ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελίδα 149

Α2. Θεωρία σελίδα 148

Α3. Θεωρία σελίδα 30

Α4. (α) Λ (β) Σ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ έχω $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x-1} = k-(P(A)+P(B)) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3-x-2x+2}{x-1} = k-(P(A)+P(B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = k-(P(A)+P(B)) \Leftrightarrow (P(A)+P(B)) = k+1$$

Ακόμα ισχύει $0 \le P(A) \le 1$ και $0 \le P(B) \le 1$. Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$0 \le P(A)+P(B) \le 2 \Leftrightarrow 0 \le k+1 \le 2 \Leftrightarrow -1 \le k \le 1 \Leftrightarrow |k| \le 1$$

Β2. Έχουμε ότι

$$x\cdot e^{g(x)} = (x-1)\cdot f(x) - 2 \Leftrightarrow x\cdot e^{g(x)} = x^3-3x \Leftrightarrow e^{g(x)} = x^2-3$$

Επομένως $g(x) = \ln(x^2-3)$

Β3. Πρέπει $x^2-3>0 \Leftrightarrow x>\sqrt{3}$ ή $x<-\sqrt{3}$. Άρα Α=$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

Β4. Έχουμε ότι

$g'(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}$ και $g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2-3}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$,

Από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g και από την λύση της παραπάνω ανίσωσης προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

B5. Ισχύει ότι $\mathrm{A}\subseteq \mathrm{B}\Rightarrow P(A)<P(B)\overset{g\nearrow}{\Longrightarrow} g\left(P(A)\right)<g\left(P(B)\right)$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Μελετάμε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Έχουμε $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-(x+1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{2x-x-1}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.

Έχουμε ότι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

x	0	1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	Γν. φθίνουσα	Γν. αύξουσα

Ακόμα $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5 \overset{f\text{ γν.θίνουσα}}{\Longrightarrow} f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)>f(x_4)>f(x_5)$

Άρα $f(x_2)>f(x_3)\xRightarrow{\delta=x_3=\frac{1}{2}} f(x_2)>f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow f(x_2)>\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sqrt{2}f(x_2)-3>0$

Γ2. Έχουμε ότι $(\mathrm{OM})^2=\left(\sqrt{x^2+f^2(x)}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^2}\right)^2=x^2+x+2+\frac{1}{x}$

Γ3. Έστω R_1 το εύρος των τεταγμένων τότε

$$R_1=f(x_1)-f(x_5)=\frac{x_1+1}{\sqrt{x_1}}-\frac{x_5+1}{\sqrt{x_5}}=\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_5}\right)+\frac{\sqrt{x_5}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_5}}=$$

$$=\frac{x_5-x_1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_5}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_5}}-1\right)=\frac{R}{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{4\alpha}\cdot\frac{1-\beta}{\beta}=\frac{1-\beta}{4\alpha\beta}$$

Ακόμα $\beta\cdot(1+20\alpha)=1\Leftrightarrow \beta+20\alpha\beta=1\Leftrightarrow 1-\beta=20\alpha\beta$

Άρα $R_1=\frac{20\alpha\beta}{4\alpha\beta}=5$

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής του τετραγώνου της απόστασης τυχαίου σημείου $\mathrm{M}(x,f(x))$ από το $O(0,0)$ είναι η παράγωγος της

συνάρτησης $g(x)=x^2+x+2+\frac{1}{x}$ με

$g'(x)=2x+1-\frac{1}{x^2}\Rightarrow g'(1)=2$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ από Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{A\Gamma}^2\Leftrightarrow x^2+z^2=16\Leftrightarrow z=\sqrt{16-x^2}$. Για το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ έχω $E(x)=x\cdot\sqrt{16-x^2}$ με $x>0$ και

$z>0\Leftrightarrow\sqrt{16-x^2}>0$ που ισχύει αρκεί $16-x^2>0\Leftrightarrow x^2<16\Leftrightarrow -4<x<4$

Επομένως $0 < x < 4$

Δ2. $E'(x) = \sqrt{16-x^2} + x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = \dfrac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$

$E'(x) \geq 0 \Rightarrow \dfrac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow 16-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 8$

, επομένως $0 < x < 2\sqrt{2}$

Η $E(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 2\sqrt{2}$

x	**0**	$2\sqrt{2}$	**4**
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	Γν. αύξουσα		Γν. φθίνουσα

Δ3. Έχουμε ότι $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 2\sqrt{2} \overset{E(x)\text{ γν αυξουσα}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow E(1) = E(x_1) < E(x_2) < E(x_3) < E(x_4) < E(x_5) = E\left(2\sqrt{2}\right)$ με

$R = E\left(2\sqrt{2}\right) - E(1) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{16-\left(2\sqrt{2}\right)} - \sqrt{15} = 8 - \sqrt{15}$

Δ4. Για την διάμεσο των τεταγμένων $y_i = E(x_i)$ έχουμε ότι

$\delta = E(x_3) \Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{55}}{4} = x_3 \cdot \sqrt{16-{x_3}^2} \Leftrightarrow \left(3\sqrt{55}\right)^2 = \left(4x_3 \cdot \sqrt{16-{x_3}^2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16{x_3}^4 - 256{x_3}^2 + 495 = 0$. Άρα ${x_3}^2 = \dfrac{9}{4} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x_3 = \dfrac{3}{2}$ ή

${x_3}^2 = \dfrac{55}{4} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x_3 = \dfrac{\sqrt{55}}{2} > 2\sqrt{2}$ Απορρίπτεται.

Επομένως $y_i \geq \sqrt{4 \cdot \frac{3}{2} - \left(8 - \sqrt{15}\right) \cdot x_i - \sqrt{15} \cdot x_i + 8 + 5x_i} \cdot x_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{16 - x_i^2} \geq \sqrt{6 - 8x_i + \sqrt{15} \cdot x_i - \sqrt{15} \cdot x_i + 12 + 5x_i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_i^2 - 3x_i + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x_i \leq 2$. Άρα $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ και η πιθανότητα του ενδεχομένου A θα είναι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{5}$.

<u>ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ</u>

<u>ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ</u>