ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΡΟΣΗΜΟ
ΙΑΤΡΙΚΟ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ

Αγ. Κωνσταντίνου 11 – Πειραιάς – τη. 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – τηλ. 210 46 12 555

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ 260

Α2. **γ**

Α3. Λάθος, Σωστή, Λάθος, Σωστή, Λάθος.

Α4. 1δ, 2γ, 3στ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $f(1)=5$ και $f'(x)=4x$ για κάθε x.

Έτσι θα είναι $f(x)=2x^2+c$

Όμως για $x=1$ γίνεται $f(1)=2+c \Leftrightarrow 5=2+c \Leftrightarrow c=3$

Έτσι $f(x)=2x^2+3$

Β2. **(α)** Επειδή η g είναι γνήσια μονότονη και ισχύει ότι $0<4$ $g(0)>g(4)$ θα είναι η g γνησίως φθίνουσα στο $[0,4]$.

(β) Εφαρμόζουμε Θ.Ενδιάμεσων τιμών στη συνάρτηση g στο $[0,4]$.

Πράγματι η g είναι συνεχής στο $[0,4]$ και το α βρίσκεται μεταξύ των τιμών $g(4)$, $g(0)$. Έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,4)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=\alpha$. Επίσης η g είναι 1-1 ως γνησίως μονότονη και έτσι η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Αγ. Κωνσταντίνου 11 – Πειραιάς – τη. 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – τηλ. 210 46 12 555

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις των συνεχών συναρτήσεων $y=e^x$, $y=x^{2016}$.

$$g'(x)=\frac{e^x\left(e^x+x^{2016}\right)-e^x\left(e^x+2016x^{2015}\right)}{\left(e^x+x^{2016}\right)^2}=$$

$$=e^x x^{2015}\frac{x-2016}{\left(e^x+x^{2016}\right)^2}$$

Είναι $g'(x)>0 \Leftrightarrow x>2016$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,2016\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[2016,+\infty\right)$.

Γ2. $f(x)=\dfrac{x^{2016}}{e^x}=\left(\dfrac{x}{e^{\frac{x}{2016}}}\right)^{2016}$

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{2016}}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2016}{e^{\frac{x}{2016}}}=2016\cdot 0=0$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{2016}}}\right)^{2016}=\lim_{y\to 0}y^{2016}=0$

Γ3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+x^{2016}}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{e^x+x^{2016}}\right)=0\cdot 0=0$

Άρα στο -∞ έχει ασύμπτωτη τον άξονα χ΄χ.

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+x^{2016}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{x^{2016}}{e^x}}\overset{(\Gamma 2)}{=}\frac{1}{1+0}=1$$

Άρα στο $+\infty$ έχει ασύμπτωτη τον άξονα $y=1$.

.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η F ορίζεται και είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

$$F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$F'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow x<e$$

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση e την τιμή $F(e)=\frac{1}{e}$.

Δ2. $$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)=-\infty(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}F(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{1}=0$$

Έτσι $F((0,e])=\left(\lim_{x\to 0^+}F(x),\, F(e)\right]=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$ και

$$F([e,+\infty))=\left(\lim_{x\to +\infty}F(x),F(e),\right]=\left(0,\frac{1}{e}\right]$$

Άρα το σύνολο τιμών της F είναι το $F((0,+\infty))=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$

Δ3. Ισοδύναμα η ζητούμενη γίνεται

$$e^2\geq 2^e \Leftrightarrow \ln e^2\geq \ln 2^e \Leftrightarrow 2\geq e\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{e}\geq\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(e)\geq F(2)$$

Αυτό ισχύει από Δ1 αφού F είναι γν. φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

Δ4. Η F είναι 1-1 στο $(0,e]$ ως γν. αύξουσα και έτσι ισοδύναμα η ζητούμενη για $x\in\left(0,\pi/2\right)$ γίνεται

Αγ. Κωνσταντίνου 11 – Πειραιάς – τη. 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – τηλ. 210 46 12 555

$$
\begin{aligned}
(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} = (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} &\Leftrightarrow \ln(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} = \ln(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \ln \eta\mu x = \mu\eta\mu x \ln \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{\ln \eta\mu x}{\eta\mu x} = \frac{\ln \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow F(\eta\mu x) = F(\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \pi/4
\end{aligned}
$$

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
Δέσποινα Σωτηροπούλου