρα } \hat{B} = 35^\circ + 110^\circ = 145^\circ.$$

Στο τραπέζιο ABΓΔ έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \hat{A} + 145^\circ + 60^\circ + 35^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 120^\circ.$$

32. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο A είναι μέσο του BE .

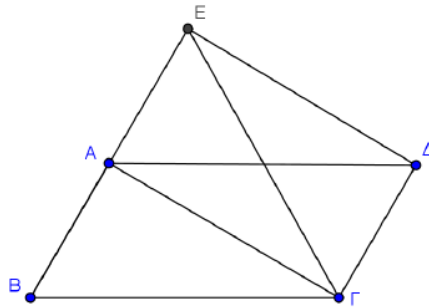
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $B\hat{E}\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$

(Μονάδες 8)



α) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $AB = \Gamma\Delta$ (1). Ακόμα $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο άρα $\Gamma\Delta = AE$ (2)

$(1), (2) \Rightarrow AB = AE \Rightarrow A$ μέσο του BE .

β) Στο $B\hat{E}\Gamma$ έχω ότι $A\Gamma$ διάμεσος και ύψος, άρα το $B\hat{E}\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ) Το $B\hat{E}\Gamma$ είναι ισοσκελές άρα $A\hat{B}\Gamma = A\hat{E}\Gamma$. Ακόμα $E\hat{A}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $AD // B\Gamma$.

Τα $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθογώνια και $E\hat{A}\Delta = A\hat{B}\Gamma$. Τέλος $AE = AB$ αφού A είναι το μέσο του BE .

Επομένως $B\hat{A}\Gamma = A\hat{E}\Delta \Rightarrow B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$.

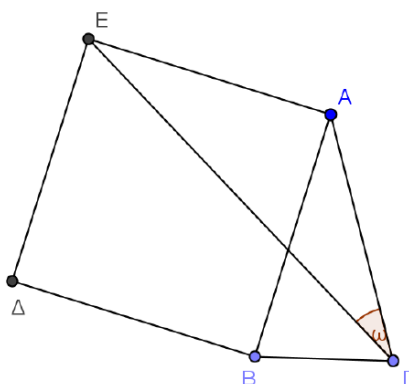
33. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) $2 \cdot \hat{E}\Gamma A = 90^\circ - \hat{B}\hat{A}\Gamma$

(Μονάδες 15)



α) Το $AB\Delta E$ είναι τετράγωνο, άρα $AE = AB$ (1).

Ακόμα $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, δηλαδή $AB = A\Gamma$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow A\Gamma = AE \Rightarrow \triangle A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

β) Στο $\triangle A\Gamma E$ έχω $\hat{A}\hat{E}\Gamma + \hat{A}\hat{\Gamma}E + \hat{E}\hat{A}\Gamma = 180^\circ \stackrel{\hat{A}\hat{E}\Gamma = \hat{A}\hat{\Gamma}E}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}E + \hat{A}\hat{\Gamma}E + (\hat{E}\hat{A}B + \hat{B}\hat{A}\Gamma) = 180^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \hat{A}\hat{\Gamma}E + 90^\circ + \hat{B}\hat{A}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \hat{A}\hat{\Gamma}E = 90^\circ - \hat{B}\hat{A}\Gamma.$$