

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων AB και ΓΔ ονομάζεται ο θετικός αριθμός λ για τον οποίο ισχύει: $AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda$

Μέτρο ενός ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται ο λόγος του μεγέθους προς το μέγεθος ενός άλλου ευθυγράμμου τμήματος που θεωρείται σαν μονάδα μέτρησης.

Πόρισμα: Δυο ίσα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντιστρόφως.

Θεώρημα: Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους ως προς την ίδια μονάδα μέτρησης και είναι ανεξάρτητα από τη μονάδα μέτρησης.

Αναλογία είναι η ισότητα λόγων. Η σχέση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$ είναι αναλογία με λόγο λ και όρους τα τμήματα α, β, γ, δ. Στην πιο πάνω αναλογία τα τμήματα α και γ λέγονται **ανάλογα** των β και δ. Τα α και δ λέγονται **άκροι** όροι ενώ τα β και γ **μέσοι** της αναλογίας.

Ο τέταρτος όρος δ λέγεται τέταρτη ανάλογος των α, β και γ. Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ οι μέσοι όροι είναι ίσοι. Αυτή η αναλογία λέγεται **συνεχής** και ο β λέγεται **μέση ανάλογος** ή **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Ιδιότητες των αναλογιών.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma,$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta},$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \dots + \kappa}{\beta + \delta + \dots + \lambda}$$

Αρμονική διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος

Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB, για κάθε εσωτερικό σημείο M του AB υπάρχει ένα

εξωτερικό σημείο N του AB τέτοιο ώστε: $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$

Τα σημεία M και N ονομάζονται **αρμονικά συζυγή** των A και B και τα τέσσερα σημεία A, M, B, N λέγονται αρμονική τετράδα.

Ιδιότητες

1. Τα σημεία N και M βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του μέσου του AB.
2. Αρμονικό συζυγές του μέσου δεν ορίζεται.
3. Αν τα M και N είναι αρμονικά συζυγή των A και B, τότε τα A και B είναι αρμονικά συζυγή των M και N.
4. Αν O το μέσο του AB τότε ισχύει $OA^2 = OM \cdot ON$ και αντίστροφα.

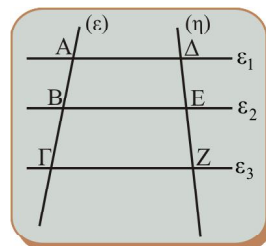
5. Σε κάθε αρμονική σημειοσειρά ισχύει: $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} \pm \frac{1}{AN}$

Θεώρημα Θαλή

Αν (τρεις τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σ' αυτές τμήματα ανάλογα.

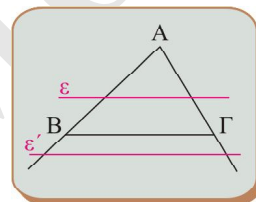
Δηλαδή με βάση το διπλανό σχήμα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$



Θεώρημα του Θαλή σε τρίγωνο

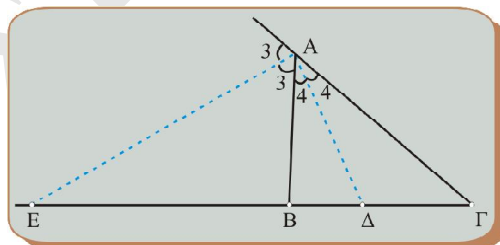
Αν μια ευθεία είναι παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου, τότε διαιρεί τις δύο άλλες πλευρές εσωτερικά ή εξωτερικά στον ίδιο λόγο και αντιστρόφως.



Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου

Η εσωτερική διχοτόμος γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Δηλαδή, στο διπλανό σχήμα για τη διχοτόμο ΑΔ ισχύει:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$



Θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου

Αν η εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου τέμνει το φορέα της απέναντι πλευράς, τότε χωρίζει εξωτερικά αυτή την πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων

πλευρών. Για παράδειγμα, στο παραπάνω σχήμα για τη διχοτόμο ΑΕ ισχύει: $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma E}$

Παρατήρηση

Επειδή $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma E} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ τα σημεία Δ και Ε είναι αρμονικά συζυγή των Β και Γ.

Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία οι διχοτόμοι διαιρούν την απέναντι πλευρά.

$$\Delta B = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}$$

$$\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}$$

$$EB = \frac{\alpha\gamma}{\beta - \gamma}$$

$$\Gamma E = \frac{\alpha\beta}{\beta - \gamma}, (\beta > \gamma)$$