

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

(ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα του Fermat. (10 μονάδες)

A2. Επιλέξτε την σωστή απάντηση στην παρακάτω ερώτηση: (4 μονάδες)

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 2$ τότε:

(α) Η g δεν ορίζεται στο $x_0 = 0$

(β) $g'(0) = 0$

(γ) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

(δ) $g'(x) \neq 2$

(ε) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

A3. Εξετάστε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων, σημειώνοντας **(Σ)**ωστή ή **(Λ)**ανθασμένη. (5 μονάδες)

i. Αν για κάθε x που ανήκει σ' ένα σύνολο A ισχύει $F'(x) < 0$, τότε η F είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

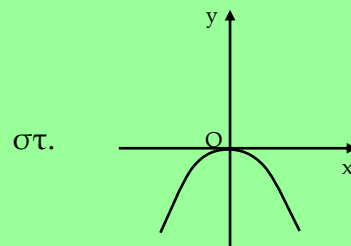
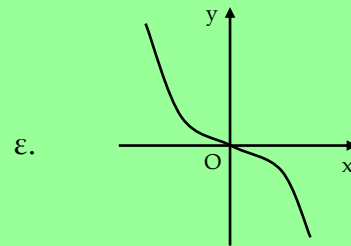
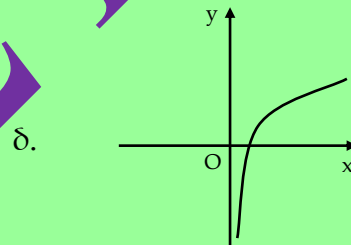
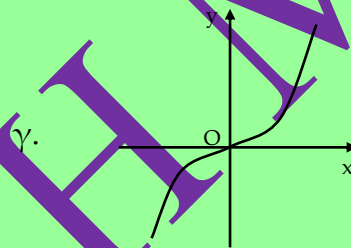
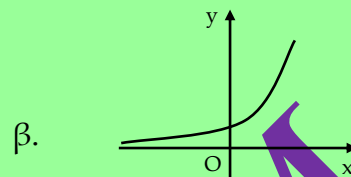
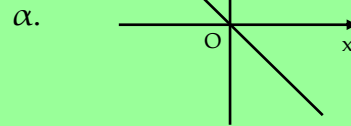
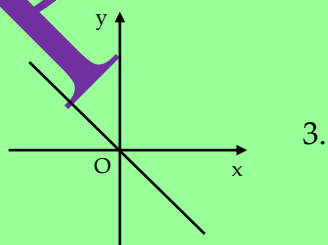
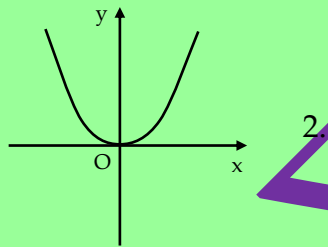
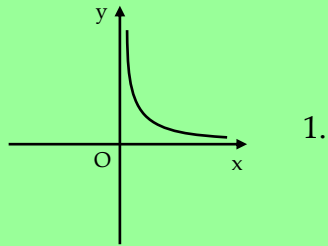
ii. Αν $F'(x) < 0$ τότε η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη C_F στο σημείο x_0 με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία.

iii. Συνάρτηση που η παράγωγός της μηδενίζεται σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παίρνει σταθερή τιμή σ' αυτό.

iv. Αν F πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

v. Αν μια συνάρτηση f έχει ακρότατο σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε στο σημείο αυτό η γραφική της παράσταση έχει εφαπτομένη που είναι παράλληλη στο άξονα $x'x$.

A4. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της παραγώγου F' της 1^{ης} στήλης, την γραφική παράσταση της F της 2^{ης} στήλης. (6 μονάδες)



ΘΕΜΑ Β

- B1.** Να βρείτε την συνάρτηση f που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,5)$ και είναι τέτοια ώστε η κλίση της σε κάθε σημείο να είναι τετραπλάσια της τετμημένης του σημείου αυτού. (15 μονάδες)
- B2.** Έστω g συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[0,4]$ με $g(4)=1$ και $g(0)=7$.
- (α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της g . (5 μονάδες)
- (β) Αν $\alpha \in (1,7)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0,4]$. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο $g(x) = \frac{e^x}{e^x + x^{2016}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να εξετάσετε την g ως προς την μονοτονία. (8 μονάδες)
- Γ2.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2016}}{e^x}$. (10 μονάδες)
- Γ3.** Βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της g . (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- Δ1.** Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 5
- Δ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της F . Μονάδες 5
- Δ3.** Να δείξετε ότι είναι $e^2 \geq 2^e$. Μονάδες 8
- Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση $(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} = (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}$ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Μονάδες 7